بسم الله الرحمن الرحیم

لومړی څپرکی

داحصائیی اساسی مفاهیم اود دفعاتو توزیع

احصائیه څشی ده؟
ایا احصائیه د اعدادو جمع کول دي؟ ایا احصائیه د شکلونو رسم او لایه ده؟ ایا د وزګارتیا اوسط یا سلنې محاسبه او یا د نورو شاخصونو محاسبه ده، ایا احصائیه د ټولنې یا طبیت ځانګړو عددي مقدارونو محاسبه ده؟
هو! دا ټول سم دي، خو احصائیه د یو علم په توګه معلوماتو ته د مفهوم ورکولو مطالعه او څیړنه ده. د ټولنې د بېلابېلو برخو کسان معلوماتو ته اړتیا لري.
د بېلګې په توګه مرینه، د کرنې حاصلاتو کچه، روغتیایي پېښې، ترافیکي پېښې او داسې نور...
مونږ دلته احصائیه موخې ته د رسېدو لپاره کاروڅو معلوماتو ته مفهوم ورکړو او و یې ارزو

1.1داحصائیی تعریف او مفهوم:

احصائیه یوه عربی کلمه ده ،چی دشمیرلو په معناده .په انګلیسی کی (statistics) بلل کیږی چی دلاتنی لغات status څخه اخستل شویدی چی د دولت لپاره دضرورت وړ اودټولنی لازمه ارقامو اومعلوماتوپه معناده.نن ورځ هم په انګلیسی ژبه کی state دولت ته ویل کیږی داحصائیی لپاره علماو بیلابیل تعرفونه کړیدی
په ساده او معمولی مفهوم سره احصائیه دارقامو اوشمیرلو هری هغی مجموعی ته ویل کیږی چی دچاپیریال یادانسانانو ټولنیزو،اقتصادی،سیاسی اونورو فعالیتونو او ښکارندو په اړه وی .دچاپیریال په برخه کی د اوربښت ، نودوغی [illegible] بیلګی [illegible]یتونوپه برخه کی د وزګارو اوپه کاربوختو وګړو شمیر ، دسواد سلنه، دناروغیو کچه،واردات،صادرات، او داسی نوری بیلګی ذکر کولای شو .

Ketabton.com

(Kendall) او (Yule) وایی: د ډیرو اړتیاو دټاکلو لپاره په ټاکلو حدودو کی دکمی ارقاموڅیرنی ته احصائیه وایی.
که پورته تعریف ته نظر وکړو :
احصائیه په لومړی ګام کی اطلاعات (ارقام) ،معلومات اومشاهدات راټولوی همدغه ارقام(Data) خام مواد دی ، چی بیا تنظیمیری او په لنډیز سره ارائیه او په واضح ډول سره تشریح کیږی ، دهغوی تعبیر او تفسیر اسانه کیږی
په دویم ګام کی احصائیه د څیړونکی سره مرسته کوی چی دخپلو څیرنو پایلو ته پراخوالی ورکړی

1.2

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

د احصائيي لنډه تاريخچه:

احصائيه دانسانی ټولنی دلومړی دولت په اندازه لرغونتوب لری کله چی مصر ،بابل ، کی لومړنی دولتونه په ابدائيه بڼه جوړشول ، دا وخت دملاد څخه (۳۰۵۰) کاله مخکی چی دوی پخپلو قلمرونو کی د دولتی چارو د ضرورت له مخی دنفوسو او نورو منابعو په هکله شمیرنی کولی په چین کی (۲۰۰۰) کاله مخکی تر ملاد سر شميرنه شوی په (۱۰۱۷) م کال کی د اوسنی فلستين د نفوس شميرنه شويده په انګليستان کی (۱۳۷۱-۱۳۱۲)م کال کی ماليه ثبت او دماليی ورکونکو شمير ثبت شويدی

په همدی سلسله احصائيه دخلګو د توجه وړ وګرځيده

1.3داحصائيی د پلی کولو (تطبيق) ساحه

له احصائيی څخه دعلومو ديوی څانګی او دځانګړو ميتودونو او روشنو ديوی ساحی په توګه په لاندی برخو کی ګټه اخستل کيږی

1- دکرنيزو محصولاتو د توليد او ويشلو په برخه کی
2- دنفوس وکړو او کورنيو دځانګړتياو په برخه کی
3- دمهاجرتونو مسافرتو نو او دهغوی داړوند حالاتو په برخه کی
4- داقتصادی ،ټولنيزو،فزيکی، ودانولو دبنستونو او دهغی دساتنی اوڅارنی په برخه کی
5- دسياست ،ټاکنو، او دانسانی حقونو په برخه کی
6- دترانسورت او ماليټو درا ټولولو په برخه کی
7- دعلمی تحقيقاتو او مطالعاتو سروی دعلومو دبيلابيلوڅانګو په برخه کی
8- دسوداګری ،مارکيټ ، دکار ساحی او د عوايدو ، لګښتونو دسطحی په برخه کی
9- د ښوونی اوروزنی ، په ملکی اونظامی خدمتونو کی د نفوسو دجلب په برخه کی

1.4 د احصائيې تقسيم بندی

احصايه د ارقامو د توضيح او تشريح له مخي په دوه برخوويشل کيږي .

1: **تشريحي احصايه(Descriptive statistics)** : دا احصايه دټولو هاغو روشونو او اوصافو څخه عبارت ده چې د يو جميعت او يا يوي نموني د اوصافو اومشخصاتو په تشريح او تو ضيح کې په کاروړل کيږي لکه داوسط،مياني ، مود،او معياري انحراف چی داحصائيی په همدی برخه کی تشريح کيږی.

۲-استنباطي احصايهInferential statistics: استنباطي احصايه د هاغو روشونو څخه عبارت ده چې د هغي له لاري د يوي نموني د مربوطه مشخصاتو له مخي د يو جميعت مشخصات استنباط کيږي.

استاد عبدالاحد ارين

(c) ketabton.com: The Digital Library

او يا په بل عبارت استنباطي احصايه هغه احصايي ته وايي چې د جزيه تشريح كولو د كل سره سراو كار لري يعني محقق د نموني اوصاف سره سراو كار لري او د مشخصو روشونو په واسطه د نموني مشخصاتو له مخي د جميعت د مشخصاتو په اړوند خپل حكم صادروي .

1.5 جمعيت (population):

یو سټ چی ټول عناصر يی یو یاڅو مشترک خاصیتونه ولری او په یو مشخص وخت او مناسب موقعیت کی قرار ولری جمعیت بلل کیږی یا جمعیت ټولو هغو ارقاموته ویل کیږی چی دمطالعی او څیړنی لاندی وی او د مطالعی لپاره را ټول شوی وی په دی کی د بوټو ، ځارویو ، حشراتو، دحرارت درجه، او نور ټول ارقام راځی

احصائیوی جمعیت دوه ډوله دی : محدود نفوس (finite population) د بیلګی په توګه :د هلمند دنوزاد د انارو حاصلات ، دهلمند دناوی ولسوالی دپمبی حاصلات او بل يی بی نهایت نفوس (Infinite population) دبیلګی په توګه د ټوله نړی د انارو حاصلات یا د ټولی نړی دانارو د پخیدو د وخت سنجس ، په هغو کی د ګټورو موادو مقدار او نور مثالونه .

1.6 نمونه او نمونه اخستل (sample and sampling):

په ځینو مواردوکی دیوجمعیت یا ټولنی داعضاوو مطالعه ستونزمنه وی ،پر مصرفه اوپه عمل کی ستونزمن کار دی ، دمثال په توګه دافغانستان د 9 کلنو ماشومانو د استعداد ضریب (IQ) معلومول ستوزمن کار دی نو داحصائیی پوهان د ټول جمعیت د مطالعی لپاره نومړی جمعیت په څو ګروپونو ویشی چی دیوی برخی انتخاب دجمعیت څخه دنمونی(sample) په نوم یادیږی او دغی پروسی ته عملیی ته نمونه اخستل (sampling) وایی په احصائیه کی دجمعیت خصوصیاتو ته پارامتر (parameter) او نمونی خصوصیاتو ته تخمین یا براورد (Estimates) وایی که په احصائیه کی د 100 محصلینو دقد لوړ والی اندازه کړو او دهغوی اوسط قد په لاس راوړو نو لاس ته راغلی مقدارته تخمین د ټولو محصلینو وایی.

نمونه اخيستل له عناصرو څخه د نموني اخيستلو لپاره، يوازې يوه برخه يې د نموني په توګه مشاهده او اندازه کوو او د نموني پايله له عناصرو سره پرتله کوو ، هرڅيړنه او ارزونه کې د سمي نموني غوراوی يوه مهمه موضوع ده.

له دې امله د احصائي مهم بحثونه د احصائې نمونې اخيستنې نظرياتو او ميتودونو ته ځانګړي شوي دي.

نمونه اخيستل په دوو ډلو وېشل کيږي

١ساده نمونه اخيستنه

-٢تصادفي نمونه اخيستنه

-١ساده نموني اخيستنه کې د احصائيه يوه ليتوالتيا او سليقه شامل دى.

-٢تصادفي نمونه اخيستنه کې د احصائيه يوه ليتوالتيا او سليقه شامل نه دي.

استاد عبدالاحد ارين

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدای شي چي ټول عناصر د نموني اخيستني مساوي چانس ولري او د احصائي علم کي تر ډېره له تصادفي نمونه اخيستنې څخه استفاده کيږي.
يعنې د دې ډلې ټول عناصر د نمونې اخيستنې عنصر په توگه مساوي چانس لري او د احصائي علم کې تر ډېره بريده تصادفي نمونه اخيستنه کارول کيږي.
د بېلگې په توگه که د يو پوهنتون ۵۰زده کړيلان د ونې/ قد ټاکلو لپاره د نمونې په توگه غوره کړو او د هغوی د ونې لوړوالی پيدا کړو په دې صورت کې له اټکل څخه تر لاسه شوي معلومات د ټولو زده کړيلانو د قد اوسط ښيي.

1.7 متحول (Variable)

1. تعريف : هر عنصر چی داندازه گیری وړ وی د متحول په نوم یادیږی
2. تعريف: دمتحول اندازه گیری ته تحول وایی
3. تعريف : که چیری متحولونه یوازی تام قیمتونه واخلی ، نو دغیر متمادی متحول په نوم یادیږی لکه : دیوی ښو ونځی د استادانوشمیر
4. تعريف: که چیری یو متحول د دوو معینو حدونو تر منځ قیمتونه واخلی د متمادی متحول په نوم یادیږی ،لکه دقد جگوال ، وزن ، استعداد......

1.8خام مواد یا خام اطلاعات (Raw Data)

د دعدادو جمع کول او نمایش دی ، دځیرنی او سنجس لپاره نوموړی مواد دپوهیدو وړ نه دی یا په بل عبارت دهغه ابتدائه معلوماتو او ارقامو را ټول دی چی په عددی ډول نه وی ترتیب شوی یعنی:

- تحلیل او تجزیه نه وی
- گنگ وی
- دپو هیدو وړ نه وی
- خشک یا خام ارقام وی

1.9 مجموعه(Summation)

په احصائیه کی اکثره وخت د مجموعی څخه استفاده کوو دبیلگی په توگه : که د x یو متحول ولرو او هغه ته $x_1, x_2, .., x_n$ قیمتونه ورکړو نو په لنډ ډول یی په x_i سره ښیو چی
$i = 1,2,3 \dots, n$ چی دی او مجموعه یی په لاندی ډول سره ښیوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \quad ... + x_n$$

۱ ـ **قضیه :**د دوه یاڅو متحولنو مجموعه د هر متحول دجلا مجموعی څخه عبارت ده

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i$$

ثبوت:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) + \cdots + (x_n + y_n + z_n)$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) + (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويمه قضيه : که چېري c يو ثابت عدد وي؛ نو:

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ثبوت :

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = cx_1 + cx_2 + \ldots + cx_n = c(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

لومړی مثال :- که $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$ وي؛ نو: $\sum_{i-1}^{3} x_i$ محاسبه کړئ ؟.

حل :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{n=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 4 + 6 = 12$$

دويم مثال : که $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$ وي لاندې مجموعې پيدا کړئ؟

$$1: \sum_{i=1}^{3} x_i \qquad 2: \sum_{i=1}^{3} 2x_i^2 \qquad 3: \sum_{i=1}^{3} (x_i - i)$$

حل:

$$1: \sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 3 + 5 + 7 = 15$$

$$2: \sum_{i=1}^{3} 2x_i^2 = 2\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2(3^2 + 5^2 + 7^2) = 166$$

$$3: \sum_{i=1}^{3} (x_i - i) = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + (x_3 - 3)$$

$$= (3-1) + (5-2) + (7-3) = 2 + 3 + 4 = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳-مثال: د جمع دحاصل په شکل یی ولیکی

$$a)\sum_{i=1}^{3}(4y_i+1) \qquad b)\sum_{i=1}^{3}2x_i^2$$

حل :
$$a)\ \sum_{i=1}^{3}(4y_i+1)=(4y_1+1)+(4y_2+1)+(4y_3+1)$$

$$b)\sum_{i=1}^{3}2x_i^2=(2x_1^2)+(2x_2^2)+(2x_3^2)$$

که $x_i=2,4,5$ او $y_i=1,3,4$وی نو په دی صورت کی لرو چی:

$$\sum_{i=1}^{3}(4y_i+1)=(4.1\quad+1)+(4.3\quad+1)+(4.4+1)=35$$

$$\sum_{i=1}^{3}2x_i^2=(2.2^2)+(2.4^2)+(2.5^2)=90$$

دیوثابت عدد aمجموعه دهغه n برابره کیږی یعنی :
$$\sum_{i=1}^{n}a=na$$

ثبوت :
$$\sum_{i=1}^{n}a=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}a=na$$

مثال4 :
$$\sum_{i=1}^{3}4=3.4=12$$

$\sum_{i=3}^{6}3=(6-2)3=4.3=12$

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)=a\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}b=a\sum_{i=1}^{n}x_i+$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال6: د 2,5,6,7,11,15,20,22,23 عددونو په سټ کې د 3 اولو عددونو لپاره لاندی مجوعی پیداکوو

$$\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = (2 + 5 + 6)^2 = 13^2 = 169$$

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i)^2 = 2^2 + 5^2 + 6^2 = 4 + 25 + 36 = 65$$

دپورته مثال څخه نتیجه کیږی چی: $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \neq \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2$

دحاصل ضرب لپاره علامه : د $p(1).p(2).p(3) \ldots \quad \ldots p(n)$ لپاره لرو چی

$$\prod_{k=1}^{n} p(k) = p(1).p(2)\ldots.p(n), \qquad \prod_{k=1}^{n} k = 1.2.3\ldots.n = n!$$

مثالونه :

$$\prod_{k=1}^{n} a = a.a.a\ldots \quad .a = a^n\ , \quad \prod_{k=1}^{5} k = 1.2.3.4.5 = 5!\ \ , \quad \prod_{k=1}^{3} 3 = 3^3 = 27$$

پیاد باید ولرو چی : $\sum_{i=1}^{n} x_i\ y_i \neq \sum_{i=1}^{n} x_i\ .\sum_{i=1}^{n} y_i$ مثال دی لوستونکی کارکړی

پوښتنی :که $x_1 = 2, x_2 = 4\ , y_1 = 3\ , y_2 - 1$ وی $\sum_{i=1}^{2}(3x_i - y_i + 4)$ پیداکړی؟

که $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 7, x_5 = 8$ وی لاندی مجموعی پداکړی ؟

$$1{:}\sum_{i=1}^{3}(x_i - 3)^2 \qquad 2{:}\ \sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 \qquad 3{:}\ \ \sum_{i=1}^{3}(x_i^2 - x_i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$4: \sum_{i=1}^{3} \sqrt{x_i}$, $5: \sum_{i=1}^{4} (x_i^2 + 2)$, $6: \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i}$

1.10 د دفعاتو توزیع (ویش)

مخکی له دی چی موږ پیچلی معلومات راټول ، ترتیب او تنظیم کړو ، نو لازمه ده چی لاندی مفهومونه وپیژنو

1) ګراف (Graph) : دهغه شکل څخه عبارت دی چی د متحولینو تر منځ تصویری ارتباط ټینګوی
2) خام مواد(Raw data): دهغه ارقامو او راټول شوو معلوماتو څخه عبارت دی چی په عددی ډول نه وی ترتیب شوی
3) صنف بندی (Arrays): په صعودی یا نزول ډول دخامو موادو ترتیب کول دی
4) وسعت (Range): د صنف د لوی او کوچینی حد تر منځ فرق ته وسعت وایی
5) ساحه (Domain): دمتحول هغه قیمتونه دی چی تابع په نوموړی قیمتونو کی تعریف شوی وی
6) صنف (Class): هغه افراد ، اشیا ء او حوادث دی چی مشترک خصوصیات او عینی حالت ولری
7) دصنف انتروال(Class Interval: د صنف د تحول دساحی څخه عبارت دی
8) دطبقی یا صنف حدود (Class Limits): د یوی طبقی اخرنی (انجامی) اعداد دطبقی د حدودو په نوم یادیږی د طبقی کوچینی عدد د ټیټ حد او لوی عدد د لوړ حد په نوم یادیږی
9) دیوی طبقی خلاصه ساحه (open class Interval): عبارت دهغی طبقی دساحی څخه دی لوړ یاټیټ حد یی محدود شوی نه وی

د دفعاتو د توزیع جدول (Frequency Distribution): د دی لپاره چی خام مواد د هغوی د مربوطه دفعو سره ولیکو یو جدول ته ضرورت لرو چی لاندی نقطی باید په نظر کی ونیسو

a) د دی لپاره چی د اشتباهاتو مخه ځان وژ غورو دهری دفعی په عوض یو خط لیکو چی د چوب خط (Tally) په نامه یادیږی
b) وسعت : د صنفونو شمیر چی معمولآ د 5 څخه تر 25 پوری په نظر کی نیول کیږی دتعین لپاره یی وسعت یا فاصلی ته ضرورت دی چی د لوړ حد او ټیټ حد د تفریق د حاصل څخه عبارت دی یعنی R=b-a
c) دصنفونو انتروال باید یو شان وی چی معمولآ په c سره ښودل کیږی که دصنفونو شمیر په k سره وښیو نو دصنفونو انتروال د $c = \frac{R}{K}$ رابطی په واسطه تعینوو چی باید یو مناسب عدد انتخاب شی که دصنفونو انتروال او مقدار معلوم نه وی نو لاندی ټکی په پام کی نیسو

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. که n معلومات راکړل شوی وی نو د $n = 2^k$ رابطی ښخه د k قیمت پیدا کوو
2. که n معلوات راکړل شوی وی و، دلاندی رابطی ښخه استفاده کوو چی د استورج دقاعدی په نوم یادیږی د k قیمت مناسب انتخابوو $k = 1 + 3,322 . \log n$
3. کولای شو د k قیمت پخپله خوښه انتخاب کړو ، البته د 5 ښخه تر 25 پوری باید انتخاب شی که چیری دصنفونو شمیر د 5 ښخه کم وی، نو معلومات خپله معنا دلاسه ورکوی او که صنفونه د 25 ښخه زیات شی نو محاسبه یی اوږده او دوخت ضایع ده

لومړی مثال:

مثال: که یو شمیر ارقام په لاندي دفعاتو سره راکړشوي وي جدول یی ترتیب کړی

11,11,12,12,13,13,13,13,13,14,14,15,15,15,16,16,17,18

xارقام	F دفعات
18	1
17	1
16	2
15	3
14	2
13	5
12	2
11	2
Total	F=18

دویم مثال: لاندی عددونه د 20 تنه محصلینو دقد اندازه راښیی تاسی یی جدول ترتیب کړی

حل: 160,163,165,163,170,170,165,175,180,165

لومړی یی په نزولی ډول ترتیبوو 175,160,175,170,170,170,175,165,163,165

دقد اندازه	دفعات
160	2
163	3
165	5
170	5
175	4
180	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: په یوه ازموینه کی 40 زده کوونکو ګډون کړیدی او پایلی یی په لاندی ډول اعلان شویدی تاسی یی د دفعاتو دتوزیع جدول ترتیب کړی

56 78 62 37 54 39 62 60 28 82

38 72 62 44 54 42 42 55 57 65

68 47 42 56 56 55 66 42 52 48

48 47 41 50 52 47 48 53 68 56

حل:لومړی یی ترتیبوو

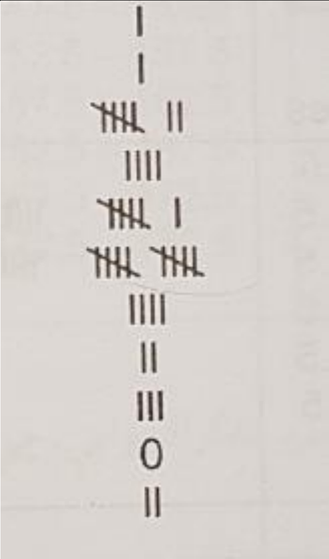
28 42 47 48 54 56 62 68

37 42 47 50 54 56 62 68 $R = b - a \Rightarrow R = 82 - 28 = 54$

38 42 47 52 55 56 62 72 $c = \frac{R}{k} = \frac{54+1}{11} = 5 \Rightarrow c = 5$

39 42 48 52 55 57 65 78

41 44 48 53 56 60 66 82

دصنفونو انتروال	Tally شمیریا	F_i
28-32		1
33-37		1
38-42		7
43-47		4
48-52		6
53-57		10
58-62		4
63-67		2
68-72		3
73-77		0
78-82		2

ځلورم مثال: که چیری په یوه مسابقه کی 80 محصلینو ګډون کړی وی ، د دفعاتو جدول یی ترتیب کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

23 24 18 14 20 24 24 26 23 21

16 15 19 20 22 14 13 20 19 27

24 22 38 28 34 32 23 19 21 31

16 28 19 18 12 27 15 21 25 16

30 17 22 29 29 18 25 20 16 11

17 12 15 24 25 21 22 17 18 15

21 20 23 18 17 15 16 26 23 22

11 16 18 20 23 19 17 15 20 10

حل: که وغواړو د پورته ارقامو جدول جوړ کړو ، نو لومړی باید هغه ترتیب کړو چی ترتیب کول یی لوستنکوته پریږدو

که وغواړو په اعشاری ډول صنفونه جوړکړو ، نو دهر صنف د ټیټ حد څخه 0.5 تفریقوو او دلوړ سره 0.5 جمع کوو

$10 - 0.5 = 9.5$, and $14 + 0.5 = 14.5$ $c = \frac{k}{R} = \frac{28+2}{6} = 5$

صنفونه Classes	صنفی سرحدونه Class boundaries	شمیریا Tally	دفعات F_i
10-14	9.5-14.5	𝍸 |||	8
15-19	14.5-19.5	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸 |||	28
20-24	19.5-24.5	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸 ||	27
25-29	24.5-29.5	𝍸𝍸 ||	12
30-34	29.5-34.5	||||	4
35-39	34.5-39.5			1
			$\sum F_i$=80

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال : د40 تنو محصلینو قد په cm اندازه شوی دی ، جدول یی ترتیب کړی

138 164 150 132 144 125 149 157 146

158 140 147 136 148 142 144 168 126

138 176 163 118 154 165 146 173 142

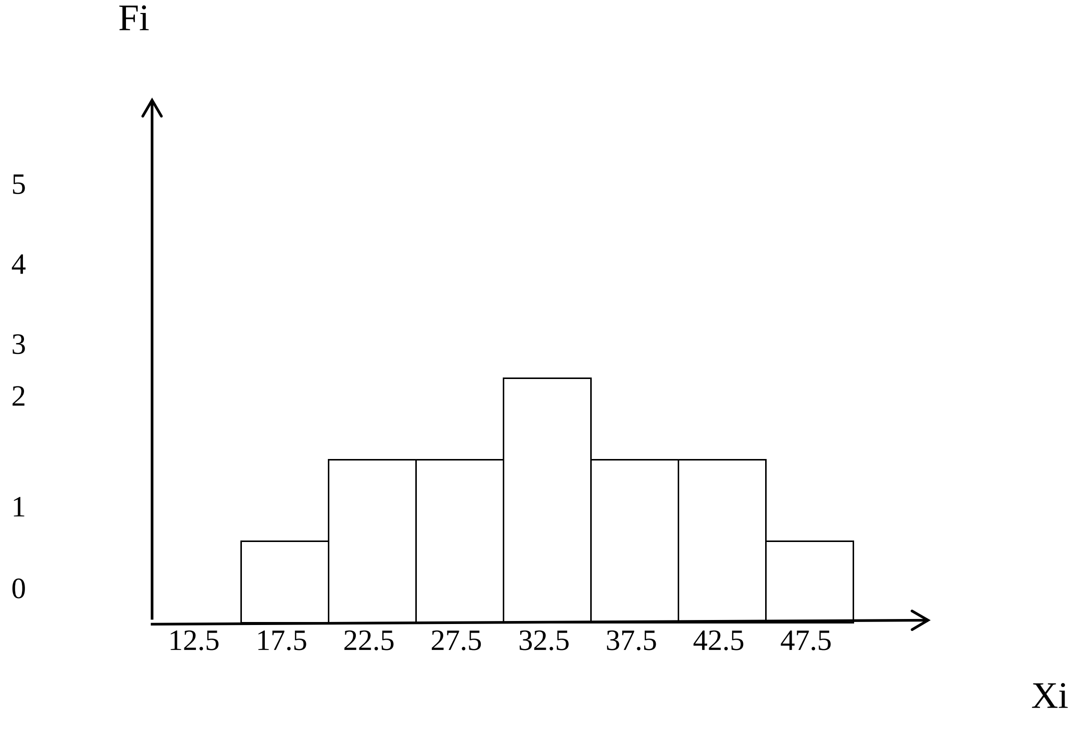
147 135 153 140 135 161 145 135 142

150 156 145 128

ترتیب کول یی د لوستونکو دنده ده

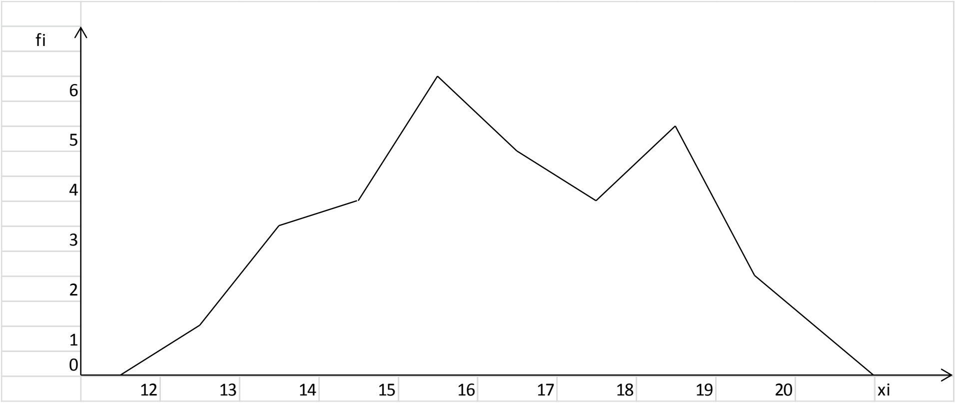
1.11 گراف: د دفعاتو د توزیع هندسی تصویر ته گراف وایی، چی اکثره علمی تحقیقات په ښه ډول تشریح کوی

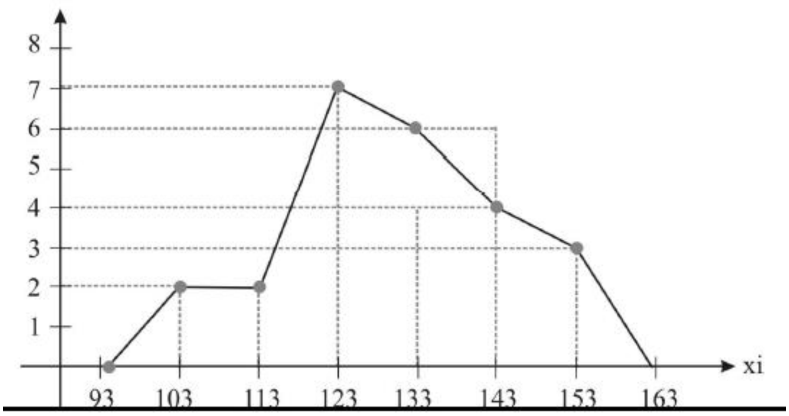
1. **هستوگرام گراف(مستطلی گراف)** : دغه گراف اکثرآ دمتمادی معلوماتو لپاره په کار وړل کیږی ،اودهغه مستطیلونو د مجموعی څخه عبارت دی چی قاعده یی د$c=\frac{R}{k}$ په واسطه تعینیږی



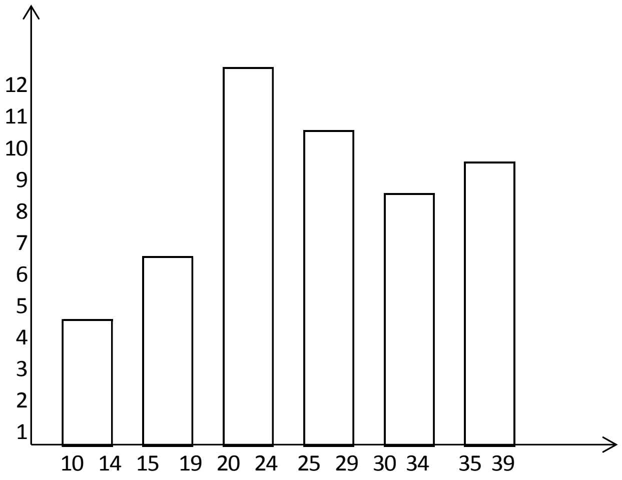
2. **د دفعاتو کثیرالاضلاع:** دهمدی گراف د ترسیم لپاره دهرمستطیل دقاعدی وسطی نقطه پیداکوو،دغه وسطی نقطه د مستطیلونو په پورته برخه کی سره نښلوو چی د دفعاتو کثیرالاضلاع لاسته راځی

(c) ketabton.com: The Digital Library





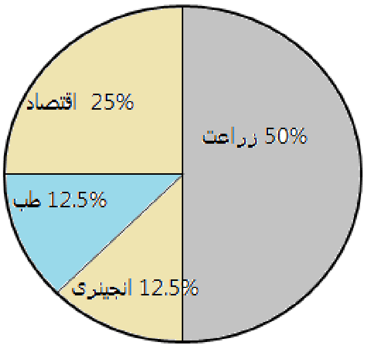
3. بار ګراف (میلیی ګراف): دا ګراف هم د هستوګرام ګراف غوندی دی خو فقت په هستوګرام کی معلومات متمادی وی خو په بار ګراف کی غیر متمادی .یادونه باید وشی چی د نوموړی ګراف د مستطیلونو ترمنځ فاصله باد یوه اندازه وی



4- پای ګراف : دا ګراف دیوی دایری څخه عبارت دی چی اکثره دفیصدی لپاره استعمالیږی

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library



1.12 دفریکونسی ډولونه

مطلقه فریکونسی F_i د معلوماتوکی دهر دیتا (data) د دفعاتو (تکرار) څخه عبارت دی

یادونه باید وس چی په صنف بندی شو معلوماتو کی مطلقه مجموعی فریکونسی د طبقه بندی شوو معلوماتو دمجوعی سره مساوی دی یعنی:

$$\sum_{i=1}^{k} F_i = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_k = N$$

۲ – نسبی فریکونسی f_i: ک دهر طبقی مطلقه فریکونسی د مطلقی فریکونسی پر مجموعی تقسیم کړو نو دهمغی طبقی نسبی فریکونسی په لاس راځی یعنی:

$$f_i = \frac{F_i}{\sum_{i=1}^{k} F_i} = \frac{F_i}{N}$$

دنسبی فریکونسی مجموعه په هر احصایوی جدول کی د (۱) سره مساوی ده

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_k = 1$$

3- د فیصدی فریکونسی p_i که دنسبی فریکونسی هره طبقه په *(100)* کی ضرب کړو دهمغه طبقی فیصدی فریکونسی لاس ته راځی یعنی: $p_i = \frac{F_i}{\sum_{i=1}^{k} F_i} . 100$

او د فیصدی مجموعی فریکونسی په هرجدول کی د (100)سره مساوی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_k = 100$$

4. تراکمی فریکونسی یا مجموعی فریکونسی(cumulative frequency): د دفعاتو حاصل جمع په cf سره ښیو د دفعاتو دا مجموعه هغه دفعی جمع کوی چی دهغی څخه کښته واقع وی

5. نسبی تراکمی فریکونسی(percentage relative frequency): rcf نسبی تراکمی فریکونسی د $rcf = \frac{cf}{N}$ پواسطه لاسته راځی چی دلته rcf نسبی تراکمی دفعات ، cf تراکمی دفعات او N د دفعاتو مجموعه راښیی او یا داسی چی که د نسبی فریکونسی هره طبقه دهغی دکښته طبقی سره جمع کړو نونیبی تراکمی فریکونسی په لاس راځی او دنسبی فریکونسی اخره طبقه په هر جدول کی د یو (۱) سره مساوی ده

6. دفیصدی نسبی فریکونسی (percentage relative cumulative frequency):

د $prcf = \frac{cf}{N}\ 100$ پواسطه لاسته راځی پورته حالتونه په لاندی جدول کی کتلای شی

x_i	F_i	$f_i = \frac{F_i}{N}$	$p_i = \frac{F_i}{N}100$	cf	$rcf = \frac{cf}{N}$	$prcf = \frac{cf}{N}100$
96-99	4	0.16	16	4	0.16	16
99-102	4	0.16	16	8	0.32	32
102-105	11	0.44	44	19	0.76	76
105-108	1	0.04	20	20	0.80	80
108-111	5	0.20	100	25	1.	100
	N=25	1				

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د (مثال: د (30) محصلینو د قد اندازی د سانتی متر په حساب په لاندی ډول دی

169 165 169 158 162 158 167 158 169 167 164 171

167 170 171 162 164 165 165 164 170 169 170 164

165 164 165 169 171 165

دقداندازه xi	158	162	164	165	167	169	170	171
دمحصلینوشمیرFi	3	2	5	6	3	5	3	3
کټګوری	5		14			11		

دپورته جدول څخه لیدل کیږی چی د 3 تنو قد 158cm، د 2 تنو قد 162cm ....او بالاخره د 3 تنو قد 71cm دی لیدل کیږی چی زیات محصلین د ماوسط قد لرونکی دی او دلوړ قد لرونکی تر ټیټ قد لرونکو زیات دی په لاندی جدول کی په ښه ډول لیدل کیږی

دمحصلینوګروپ xi	ټیټ قد	متوسط قد	لوړقد
دمحصلینوشمیرfi	5	14	11

مثال:په یوه کارخانه کی 20 تنه نارینه اوښځینه کار کوی

ښځه:woman   نر:Man

M W M W M WW M M M

M W M W W M W W M M

الف:دکارکونکوو شمیر معلوم کړی   حل:الف N=20

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب:متحول راوپیژنی

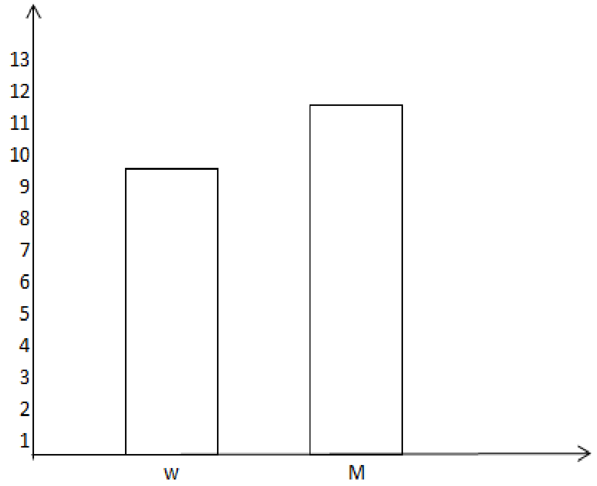
ج:جدول ترتیب کړی

د:گراف یی رسم کړی

ب:دکارکونکوجنسیت x

ج:

حالت	xi	Fi
1	M	11
2	W	9
		20

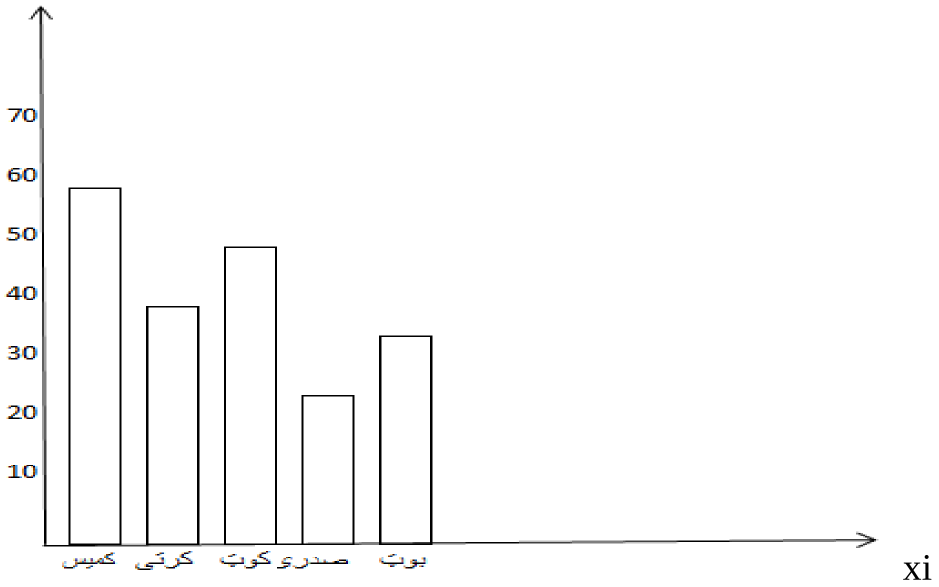


مثال: دیوی فابریکی څخه لاندی معلومات راکړل سوی دی تاسی یی گراف رسم کړی

i	Xi	Fi
1	کمیس	60
2	کرتی	40
3	کوټ	50
4	صدری	25
5	بوټ	35

fi

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال:د 170 کارکونکو څخه 18 تنه انتخابوو،تر څو دهغوی د اولادو شمیر معلوم کړو

الف :نمونه او جمعیت ، نمونه: n=18 او N=170 جمعیت

ب:متحول ، دکارکونکوشمیر=X

ج:ګراف رسم کړی ، د ګراف رسمول دلوستونکو دنده ده

i	xi	Fi
1	1	5
2	2	4
3	3	5
4	4	3
5	5	1
		18

مثال: د 1000 معلوماتو لپاره څو طبقو ته ضرورت دی؟

حل : د استورج (Sturges) د فورمول څخه کار اخلو

$$k = 1 + 3{,}3.\,logn \Rightarrow k = 1 + 3{,}3.\,log1000$$
$$= 1 + (3{,}3).\,3 = 1 + 9{,}9$$

$$k = 10{,}9 \approx 11 \Rightarrow k = 11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: که 300 تنه محصلین ولرو او دهغوی وسعت 4 وی ، نو دطبقو شمیر او د طبقو تر منځ انټروال لاسته راوړی

$$n = 300 \quad , \qquad R = 4 \ , k = 1 + 3{,}3.log300 = 9{,}18 \approx 9 \Longrightarrow k = 9$$

پاته عملیه د لوستونکو دنده ده

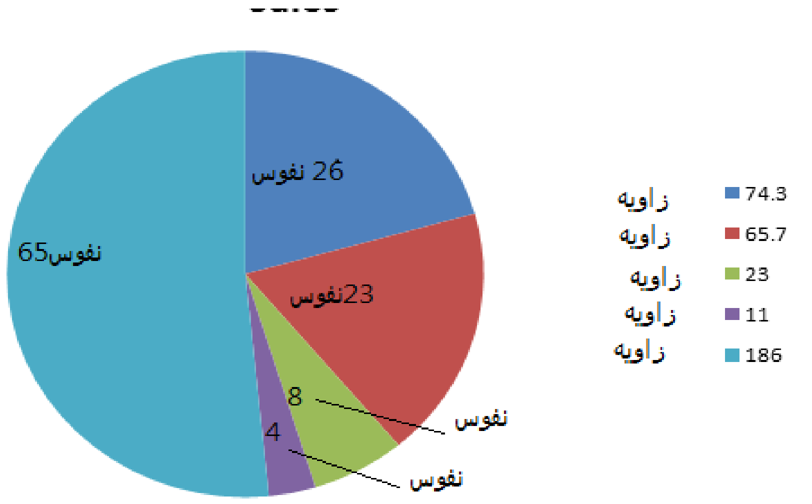
مثال: په لاندی جدول کی د هندوستان د ولایتونو نفوس راښیی، تاسی یی ګراف رسم کړی

ولایتونه	نفوس په ملیون
New Delhi	26
Hyderabad	23
Gujarat	8
Punjab	4
Mumbai	65

ددی سوال دحل لپاره د 360° $angle = \frac{quantity}{Total}$ فورمول څخه کار اخلو

(c) ketabton.com: The Digital Library

provinces	Population in million	Angle of sectors دقطاع زاویی	Comulative angles تراکمی زاویی
New Delhi	26	$\frac{26}{126}x360 = 74.3$	74.3°
Hyderabad	23	$\frac{23}{126}x360 = 65.7$	140°
Gujarat	8	$\frac{8}{126}x360 = 23$	163°
Punjab	4	$\frac{4}{126}x360 = 11$	174°
Mumba	65	$\frac{65}{126}x360 = 186$	360°
	126	360	



مهم تکی:

۱-که چیری معلومات په جدول کی ځای پرځای کړو او دخپل لورحدځخه کم شی .لاندی کرنی ترسره کوو

دجدول دنوی صنفونوانتروال په $c,$ سره بنیو اوپه لاندی ډول عمل کوو

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Ć= c+\left[\frac{\text{لوړحددجدول – دمعلوماتولوړحد}}{k}\right]$$

۲- دنویو صنفونو انتروال د Ć په اندازه نیسو

مثال۱ که چیری دمعلوماتو په یولیست کی لوړ حد 26 او کوچنینی حد یی 10 وی همدارنګه که c=3 او k=5 وی د توزیع جدول یی ترتیب کړی!

حل: ځنګه چی په جدول کی لوړ حد 25 او دمعلوماتو لوړحد 26 دی نو پورته مرحلی کاروو

i	دصنفونوانتروال
1	[10-13)
2	[13-16)
3	[16-19)
4	[19-22)
5	[22-25)

$$Ć= c+\left[\frac{\text{لوړحددجدول – دمعلوماتولوړحد}}{k}\right]$$

$$Ć= 3+\left[\frac{\mathbf{26-25}}{\mathbf{5}}\right] = 3.2$$

اوس یی جدول ترتیبوو

I	Ć
1	10,0 - 13,2
2	13,2 - 16,4
3	16,4 - 19,6
4	19,6 - 22,2
5	22,2 - 26,0

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم : که معلومات یا اعداد په یو جدول کی ځای پرځای کړو او دخپل لوړ حد څخه زیات شی نو لاندی کړنی کاروو

د صنفونو دپیل عدد t_1 په t'_1 سره ښیو او له د $\left[\frac{\text{دمعلواتولوړحد– لوړحد دجدول}}{2}\right]$ – ټیټ حد $= t'_1$ فورمول څخه کار اخلو

۲ – جدول د t'_1 څخه شروع کوو خو دصنفونو وسعت همغه پخوانی په نظر کی نیسو

مثال۱ : دیوی کارخانی د 36 کارکونکو دخطا اندازی په لاندی ډول دی .تاسی یی جدول ترتیب کړی

1 0,9 0,9 0,9 0,9 0,8 0,8 0,7 0,7 0,7 0,6 0,5 0,5

2,5 2,3 2,3 2,3 2,3 2 1,9 1,7 1,4 1,4 1,4 1,3 1,2

3 2,9 2,9

$$k = 1 + 3{,}3logn = 1 + 3{,}3log36 \Longrightarrow k = 1 + R = b - a\ 3 - 0{,}5 = 2{,}5$$
$$3{,}3(1{,}56) = 6{,}15 \approx 6 \Longrightarrow k = 6\,, \quad c = \frac{R}{K} = 0{,}41666. \approx 0{,}42.$$

i	C
1	[0,50 -0,92)
2	[0,92- 1,34)
3	[1,34- 1,76)
4	[1,76- 2,18)
5	[2,18- 2,60)
6	[2,60- 3,02)

څنګه چی په جدول کی لوړ عدد (3,02) دی چی دمعلوماتو دلوړ عدد سره توپیر لری نو لاندی عملیه کاروو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t'_1 = \text{تیټ حد} - \left[\frac{\text{دمعلواتولوړحد} - \text{لوړحد دجدول}}{2}\right]$$

$$t'_1 = 0{,}5 - \left[\frac{3{,}02 - 3}{2}\right] = 0{,}49$$

اوس دویم جدول له 0,49 حخه پیلوو

i	C
1	[0,49- 0,91)
2	[0,91- 1,33)
3	[1,33- 1,75)
4	[1,75- 2,17)
5	[2,17- 2,59)
6	[2,59 - 3,01)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم څپرکی

2.1 انحراف یا خوریدل (پراګندګۍ)

تعریف: انحراف په یوه ډاټا کې لومړئ د مرکزي میلان ارقامو محاسبه کول او بیا د ډټا دهر حد څخه د نوموړې مرکزي میلان تفاضل (تغیر یا انحراف) پیدا کوو، چې ددې تغیراتو اوسط ته خپور والې وایي. او یا انحراف د اوسط څخه د تغیر درجې ټاکلو ته وایي چې پوه شو چې ډاټا متراکمه ده او که پاشلي.

اوسط یو ګټور او مهم مقیاس دی اود اړوندو شمیرو دلړۍ د مرکزي تمایل د څرنګوالي په اړه دپام وړ رول لري.

په هغه کې که څه هم وسطي ارزښت په یوازیتوب سره نشي کولای چې د یو فریکونسي د وېشنې بعضي عمده خصوصیات تشریح کړي. ضروري ده چې نور مهم خصوصیات د فریکونسي د وېشنې په وسیله احصایوي مقیاسونه تشخیص او په وضاحت سره صورت ونیسي تر څو دهغه د مشکلاتو د پیښیدو او یا د اړوندي موضوع په باره کې ښه تصمیم ونیول شي.

که څه هم دیو اوسط عمده ځانګړني دادي چې دیوې لړۍ یا سلسلې له ټولو کتنو (مشاهداتو) یاشمیرو څخه په ښه توګه استازیتوب وکړي خود اړوندي سلسلې ټولي شمیري په عمومي ډول د سنجش شوي اوسط په څیر ارزښت نلري. داشمیري په متفاوتو اندازو سره له وسطي ارزښت یا مرکزي ارزښت څخه انحراف کوي، البته دانحراف اوخوریدنې (پراګندګۍ) اندازه او څرنګوالي نظر دویشنې ډول او اړوندي سلسلې ته فرق کوي، دڅوډولونو او سطونو دسنجش سربیره نه شي کولای پرته له زیاتو معلوماتو د خوریدو (پراګندګۍ) د څرنګوالي په اړه قضاوت وکړي.

په دې ډول د انحراف په محاسبه کولو کې لومړئ د ډاټا د مرکزي میلان ارقام محاسبه کوو او بیا د ډټا دهر حد څخه د نوموړې مرکزي میلان تفاضل (تغیر یا انحراف) پیدا کوو، چې ددې تغیراتو اوسط ته خپور والې وایي.

2.2 دمرکزی میلان مقیاسونه(Measures of central tendency)

مرکزی معیارونه یادمرکزی میلان مقیاسونه هغه اندازی دی چی متوسط مقدار یا دمعلوماتو مرکز ته دتمایل نقطه مشخص کوی . چی معمولاً اوفایده من یی اوسط، میانه ، او موډ دی

2.3 حسابی اوسط (Arithmetic Mean)

دا داوسطونوله جملی څخه یو ډیرساده اوسط دی معمولاً یوازی ورته د اوسط اصطلاح کاریږی ، خوپه تحلیلی مسائلو اوڅیړنیزو موضوعاتو کی باید د اشتباه دنه پیښدو لپاره حسابی اوسط وبلل شی

کله چی دارقامو مجمعه دهغوی په شمیر وویشل سی حسابی اوسط لاسته راځی دغه اوسط په احصائوی اوڅیړنیزو بحثونوکی معولاًپه ($\bar{x}$) سره ښودل کیږی په صنف بندی شوی او غیر صنف بندی شوی ارقامو کی اوسط فرق کوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: په غیر صنف بندی شوو ارقامو کی حسابی اوسط:

که چیری مشاهدات صنف بندی شوی نه وی یعنی (Non Grouped data) وی د ارقامو مجمعه دارقامو په شمیر ویشو یعنی: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

پاملرنه: دجمعیت اوسط په μ او دنمونی اوسط په $\bar{x}$ سره ښودل کیږی

یعنی: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

مثال۱ : دیوی کارخانی د کارکوونکو د اولادونو شمیر په لاندی ډول دی اوسط یی پیداکړی

0 0 1 1 1 1 1 2 2 3 4 5 5

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{0+0+1+1+1+1+1+2+2+3+4+5+5}{13} = \frac{26}{13} = 2 \Rightarrow \mu = 2$$

مثال۲: دیوی کارخانی د 80 کار کوونکو څخه د 14 کارکوونکو خطاوی په لاندی ډول دی تاسی یی اوسط پیداکړی

0,01 0,01 0,01 0,02 0,02 0,03 0,05 0,07 0,07 0,07 0,08 0,10 0,15 0,20

$$N=80 \quad , \quad n= 14 \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{14} x_i}{14} = \frac{0,89}{14} = 0,06 \Rightarrow \bar{x} = 0,06$$

ب: په صنف بندی شوو ارقامو کی اوسط (Mean from Group data)

په صنف بندی شوو ارقاموکی د اوسط د معلومولو لپاره دوی طریقی لرو

1) تفصیلی طریقه : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{iFi}}{\sum_{i=1}^{n} Fi}$ یا $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{iFi})}{n}$

پاملرنه: دلته هم دنمونی اوسط په $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{iFi})}{n}$ او دجمعیت اوسط په $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{iFi})}{n}$ سره ښودلی کیږی

مثال۱: د 25 تنو محصلینو دنمرو د توزیع جدول په لاندی ډول دی تاسی یی اوسط پیداکړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

Xi	4	5	7	9	25	مجموعه
Fi	6	7	8	4	25	
XiFi	24	35	56	36	151	

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1(}^{n} x_{iFi)}}{n} = \frac{\sum_{i=1(}^{4} x_{iFi)}}{25} = \frac{24 + 35 + 56 + 36}{25} = \frac{151}{25} = 6{,}04 \approx 6 \Longrightarrow \bar{x} = 6$$

مثال۲ : په لاندی مشاهداتوکی x داسی تعین کړی چی دهغوی اوسط 6 وی [x, 2x-1, 2x, 3x +1,]

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1(}^{4} x_{i)}}{n} \frac{1+ x3+x2+1-x2+x}{4} = 6 \Longrightarrow = \frac{8x}{4}$$

$6 = \frac{8x}{4} \Longrightarrow 2x = 6 \Longrightarrow x = 3$, [3,5,6,10]:نومشاهدات عبارت دی له

مثال۳: په لاندی جدول کی معلومات داسی درکړسویدی چی دهغوی اوسط 1,46 دی تاسی یی ورک شوی دفعات پیداکړی

ترافیکی پیښی	دورځوشمیر
0	46
1	?
2	?
3	25
4	10
5	5
مجموعه	200

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

ترافیکی پیښیXi	دورځوشمیرFi	Fi.xi
0	46	0
1	F1	F1
2	F2	2f2
3	25	75
4	10	40
5	5	25
	86+F1+F2=200	140+F1+2F2

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1(}^{n} x_{iFi)}}{n} = 1{,}46 \Rightarrow 1{,}46 = \frac{140 + F1 + 2F2}{200} \Rightarrow 140 + F1 + 2F2 = 292$$

$$F1 + 2F2 = 152 \ldots\ldots 1 \quad F1 + F2 + 86 = 200 \Rightarrow F1 + F2 = 114 \ldots\ldots .2$$

$F1 + 2F2 = 152 \ldots\ldots 1$

$F1 + F2 = 114 \ldots\ldots .2$ د F2 قیمت په 2رابطه کی وضع کوو

F2=38

$F1 + 38 = 114 \Rightarrow F1 = 114 - 38 = 76$

مثال۴: په لاندی جدول کی ورک شوی رقم پیداکړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکورکرایه	110	112	113	117	m	125	128	130
دکورونوشمیر	25	17	13	15	14	8	6	2

حل کول یی د لوستونکو دنده ده

مثال۵: په یوپنځوس (50) کسیزه ټولګی (10) تنه محصلین ناکام شویدی چی دهغوی دنمرو اوسط (2,5)دی دټولګی دټولو محصلینو نمری 281 دی تاسی دکامیاب محصلینو دنمرو اوسط پیداکړی

25=10(2,5)= دناکام محصلینونمری   281-25=256 =دبریالی محصلینونمری

281 = د50تنو نمری $4{,}6=\frac{256}{40}$ = دبریالی محصلینو دنمرو اوسط

مثال۶: 100 محصلین ازموینی ته حاضر سوی دی او په لاندی جدول کی دناکام محصلینو نمری درکړل شویدی که چیری د 100 محصلینو د نمرو اوسط 68,6 وی تاسی د بریالیو محصلینو دنمرو اوسط پیداکړی

نمری	5	10	15	20	25	30
دمحصلینوشمیر	4	6	8	7	3	2

حل:

	Xi	Fi	xi.Fi
	5	4	20
	10	6	60
	15	8	120
	20	7	140
	25	3	75
	30	2	60

(c) ketabton.com: The Digital Library

475	30	مجموعه	

6860=(68,6)100=د100محصلینونمری   475=دناکامانونمری

6385=6860-475=دبریالیو نمری

70=100-30=دبریالیوشمیر

$$\text{دبریالیو محصلینو د نمرو اوسط } \frac{6385}{70} = 91.2142$$

مثال۷: دلاندی جدول ځخه ورک شوی دفعه پیداکړی که د نوموړو معلوماتو اوسط 15,38 وی

xi	10	12	14	16	18	20
Fi	3	7	F	20	8	5

حل یی د لوستونکو دنده ده

مثال۸:په لاندی جدول کی د 65 تنو محصلینو نمری درکړل شویدی تاسی یی حسابی اوسط پیداکړی

نمری	دزده کوونکودشمیرتراکمی دفعات cf
تر %70زیاتی	7
تر %60زیاتی	18
تر%50زیاتی	40
تر%40زیاتی	40
تر %30زیاتی	63
تر%20 زیاتی	65

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: جدول په لاندې ډول ترتیبوو

نمرې	Fi	دصنفونواوسط$\bar{x}_i$	x_iF_i
20- 30	2	25	50
30 - 40	23	35	805
40 - 50	0	45	0
50 - 60	22	55	1210
60 – 70	11	65	715
70 - 80	7	75	525
	65		3305

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{3305}{65} = 50,8$$

۲ – لنډه طریقه (فرضی اوسط)

که چیرې په یوه جدول کې دصنفونو شمیر زیات وي ، نو دهغه محاسبه کول طولاني وي دکار داسانتیا لپاره د فرضی اوسط څخه کار اخلو

۱ – دیوې طبقې وسطی نقطه مبدا فرضوو

۲- ددې په مقابل کې یعنې د انحراف په ستون کې صفر لیکو

۳- دصفر انحراف څخه پورته نقطه مثبت او کښته منفي لیکو

۴– په پنځم ستون کې دهغه عناصر دفریکونسی او دفرضی اوسط دانحراف دحاصل ضرب څخه لاسته راوړې یعنې $F_i d_i$

۵ – په اخر کې د $\bar{X} = A + \frac{\sum F_i d_i}{\sum Fi} c$ څخه اوسط لاسته راوړو چې A دفرضی اوسط څخه عبارت دی

د اوسط خواص:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اوسط څخه د انحرافاتو مجموعه صفر ده. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$

که په هره مشاهده کې ثابت حقیقی عدد "a" اضافه شی نو نوی اوسط به $\bar{X}$ + a وي.

که د هری مشاهدی څخه ثابت حقیقی عدد "a" کم سی نو نوی اوسط به $\bar{X} - a$ وی

که په هره مشاهد کی ثات حقیقی عدد "a" ضرب سی نوی اوسط به $\bar{X}a$ وی

که هره مشاهده پر ثابت حقیقی عدد "a" و ویشل سی نوی اوسط به $\bar{x}/a$ وی

2.4 هندسي اوسط (Geometric Mean):-

هندسي اوسط دحسابي اوسط په اندازه زيات دکارولوځايونه لري خوبياهم داديوه تحليل اودتحقيق

مقصداوهدف پوري اړه لري ،هندسي اوسط هم نظردمشاهدوډول ته فرق کوي ،يعني داچه اياهرقم

صنفبندي شوي که نه ؟ دلته بههريوبيل وګورو.

الف په غيرصنف بندي شووارقاموکبني هندسي اوسط :-

Geometric Mean from ungrouped data

که چيري په x_1, x_2, x_3...... ډول ارقاموکي چه دشميرنويوه سلسله ده . که موږوغواړوهندسي

اوسط ومومو،نودلته ددغي سلسلي هندسي اوسط دهغوي دضرب دحاصل n ام جذردي . دغه اوسط

پهGM سره ښيو او په لاندی ډول تعريف سوی دی.

$$G.M = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 \ldots \ldots x_n} = [(x_1).(x_2).(x_3) \ldots \ldots (x_n)]^{\frac{1}{n}}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکارداساني په خاطرکولاي شوچه په لاندي ډول يئ وليکو، يعني $G.M = \text{Anti} \log \frac{\sum logx}{n}$

ثبوت :-

$$G.M\ [(x_1).(x_2).(x_3)\ \ldots\ldots\ (x_n)]^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{Log } G.M=\log [(x_1).(x_2).(x_3)\ldots\ldots\ldots(x_n)]^{\frac{1}{n}}$$

$$\log G.M= \frac{logX_1+logX_2+\cdots+logX_n}{n}$$

$$\text{Log}.G.M= \frac{\sum_{i=1}^{n} logx_i}{n} \qquad \Rightarrow G.M = \text{anti} \log \frac{\sum logx_i}{n}$$

X	Log x
50 60 70 80 85 90 95	1.6990 1.7782 1.8451 1.9031 1.9294 1.9542 1.9777
	13.0867

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال :- دلسم ټولګي دمضامينو نمريپه لاندي ډول راکړل شوي دي دهغوي هندسي اوسط په لاس راوړي.

70,80,85,90,95,60,50

G.M = $\sqrt[7]{70,80,85,90,95,60,50} \Rightarrow G.M = 74$

يا$G.M=\text{anti log}\,\frac{\sum logx}{n}$ $G.M = \text{anti log}\,\frac{13.0867}{7} = \text{anti log}\ 1.8695 = 74$

$\Rightarrow G.M = 74$

ب : - په صنف بندي شويوارقاموکي هندسي اوسطGeometric Mean from grouped data

په صنف بندي شووارقاموکي دهندسي اوسط سنجش ډيرساده دي ،داسي چه ددفعاتو شمير هرځلدمربوطه

صنف دوسط په طاقت (توان)ليکل کيږي ،بيانوټول ضرب اودټولودفعاتو(f_i) جذرئياستخراج کيږي،

فرمول يي دادي .$G.M=\sqrt[\sum fi]{x_1^{fi}.x_2^{fi}\ldots\ldots x_n^{fn}}$يا$G.M=\text{anti log}\,\frac{\sum f\,logx}{\sum f}$

ثبوت :- $G.M = [(x_1)^{f1}.(x_2)^{f2}\ldots\ldots(x_n)^{fn}]^{\frac{1}{\sum f_i}}$$G.M=\sqrt[\sum fi]{x_1^{f1}.x_2^{f2}\ldots\ldots x_n^{fn}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{Log G .M} = \frac{\mathbf{1}}{\sum f i} . \mathbf{log}[(x_1)^{f1}.(x_2)^{f2} \ldots\ldots(x_n)^{fn}] = \frac{F_1 log x_1 + F_2 log x_2 + \ldots F_n log x_n}{\sum f_i}$$

$$\text{Log G.M} = \frac{\sum flogx}{\sum f_i} \Rightarrow G.M = anti\,\mathbf{log}\frac{\sum flogx}{\sum f_i}$$

مثال : - دلاندي معلوماتوهندسي اوسط پيداکړي

Marks	Number of .student
0-10	8
10-20	12
20-30	20
30-40	4

Marks	No of student	X	Logx	Flogx
0-10	8	5	0.699	5.5920
10-20	12	15	1.1761	14.1132
20-30	20	25	1.3979	27.9580
30-40	4	35	1.5441	6.1763
	$\sum f_i$=44			53.8395

استاد عبدالاحد ارين

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{\sum flogx}{\sum x}$=anti

1 2.00 0.10 0.2 0.01 100 0.25

G.M=anti log

log$\frac{53.8395}{44}$

= antilog 1.2236⇒G. M = 16.73

2.5 هارمونيکي اوسط (Harmonic mean) :-

دغه ډول اوسط ته ډيرکم ضرورت پيښيږي .استثناء هغوحالاتوکي چه زمان متحول فرض شي اوکيمت

ثابت فرض شي.الف :- (په غيرصنف بندي شووارقاموکي هارمونيکي اوسط)

که چيري د $x_2, x_1 \dots x_n$ ......, معلومات ولرونودهغوي هارمونيکي اوسط دلانديفرمول په واسطه پيداکوو.

مثال :- دلاندي معلوماتو هارمونيکي اوسط پيداکړي . H.M=$\frac{n}{\frac{1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}}$= $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x_i})}$

1 0.5 10 45 175 0.01 4.0

حل:جدول ترتيبوو

x	1 0.5 10 45 175 0.01 4.0	
$\frac{1}{x}$	1 2.00 0.10 0.2 0.01 100 0.25	103.56

$$H.M=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x}} = \frac{7}{103.56} = \mathbf{0.07} \Rightarrow H.M= 0.07$$

ب (په صنف بندي شووارقاموکي هارمونيک اوسط):-

که چيري معلوما ت تصنيف شوي وي نودلاندي فرمول څخه استفاده کوو.

استاد عبدالاحد ارين

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$H.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} f}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{f}{x})}$$

مثال : - دلاندي معلوماتوڅخه هارمونيکي اوسط په لاس راوړي.

X	F	f/x	
0.01	1	100	
0.5	6	12	
1	12	12	
4	16	4	
10	20	2	
45	9	0.2	
175	5	0.03	
	69	130.23	

حل :-

$$H.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} f}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{f}{x})} = \frac{69}{130.23} = 0.53 \Rightarrow \quad \boldsymbol{H.M = 0.53}$$

نوټ :- يوبل اوسط چه دمربعي اوسط په نامه سره ياديږي . داهم ډيرکم کارولکيږي. مربعي اوسط د ساده حسابي اوسط دمربع جذرڅخه عبارت دي . يعني

$$\bar{x}^2 = \frac{\sum x^2}{n}$$

2.6

(c) ketabton.com: The Digital Library

دحسابي ، هندسي ، اوهارمونيک اوسط ارتباط :-

دنوموړواوسطونوترمينځ لاندي رابطي وجودلري .

$$H.M \leq G.M \leq A.M$$

$$(G.M)^2 = (A.M)(H.M)$$

(1) قضيه : که $a > 0$ ، $b > 0$ وي

الف : که $a = b$ وي پس لروچه $\sqrt{a.b} = \frac{a+b}{2}$ دي.

ب : که $a \neq b$ وي پس لرو چه $\sqrt{a.b} < \frac{a+b}{2}$ دي .

$\frac{a+b}{2}$ ته حسابي اوسط (ياحسابي وسط) او $\sqrt{a.b}$ ته هندسي اوسط (ياهندسي وسط)وايي .

ثبوت : څرنګه چه$a > 0$ او $b > 0$ دي نو $\sqrt{a} > 0$ او $\sqrt{b} > 0$ هم صدق کوي .

اوس پورتني دوه غيرمساواتونه خواپه خوا تفريقووکوو يعني .

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$$

څرنګه چه دپورتني غيرمساوات کينه خوايومثبت عدد دي نواطراف مربع کوو.اوديوسلسله لازموعمليا

توڅخه وروسته دقضيي (الف) او (ب) برخي حاصليږيعني .

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a - 2\,\sqrt{a}.\sqrt{b} + b > 0$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0 \quad = a + b > 2\sqrt{ab}$$

اخرمساوات=$\frac{a+b}{2} > 2\,\frac{\sqrt{ab}}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

1 مثال :- د [2،50] ددوعدددونوترمينځ حسابي اوسط، هندسي اوسط محاسبه کړي اوبيايي سره پرتله

کړي وروسته د[2،50] ددوعددونواوهندسي اوسط له مخييوتناسب تشکيل کړي .

حل : $26 = \frac{52}{2} = \frac{50+2}{2} =$ حسابي اوسط د [2،50]

$10 = \sqrt{100} = \sqrt{50.2} =$ هندسي اوسط د[2،50]

ليدل کيږي چه $10 < 26$ دي بنا پردي ليکوچي: $\sqrt{50.2} < \frac{50+2}{2}$

اوس د 50، 2 ،او 10 ترمينځ لاندي تناسب تشکيلوو:

$10.10 = 2.50$ $100 = 100 \Rightarrow$ ځکه چي $\frac{50}{10} = \frac{10}{2}$ يا $\frac{10}{50} = \frac{2}{10}$

2 مثال :- د [2،2] عددونوترمينځ حسابي اوسط ، هندسي اوسط محاسبه کړي اوبيا يي سره پرتله کړي .

اووروسته د 2 ، 2 اوهندسي له مخيي تناسب تشکيل کړي .

حل :-

(c) ketabton.com: The Digital Library

حسابي اوسط= $\frac{2+2}{2} = \frac{4}{2}$=2

هندسی اوسط = $\sqrt{4} = 2$ = $\sqrt{2.2}$ =2

$$\Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{2}{2} = 2.2 = 2.2 \Rightarrow 4 = 4$$

2) **قضیه** :- که [a_1،a_2،a_3، ... ... ،a_n] مثبت عددونه او n طبعي عدد($1 \neq$ n) وي پس لرو چي .

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots a_n}$$

ددي قضيي دثبوت څخه صرف نظركوواويوازي څوتوضيحي مثالونه حل كوو.

3) مثال :- د [4 ، 2 ، 1] دري عددونوترمينځ حسابي اوهندسي اوسطونه محاسبه کړي اووروسته د

[4 ، 2 ، 1] اوهندسي اوسط له مخييوتناسب هم تشکيل کړي .

[1 ، 2 ، 4]حسابي اوسط د= $\frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2,5$

[1 ، 2 ، 4] هندسي اوسط د= $\sqrt[3]{1.2.4} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \Rightarrow 2,5 > 2$ دلته وينوچه

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{2} = \frac{2}{4}$$

(دوسطينوحاصل ضرب) 1.2.4 = 2.2.2 (دطرفينوحاصل ضرب)

استاد عبدالاحد ارين

(c) ketabton.com: The Digital Library

8 = 8

4) مثال:- د[32 ، 4 ، 2 ، 1] څلوروعددونوترمينځ حسا بي او هندسي اوسطونه محاسبه کړي اوبيا يي

سره پرتله کړي وروسته د [32 ، 4 ، 2 ، 1] عددونواوهندسي اوسط له مخييوتناسب تشکيل کړي .

$$\bar{x} = \frac{1+2+4+32}{4} = \frac{39}{4} = 9,75$$ (حسابي اوسط)

$$Gm = \sqrt[4]{1.2.4.32} = \sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{(4)^4} = 4$$ (هندسي اوسط)

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{2} = \frac{4}{4} = \frac{4}{32}$$

(دوسطينوحاصل ضرب) 1.2.4.23 = 4.4.4.4 (دطرفينوحاصل ضرب)256 = 256

5) مثال :- د[1000، 10 ، 5 ، 2 ، 1] پنځه عددونوترمينځ حسابي اوسط اوهندسي اوسطونه محاسبه

کړي اوبيايي سره پرتله کړي.حل :-

مثال :- په لاندي معلوماتوکي $H.M < G.M < A.M$ رابطه ثبوت کړي .

حل:

Marks	No student	X	Log x	F logx	F/x	F_x
0-10	8	5	0.699	0.5920	1.6	40
10-20	12	15	1.1761	14.1132	0.8	180
20-30	20	25	1.3979	27.958	0.8	500
30-40	4	35	1.5441	6.1763	0.11	140
	44			53.8395	3.13	860

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_x}{\sum_{i=1}^{n} f} = \frac{860}{44} = 19.55$$

$$G.M = \text{anti}\log\frac{53.8395}{44} \Rightarrow G.M = anti\log 1.2236 = 16.73$$

G.M = 16.73

$$H.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} f}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x})} = \frac{44}{3.31} = 13.3 \Rightarrow A.M = 19.55 > G.M = 16.73 > H.M = 13.3$$

مثال:- ددوه مشاهدوحسابي اوسط 127.5 اوهندسي اوسط يئ 60 دي پس هارمونيک اوسط يئ پيداکړي.

حل :- $G^2 = AxH = (60)^2$ H.M = H 28.24 $= (127.5)$ X (H)$\frac{G^2}{A} = \frac{3600}{127.5} =$

$$\Rightarrow H.M = 28.24$$

2.6 (average of position) دموقعيت له پلوه اوسط

رياضيکي اوسط په تولوموارډوکښي داستفادي وړنه دي خصوصاً په هغه حالت کيچه يوعددمنفي،

صفر،اويوعددبي درکه (miss) شوي وي .مثلاًکه دشاګردانود7 کسيزه ګروپ څخه دسوي امتحان

واخلواولاندي نمري واخلي.,3 ,1,0- =X 204 ,7 ,6,

نوپدي صورت کښي6,5=A.M دي اود(1-)او(0) له وجه څخه هندسي اوسط (G.M) اوهارمونيک

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوسط (H.M) نشومحاسبه کولاي .پس دلتهيوبل اوسط چه عبارت دي له مياني، موږ اوداسي نوروڅخه ځخه

مطالعه کوو.

2.8 میانه(Median)

داهم دفريکوينسي په ويش کي دارقامو دمرکزيت دپيداکولو يوه بله طريقه ده ميانه دحسابي اوسط په شان کوم الجبري تعريف نلري او ديولړ ارقامويا عددونو دمنځني حدپيداکول دي يعني ميانه هغه رقم يا نقطه ده چي نيم ارقام يې پورته خواته او نيم ارقام يې ښکته خواته قرارلري

د دې لپاره چې د n ډیټا ارزښتونو سیټ مینځنۍ (میانه))وموموء موږ باید لومړی راکول سوی معلومات په ترتیب سره تنظیم کړو.چی دلته میانه د n په تاق او جفت پوری اړه لری او په لاندی فورمول سره اندازه کیږی.

$$\text{median} = \begin{cases} X_{(0.5(n+1))} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{1}{2}\left(X_{(0.5n)} + X_{(0.5n+1)}\right) & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

مثال:لاندې ارزښتونه په روغتون کې د بستر شوي ناروغانو د وینې فشار دي:

117.5 123.8122.4 122.3 115.8 159.6 110.9 108.2 109.5 115.9 138.6 112.1

د وینی د فشار داوسط ارمقدار موندلو لپاره، موږ باید لومړی دوی په صعودی ډول ترتیب کړو

108.2 109.5 110.9 112.1 115.8 115.9 117.5 122.3 122.4 123.8 138.6 159.6.

دلته مشاهدات جفت جفت دی یعنی د n شمیر فت دی نو.

$$\text{Me}=\frac{1}{2}\left(X_{(6)}+X_{(7)}\right)=\frac{1}{2}(115.9+117.5)=116.7.$$

د پورته ملوماتو اوسط په لاندی ډول دی.

$$\bar{x}=\frac{1}{12}(108.2+109.5=110.9+\ldots+159.6)=\frac{1456.6}{12}=121.38$$

پورته اوسط چی د میانی ځخه لوی دی . د 159.6 ارزښت تر اغیزی لاندی راغلی دی . منځنی (میانه)د اوسط په پرتله خورا پیاوړی ده او دلوړ ارزښت لرونکی ډاټا تر اغیزی لاندی نه راځی .

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال :د فوټبال یوې لوبډلې په تېرو ۴۴ لوبو کې لاندې شمېر ګولونه کړي دي

Number of goals	0	1	2	3	4
Frequency	9	8	15	9	3

لکه څنګه چې n = 44، میانه به د 22 او 23 مشاهدو تر منځ نیمه لاره کی پروت وي. څکه چې دواړه $x_{(22)}$ او $x_{(23)}$ 2 دي، منځنی ارزښت 2 دی.

د ډله ایزو(ګروپ سوی ،راټول سوی ملوماتو) معلوماتو لپاره، د منځني(میانی) اټکل کولو ترټولو اسانه لار د ګرافیکي میتودونو څخه ده.

د میانی زیانونه:

د منځنی کارول دوه اصلي زیانونه لري.

په صنف بندی (grouped data) سوی ارقامو کی میانه:

په صنف بندی سوو ارقامو (ډاټا) کی میانه د لاندی فورمول په مرسته په لاس راځی

$$Me = L + \left(\frac{N/2 - f_0}{f_1} \right) \times h$$

L د منځنی (میانی) د کلاس ټیټ حد

N د ټولی تراکمی فریکونسی شمیر

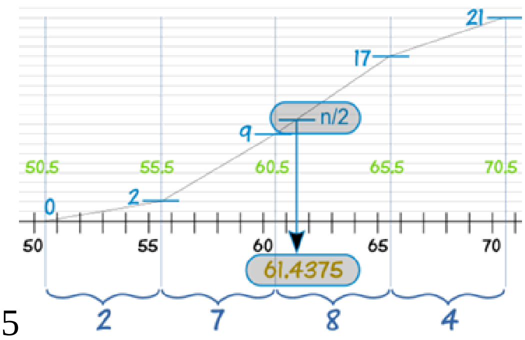
f_0 د میانی د کلاس څخه د مخکنی کلاس تراکمی فریکونسی

f_1 د میانی د طبقې فریکونسی

h = د صنفونو انتروال

مثال:

(c) ketabton.com: The Digital Library



- **L** = 60.5
- **N** = 21
- $\mathbf{f_0} = 2 + 7 = 9$
- $\mathbf{f_1} = 8$
- **h** = 5

$$Me = L + \left(\frac{N/2 - f_0}{f_1} \right) \times h$$

$$Me = 60.5 + \left(\frac{\frac{21}{2} - 9}{8} \right) \times 5 = = 60.5 + 0.9375$$

$$= 61.4375$$

1 بېلګه: د لسم ټولګي د 50 هلکانو د لوړوالي په اړه يوه سروې په يوه ښوونځي کي ترسره شوی او لاندي معلومات ترلاسه شویدی. میانه یی پیدا کړی

Height (in cm)	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	Total
Number of boys	2	8	12	20	8	50

حل : د دی لپاره چی میانه پیداکړو موږ تراکمی فریکونسی ته اړتیا لرو ،او دپیداکولو لپاره یی لاندی جدول ترتیبوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

Class Intervals	**No. of boys (f_i)**	**Cumulative frequency (c)**
120-130	**2**	**2**
130-140	**8**	**2 + 8 = 10**
140-150	**12**	**10 + 12 = 22**
150-160	**20**	**22 + 20 = 42**
160-170	**8**	**42 + 8 = 50**

Median class 150-160

$$f_1 = 20, \ \ f_0 = 22$$

$$, \qquad Me = L + \left(\frac{N/2 - f_0}{f_1} \right) \times h \, N = 50, \quad L = 150, \quad h = 10$$

$$Me = 150 + \left(\frac{50/2 - 22}{20} \right) \times 10 = 150 + 1.5 = 151.5$$

2.9 مود (Mode)

مود دیو لړارقاموهغه نقطه ده چې تر ټولو لوړه او زیاته فریکوینسي ولري.

دمثال په توګه:11,11,12,12,13,13,13,13,14,15,15,16,16,13

دارقامو مود13 دی څکه چې فریکوینسي یې 5 ده که چیرې دارقاموفریکوینسي سره مساوي وي نو مود محاسبه کیدلاي شي .

دمثال په ډول:20, 25,2,7,16,19مود نلري

2,2,2,7,7,7,6,6,6,19,19,19

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارقام مود نلري ځکه چې ټول اعدادیوشان فریکوینسي لري ددې امکان شته دی چې یو لړ ارقام یومود،دوه موده اویا څوموده ولري .دمثال په توګه دا ارقام ولرو.

د مثال: په ډول دا ارقام لرو11,11,12,12,12,13,13,13,14,14,14,14,5

په دې حالت کې مود دهغو دوه همجوارو قیمتونو حسابي اوسط دی چې یو شان فریکوینسي ولري او قیمت یې زیات دی یعني 13 او 14 یو شان فریکوینسي لري او فریکوینسي یې ترنورو لوړه ده هر یو یې مود دی یعني پورتني ارقام دوه موده دی

Mod= {13, 14}

مثال :د5,6,7,1,6,8,5,6,6 ارقامو مود 6 دی یعني Mod= 6

مثال:لاندی ارقامو مودپیدا کړی؟

A= {5, 5, 5, 5,}

B= {10, 20, 30, 40}

C= {19, 20, 19, 25}حل

Mode (A) =5

Mode (B) تعریف شوی نه دی

Mode (C) =19

2 بیلګه : دلاندی ارقامو مود پیدا کړی

A= {21, 22, 29, 35, 21, 21}

B= {2, 5, 1, 1/2, 1,1/2, 2, 0, 5, 1/2}   C= {100, 95, 100, 95, 85, 90}

(c) ketabton.com: The Digital Library

دارقامو مودونه په لاندې ډول دي .

Mode (A) =21

Mode (B) = ½

Mode (c) = {100, 95}

لیدل کیږي چې دC سیټ دوه موده دی که هغه مرتب کړو لیکو چې .

C={80,85,90,95,95100,100}

$$Mode(c) = \frac{95+100}{2} = \frac{195}{2} = 97.5$$

که یو سیټ دوه موده وي نو دمحساباتو له پاره بیا له پورتني میتود څخه کار اخلو که ارقام تصنیف شوي وی نو د مود محاسبه ددې فورمول په مرسته په لاس راځی .

$$Mode = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)$$

چې دلته L دفریکوینسي دهغه صنف لاندیني سرحد دی چې مودپکې قرارلري Δ_1دمود دصنف فریکوینسي فرق دمخکني همسایه سره .

Δ_2 دمود دصنف دفریکوینسي فرق دوروستني (وروستي) همسایه سره .

C دمود دصنف صنفي عرض دی .

مثال :که (4-10) جدول په پام کې ونیسو نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L_1 = 144.5 \qquad \Delta_1 = 12 - 9 = \Delta_2 = 12 - 5 = 7.c = 9$$

$$Mod = 144.5 + \frac{3}{3+7}9$$

$$Mod = 144.5 + \frac{27}{10} = 144.5 + 2.7 = 147.2$$

که دمود دپاسني سرحد څخه کار واخلو نودمود پیداکولو لپاره له دې فورمول څخه کار اخلو

$$Mod = l_2 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}.c$$

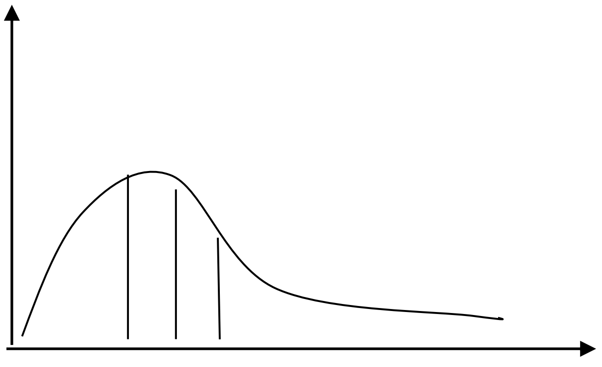
$$Mod = 153.5 - \left(\frac{7}{3+7}\right).9 = 153.5 - \frac{7}{9}.9$$

$$Mod = 153.5 - \frac{63}{10} = 153.50.6.3$$

$$Mod = 147.2$$

په منحني کي داوسط ، میانه اومود مقایسه :-

1 – که چیري دارقامو دسیټ ددفعاتو درسم شوي منحني لمن ښي طرف ته پراختیاولري نو میانه به له ریاضیکي اوسط څخه کوچني وي

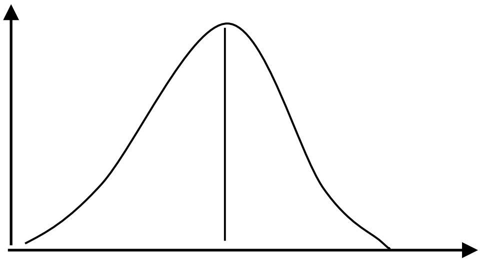


Mo < Me < Mean

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 – که چیري دارقامو دویش منحني متناظر(Symmetric) وی یعني دواړوخواووته یوبرابروي نوپه

دي صورت کیاوسط اومیانه یوپربل منطبق دي .لکه



$\overline{x}$=Mo=Me

3 – که چیري دارقامووددفعاتودګراف کوږوالي (انحراف Skewed) چپ طرف ته وي نواوسط به یي کیڼي

خواته اوتر میاني کوچني وي .

داوسط ، میاني اومود ترمنځ اړیکه :

1 – که چیري توضیع متناظر وي نواوسط ، میانه اومود یوله بل سره مساوي دي.

mean = median = mode

2- که چیري توذیع متناظرنه وي نودلاندي فرمولونوڅخه استفاده کیږي .

Mode =maen – 3(mean-median)

= 3median- 2 mean

یاMean- mode = 3(mean- median)

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

Mode = 3median- 2mean

مثال :- دلاندي معلوماتوڅخه مود پيداکړي .همدارنګه يي داوسط اوميانې سره رابطه پيداکړي .

Class	13-17	18-22	23-27	28-32	33-37	38-42
Fi	1	1	2	3	2	1

2.9 پراختيا (وسعت)Range

دخوريدو (پراګندګی) ډير ساده مقياس دی د اړوندي سلسلي د کوچني او لوي عدد تر منځ له توپير څخه عبارت دی، اويا د اعدادو په يوه لړۍ کې دلوړي نمري او ټيټي نمري ترمنځ له تفاضل يعني ښه والي څخه عبارت دی، چې په سمبوليکه بڼه پدې ډول ښودل کېږي.

$$R = X_{max} - X_{min}$$

په دې رابطه کې R پراختيا (وسعت)، X_{max} لوړه نمره او X_{min} ټيټه نمره ښيي.

که چېري د يوې ازمويني نمري د دفعاتو د وېشنې په بڼه راپور ورکړل شوي وي. په دې صورت کې د نمرو پراختيا (وسعت) د ټيټي او لوړي وېشنې ترمنځ له ښه والي (تفاضل) څخه عبارت دی. پراختيا (وسعت) لکه نوري اندازي د واټن خورېدل ښيي.

پراخوالي يا وسعت په لاندي شميرو کې 2,3,5,7,11,29,35 عبارت دی له:

$$35 - 2 = 33$$

مثال: د 10 شاګردانو د نورو ريکارډ په لاندي ډول دي فاصله يې پيداکړئ؟

30, 20, 23, 44, 60, 75, 90, 40, 50, 51

$X_{max} = 90$ $\qquad$ $Range = X_{max} - X_{min}$

$X_{min} = 20$ $\qquad$ $Range = 90 - 20 = 70$

په فاصله کې د انحراف ضريب

په فاصله کې د انحراف ضريب دلاندې فورمول پواسطه پيدا کولای شو:

$$C.R = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} \Rightarrow CR = \frac{R}{X_{max} + X_{min}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2,4,8,10,16,20,6

$$C.R=\frac{X_{max}-X_{min}}{X_{max}+X_{min}}=\frac{20-2}{20+2}=\frac{18}{22}=\frac{9}{11}=0.082$$

په تصنیف شوو ارقامو کې پراخوالي یا وسعت د کوچني ټولګي د ښکتني حد ترمنځ او د لوي ټولګي د پورتني حد تر منځ له توپیر څخه عبارت دئ.

دمثال په ډول: د 142 کورنیو د کلني عاید پراختیا په 1385 کال کې نظر جدول ته له

$69.99-66.0=3.99$ څخه عبارت دی یعني 3.99 افغاني دې.

دپراخوالي (وسعت) د سنجش پیرودل (اخیستل) په یوه سلسله اړوندو شمیرو کې دهغه په ساده والي پوري تړلي دي په ځینو ځایونو کې په خاصه توګه اعظمي او اصغري حد، قیمتونو تحول په مارکېټ کې یا د اوربښت د حرارت درجه، د تولید د کېفیت یا جنسیت کنټرول، یا حتا داوسط په اټکل یا تخمین کې په کاریږي.

په غیر متمادي ډآتا کې د فاصلې محاسبه:

په غیر متمادي ډآتا کې د فاصلې د محاسبې په وخت کې د دفعاتو د ستون څخه صرف نظر کېږي. یعنې د فاصلې محاسبه یوازي د ارقامو په ستون کې اجراکیږي.

مثال: د لاندي ډیټا څخه فاصله او د فاصلې ضریب محاسبه کړئ؟

x_i	43	64	78	96	100	150	230	240	261
f_i	100	105	91	82	61	31	70	88	67

$$Range=X_{max}-X_{min}$$

$$R=261-43=218$$

$$C.R=\frac{X_{max}-X_{min}}{X_{max}+X_{min}}=\frac{261-43}{261+43}=\frac{218}{304}=0.7171$$

په متمادي ډآتا کې د فاصلې محاسبه:

مثال: د لاندي ډیټا څخه فاصله او د فاصلې ضریب محاسبه کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

Marks	No of students
10 – 20	8
20 – 30	10
30 – 40	12
40 – 50	8
50 – 60	4

$$C.R = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} = \frac{60-10}{60+10} = \frac{50}{70} = 0.714$$

د پراختیا (وسعت) ښېګڼې:

1. دا طریقه ډیره اسانه ده.
2. دا فقط د مشاهدو دوو عددونو ته ضرورت لري.

باید وویل شي چې دا په هغو حالاتو کې چې د ټولو مشاهدو د پیل او پای اعداد مهم و برېښي ښه کار ورکوي لکه: د تودوخي د درجې فرق، په مارکیټ کې د بَیو د اعظمي حد بدلونونه، دیوې کروندې ډیر لوړ او کم حاصل ترمنځ فرق، د اوربښت د لوړې او ټیټې اندازې فاصله، د زده کوونکو د ذکاوت او نمرو ترمنځ تو پیر او نور مثالونه.

د پراختیا (وسعت) نیمګړتیاوې:

پراختیا (وسعت) نظر لاندي څو دلیلونوته لږ د استعمال وړدي.

1. دپراختیا (وسعت) برخه په دوه اعظمي او اصغري ارزښت پوري اړونديږي، چې د اعدادو خورتیا په توګه نشي توضیح کولای .
2. په منځنۍ ډول د هرې مشاهدې تر منځ تفاوت او انحراف نشي ښودلای.
3. د پراختیا (وسعت) ارزښت په زیاتره اعدادو یا په غیر عادي ارزښتونو کې شدیداً متاثیره کېږي.

لکه په دوو لاندي لړیو کې:

3	5	6	7	10	12	15	18
3	8	8	8	9	9	9	18

$$Range_1 = 18 - 3 = 15$$

$$Range_2 = 18 - 3 = 15$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $18 - 3 = 15$ پراختیا (وسعت) ځرنګه چې لړی یي له ځانه لري د بیلا بیلو خوریدو لرونکي ده.

د پراختیا (وسعت) ارزښت نظر دنموني اندازې ته له حده وتلي (فاحش) بدلون پیداکوي.

په پورته یادوشوو دوو لړیو کې که چېرې دوه وروستي یا انتهایي عددونه حذف کړو.

5	6	7	10	12	15
8	8	8	9	9	9

$$Range_1 = 15 - 5 = 10$$

$$Range_2 = 9 - 8 = 1$$

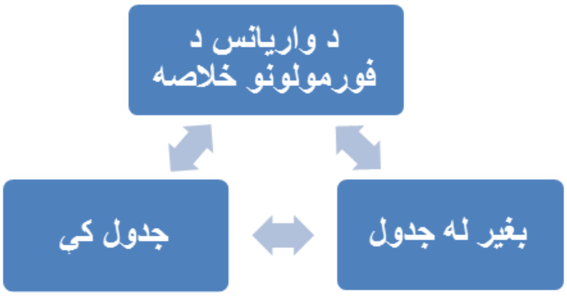
پراختیا (وسعت) په لومړی لړی کې $15 - 5 = 10$ او په ودیمه لړی کې $9 - 8 = 1$ دې.

2.10 پراګندګی (خوریدل) (dispersion)

واریانس (Variance)

دا اصطلاح په 1918م کال کی د (R.A. Fisher) په واسطه معرفی شوه.واریانس هم د انحراف یو مهم مقیاس دی.

واریانس په لغت کې خپوروالی ته وایي . چې ریاضیکی تعریف په لاندی ډول دی .



بغیر له جدوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

1 . نمونه

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum x_i^2)}{n}}{n-1}$$

2.جميعت

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum x_i^2)}{n}}{N}$$

جدول کې

1. نمونه

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \ Fi - \frac{(\sum x_i^2)}{n}}{n-1}$$

2.جمعيت.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \ Fi - \frac{(\sum x_i^2)}{N}}{N}$$

د پورته فورمولو څخه يوثبوتوو او يايی زړه ته رانيژدی لوستونکوته د ښي زدکړی په موخه پريږدو.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu^2)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i + \mu^2 - 2x \ .\mu)}{N}$$

$$= \frac{\sum X_i{}^2 + \mu^2 \sum 1 - 2\mu \sum X_i}{N} = \frac{\sum X_i{}^2 + N\mu^2 - 2(\frac{\sum X_i}{N}).\sum X_i}{N}$$

$$= \frac{\sum \mathrm{X_i}{}^2 + N\frac{(\sum x_i{}^2)}{N^2} - \frac{2(\sum X_i{}^2)}{N}}{\mathrm{N}} = \frac{\sum \mathrm{X_i}{}^2 + \frac{(\sum \mathrm{X_i}{}^2)}{\mathrm{N}} - \frac{(\sum \mathrm{X_i}{}^2)}{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} = \frac{\sum \mathrm{x_i}{}^2 + \frac{-(\sum \mathrm{X_i}{}^2)}{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum \mathrm{X_i}{}^2 - \frac{(\sum \mathrm{X_i}{}^2)}{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}$$

لومړی مثال: په ۱۳۷۹ کال کې ۱۵ کتابتونونوپه لاندې ډول کتابونه چاپ کړي د هغوی واريانس محاسبه کړئ.

1 2 2 3 4 4 5 6 8 9 9 10 10 10 11

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

X_i	1 2 2 3 4 5 6 8 9 9 10 10 10 11	94
${X_i}^2$	1 4 4 9 16 25 36 64 81 81 100 100 100 121	758

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} {x_i}^2 - \frac{(\sum {X_i}^2)}{15}}{15} = \frac{758 - \frac{(94)^2}{15}}{15} = 11.27$$

$$\mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_i}{N} \Rightarrow \mu = \frac{94}{15} = 6.27$$

دوهمه طریقه:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{N} = \frac{(1-6.27)^2+18.23+\cdots+22.37}{15} = 11.26 \quad \sigma^2 = 11.26$$

دویم مثال: په هلمند ولایت کې دیوې کارخانې د ۸۰ کارکوونکو څخه د ۱۴ تنو خطاوې په لاندې ډول دی، واریانس یې پیداکړ

0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.05
0.07	0.07	0.07	0.08	0.10	0.15	0.20

حل:

N=80 , n=14

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n}}{N-1} = \frac{0.0981 - \frac{(0.89)^2}{14}}{14-1} = 0.003 \qquad s^2 = 0.003$$

دریم مثال: که چیری د ۳۰ ګروپونوشرح په لاندې ډول وی، واریانس یی پیداکړ.

I	X_i	f_i
1	0	5
2	1	7
3	2	11
4	3	4
5	4	2
6	5	1
		30

حل:

I	X_i	f_i	${X_i}^2$	$X_i f_i$	$f_i {X_i}^2$
1	0	5	0	0	0
2	1	7	1	7	7
3	2	11	4	22	44
4	3	4	9	12	36
5	4	2	16	8	32
6	5	1	25	5	25
		30		54	144

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} {X_i}^2 f_i - \frac{(\sum X_i f_i)^2}{30}}{30} = \frac{144 - \frac{(54)^2}{30}}{30} \; 1.56 \quad \sigma^2 = 1.56$$

د واریانس ضریب

د واریانس ضریب چي په C.V شکل سره ښودل کیږي عبارت دی له:

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}} \times 100$$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال : يوه کارخانه د موټرو دوه ډوله ټايرونه توليدوي. د A ډول لپاره اوسط عمر 10000 کيلومتره او دانحراف معيار يې 2000 کيلومتره او د B ډول ټاير لپاره متوسط عمر 11000 کيلومتره او معياري انحراف يې 1000 کيلومتره دی. کوم ټاير بهتر دی؟

$$A = \quad C.V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} \times 100 = \frac{2000}{10000} \times 100 = 20\%$$

$$B = \quad C.V_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} \times 100 = \frac{1000}{110000} \times 100 = 9\%$$

د B نوعه ټاير بهتر دی، ځکه هم د هغې اوسط عمر ډير دي او هم د هغې د تغير ضريب کوچنی دی.

2.11 وسطي انحراف

وسطي انحراف يا انحراف نظر اوسط ته څرنګه چې له نامه څخه يې څرګندېږي، ديوي لړۍ دانحراف له حسابي اوسط يا ديوي سلسلې شميرو له مطلقه توپير نظر يوه وسطي عدد ته لکه حسابي اوسط يا له ميديان څخه عبارت دی.

که څه هم په عمل کې حسابي اوسط زياتره د يو وسطي ارزښت په توګه په کار اچول کېږي خو دتيوري له پلوه د اعدادو دانحراف مجموع نظر ميديان ته لږه اندازه ده، (البته مطلقه توپير) ښه ده چې په سنجش کې انحراف استعمال شي. په هر حال هغه ډول اوسط چې دوسطي انحراف په سنجش کې په کار اچول کېږي بايد څرګند شي.

وسطي انحراف په تصنيف شوو اعدادو کې چې $\bar{X}$ وسطي ارزښت وي د لاندي فورمول په مرسته ويشل کېږي.

$$MD = \frac{\sum|X-\bar{X}|}{n} = \frac{\sum|X|}{n} = \frac{\sum|d|}{n} \cdots (2)$$

پدې ځای کې: MD وسطي انحراف، X ديوي لړۍ يا سلسلې شميري يا اعداد، $\bar{X}$ حسابي اوسط، n داعدادو يا کتنو (مشاهداتو)اندازه او d يا $X_1 - \bar{X} = X$

عمودي کرښي (خطوط) مطلقه ارزښت (پرته له اشاري څخه) افاده کوي.

مثال: د2,3,6,8,11 اعدادو وسطي انحراف پيداکړئ.

لومړی: بايد د شميرو حسابي اوسط سنجش شي :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{2+3+6+8+11}{6} = 6$$

ورسته داعدادو مطلقه انحراف نظر اوسط ته محاسبه کوو.

$$MD = \frac{|2-6|+|3-6|+|6-6|+|11-6|+|8-6|}{5} = 2.8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعني ورکړل شوي اعداد د 2.8 په اندازه له حسابي اوسط څخه انحراف لري، وسطي انحراف کولای شونظر مديان ته هم سنجش کړو يعني.

$$AD = \frac{\sum|X - Med|}{n} \cdots (3)$$

مثلاً:په پورته اعدادو کې مديان 6 دي څرنګه چي $x = Med$ په دي مثال کي دواړه ډوله وسطي ارزښت مساوي دي .

مثالونه که ډاتا صنف بندي شوې نه وې:

مثال: لاندي د ازمويني نمرو لپاره وسطي انحراف او مياني څخه محاسبه کړئ او همدارنګه د وسطي انحراف ضريب محاسبه کړئ؟

32, 36, 37, 39, 36, 41, 48, 36

حل:موږ لومړئ ورکړل شوې نمرې په صعودې ډول ترتيبو او مېانه يې پيدا کوو.

32, 36, 36, 37, 39, 41, 45, 46, 48

$$Med = \frac{9+1}{2} = 5^{th} term$$

$$Med = 39\ Marks$$

$$\bar{X} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{32 + 36 + 36 + 37 + 39 + 41 + 45 + 46 + 48}{9}$$

$$= \frac{360}{9} = 40$$

Xi	$xi - \bar{x}$	$\|xi - \bar{x}\|$	$\|xi - Med\|$
32	-8	8	7
36	-4	4	3
36	-4	4	3
37	-3	3	2
39	-1	1	0
41	1	1	2
45	5	5	6
46	6	6	7
48	8	8	9
$\sum = 360$	0	40	39

استاد عبدالاحد ارين

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$MD = \frac{\sum|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{40}{9} = 4.4\,Marks$$

$$MD = \frac{\sum|xi - Med|}{n} = \frac{39}{9} = 4.3\,Marks$$

$$CMD = \frac{MD}{\bar{x}} = \frac{4.4}{40} = 0.11$$

$$CMD = \frac{MD}{Med} = \frac{4.3}{39} = 0.11$$

مثال: په لاندې ډول د 10 شاګردانو د احصائیې نومرې راکړل شویدي وسطي انحراف يې پيداکړئ؟

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{10+20+30+40+50+60+70+80+90+100}{10} = \frac{550}{10} = 55$$

$$MD = \frac{\sum|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{45+35+25+15+5+5+15+25+35+45}{10} = 25$$

2.12 په غیر صنف بندی سوی داتا کی وسطی انحراف:

مثال: د کرنيز اقتصاد ديپارتمنت 90 شاګردانو %15 نومرو صنفي ټيسټ نتيجه په لاندې ډول راکړې شوېده، وسطي انحراف يې له حسابي اوسط څخه په لاس راوړئ؟

x	fi	xi	$fi.xi$	$\lvert xi - \bar{x}\rvert$	$fi\lvert xi - \bar{x}\rvert$
1 – 3	10	2	20	6	60
4 – 6	20	5	100	3	60
7 – 9	30	8	240	0	0
10 – 12	20	11	220	3	60
13 - 15	10	14	140	6	60
	$\sum fi = 90$	-----	$\sum fi.xi = 720$	-----	$\sum fi\lvert xi - \bar{x}\rvert = 240$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{n} = \frac{720}{90} = 8$$

$$\bar{X} = \frac{\sum fi|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{240}{90} = 2.6$$

مثال: ديوې علمي څېړنې لپاره د بېلا بېلو بوټو د 100 ټوټو اندازه په لاندې جدول کې ورکړل شوې ده، وسطي انحراف يې وسنجوئ؟

X	fi	xi	$fi.xi$	$\|xi - \bar{x}\|$	$fi\|xi - \bar{x}\|$
40 – 59.9	1	45	45	36.6	36.6
50 – 59.9	5	55	275	26.6	133.0
60 – 59.9	11	65	715	16.6	182.6
70 – 79.9	26	75	1950	6.6	171.6
80 – 89.9	33	85	2805	3.4	112.2
90 – 99.9	16	95	1520	13.4	214.4
100 – 109.9	7	105	735	24.4	163.8
110 – 119.9	1	115	115	33.4	33.4
	$\sum fi = 100$	-----	$\sum fi.xi = 8160$	-----	$\sum fi\|xi - \bar{x}\| = 1047.6$

$$\bar{x} = \frac{\sum fixi}{n} = \frac{8160}{100} = 81.6$$

$$\text{MD} = \frac{\sum fi|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{1047.6}{100} = 10.476$$

همدارنګه وسطي انحراف په تصنيف شوواعدادوکي کولای شود لاندينيوفورمولونوله جملي څخه ديو فورمول په مرسته سنجش کړو.

$$MD = \frac{\sum f|X-\bar{X}|}{f} = \frac{\sum f|d|}{\sum f} \cdots (4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$AD = \frac{\sum f|X - Med|}{\sum f} = \frac{\sum f|d|}{\sum f} \cdots (5)$$

په دواړو پورتنيو فورمولونو کي f دډولګيو فريکونسي،X دډولګي وسط،$\bar{X}$ اوMed په ترتيب سره حسابي اوسط اوداړوندي وېشني ميديان دي.

دوسطي انحراف سنجش نسبتاً ساده اوعام فهمه دي اما داستعمال موارد يې محدود دي. دوسطي انحراف استعمال دکوچنيو نمونو په اړه په صورت کې چي دقيق اوجامع تحليلونوته اړتيا نه وي ګټوردي په تصنيف شويو اعدادو او لويو نمونو کي په ندرت سره استعماليږي.

دالجبر له نظره د مطلقه توپيرونو په کار اچول دسوال قابليت لري. ځکه چي ددي توپيرونو مجموعه په هغه

صورت کي چي اشاري ته ونيول شي مساوي په صفر ياهم تقريبا صفر ته نږدي دئ

2.13 معياري انحراف يا استندرد انحراف

معياري يا استندرد انحراف د انحراف ډېر مهم مقياس دي او نظر اوسط ته د انحراف يوه ځانګړي بڼه ده. د معياري انحراف او وسطي انحراف تر منځ توپير دادي چي په لومړني کې د انحراف مربع نظر حسابي اوسط ته سنجول کيږي، په داسي حال کي چي دويم يي مطلقه انحراف ځخه کار اخلي. معياري انحراف دبل مهم مقياس مربع جذريعني وريانس څخه عبارت دي اويا معياري انحراف دانحرافاتومربع جذردي

معياري انحراف اووريانس په يوسلسله اعدادوکي دلاندي فورمولونوپه مرسته سنجش کيږي:

$$\delta^2 = \frac{\sum (x - \bar{X})^2}{n}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{X})^2}{n}}$$

په دي فورمول کي δ (ديونان دژبي کوچني توري دسيګما په نوم) معياري انحراف اوδ^2 واريانس افاده کوي.

دمثال په ډول: د 2,3,6,8,11 اعدادو واريانس اومعياري انحراف په لاندي توګه لاسته راځي.

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\delta^2 = \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (11-6)^2 + (8-6)^2}{5} = \frac{54}{5} = 10.8$$

$$\delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{10.8} = 3.29$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: په يوه صنفي ازموينه کې زده کوونکو لاندي نمري لاسته راوړي دي.

4,6,8,10,12

ددغو نمرو د معياري انحراف ځرګنده ده، د نوموړو نمرو انحرافي محاسبه په لاندي جدول کې ښودل شويده.

X	$X = X - X^2$	X^2	
12	$12 - 8 = 4$	16	$\bar{X} = \frac{40}{5} = 8$
10	2	4	
8	0	0	
6	-2	4	
4	-4	16	
$\sum X = 40$	$\sum X = 0$	$\sum X^2 = 40$	

که چېرې د $\sum X^2$ او N قيمتونه د معياري انحراف په فورمول کې وضع کړو نو وبه لرو.

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N}} \cdots (7)$$

$$S = \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8} = 2.814$$

د (7) فورمولونو تطبيق په بعضي حالاتو کې په ځانګړي توګه کله چې د اعدادو تعداد زيات اوږد شي يا د څو اشارو درلودونکې وي نو د زيات وخت او زحمت ته ضرورت لري. لذې وجې ښه طريقه هم وجود لري.

هر کله چې مخکنيو فورمولونو ته پراخوالي ورکړو نو لور چې:

$$\sum (X - \bar{X})^2 = \sum (X - 2\bar{X}X + \bar{X}^2)$$

$$\sum X^2 - 2\bar{X} \sum X + n\bar{X}^2$$

$$\sum X^2 - 2\bar{X} \sum X + \bar{X} \sum X$$

$$\sum X^2 - \bar{X} \sum X$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum X^2 - \left(\frac{\sum \bar{X}}{n}\right)^2$$

نظر دې رابطې ته کولای شو چې (7) فورمول د دوهم ځل لپاره پدې ډول ولیکو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum X^2 - \frac{\sum X^2}{n}}{n}} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - \left(\frac{\sum X}{n}\right)^2} \cdots (8)$$

لکه 2,4,6,8,11 په شمیرو کې:

$$\delta = \sqrt{\frac{234}{5} - \left(\frac{30}{5}\right)^2} = \sqrt{90.8} = 3.29$$

هرکله چې د یو لړۍ اعدادو انحراف نظر فرضي ثابت (A) ته وسنجول شي، نو معیاري انحراف کولای شو د لاندې فورمول په وسیله تر لاسه کړو.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d^2}{n}\right)^2} \cdots (9)$$

ثبوت:

$$d = X - A \quad \wedge \quad X = A + d$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{\sum(A+d)}{n} = \frac{nA}{n} + \frac{\sum d}{n} = A + d$$

$$X - \bar{X} = (A + d) - \left(A + \bar{d}\right) = d - \bar{d}$$

$$\delta = \frac{\sum\left(d - \bar{d}\right)^2}{n} \cdots (10)$$

نظر مخکېنو عملیو ته کولای شو چې (8) فورمول په اړه ولیکو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d^2}{n}\right)^2}$$

مثلاً، د 5 مخکنیو شمیرو په اړه لرو چې:

x	d	d^2
2	-1	1
3	0	0

(c) ketabton.com: The Digital Library

6	3	9
8	5	25
11	8	64
جمع	15	99

$$d = x - A \wedge A = 3$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{99}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)^2}$$

$$\delta = \sqrt{19.8} = 3.29$$

دتصنيف شوو شميرو معياري انحراف پورتنيو فورمولونو ته ورته (مشابه) هم کولای شو په څولارو سنجش کړو. په هغه صورت کي چي د ټولګي وسط او اړوندي فريکونسي ګاني په کار واچوو کولای شوله لاندي فورمول څخه استفاده وکړو.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{\sum f}} = \sqrt{\frac{\sum f d^2}{\sum f}} \cdots (11)$$

په دي ځای کي f فريکونسي ګاني، X دټولګي وسط او$\bar{X}$ داړوندي ويشني حسابي اوسط دي او $d = x - \bar{x}$ وضع شوي دي. دافورمول څرنګه چي دمخکني فورمول په اړه ورکړل شوي دي کيداي شي داسي وليکل شي:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum f X^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum f X}{\sum f}\right)^2} \cdots (12)$$

همدارنګه کولای شو چي لنډ فورمولونه هم را وباسو. که چيري د اعدادو انحراف د (A) د يو فرضي او سط په توګه وسنجول شي يعني $\mathrm{d} = \mathrm{X} - \mathrm{A}$ وي (يعني د (10) فورمول سره ورته) نو وبه لرو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum f d^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum f d}{\sum f}\right)^2} \cdots (13)$$

او که انحراف د ټولګيو د موقيعت په نظر يعني د ټولګي د واټن په حدونو څرګند کړو د ټولګيو د ګډ واټن په صورت کي ليکو چي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd'}{\sum f}\right)^2} \cdot C \cdots (14)$$

په دې ځای کې d’ د ټولګي د ګډ واټن په نظر انحراف او C د ټولګیو ګډ واټن دی. باید یادونه وشي چې د (11) او (14) فورمولونو د واټن ځوابونه ورته یا مشابه وي.

د مثال په ډول، په دې ځای کې د (12) او (14) فورمولونه د 142 کورنیو د کلني عاید په وېشنه کې د ټولګي د واټن په واحدونو په لاندې طریقه تطبیق کړو.

د (12) فورمولونو تطبیق او عملیه په (1) جدول کې او همدارنګه (14) د فورمولونو تطبیق او عملیه په (2) جدول کې په لنډه توګه وړاندې شویده.

(12) فورمول نظر (1) جدول دارنګه لیکلای شو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fX}{\sum f}\right)^2}$$

$$= \frac{653396.89}{142} - \left(\frac{9631.50}{142}\right)^2$$

$$= 4601.3865 - 4600.5698$$

$$= 0.8169 = 0.90$$

د (12) فورمول هم د انحراف د معیاري شکل تعریف لري. ددې فورمولونو تطبیق دزیات وخت نیول او ډېر کار ته ضرورت لري. په ځانګړي توګه کله چې عددونه اوږده او د کلاسونو تعداد زیات شي نو د (12) او (13) فورمولونه په دواړو حالاتو کې که فاصله مساوي وي او که نا مساوي کولای شو چې په کار یوسو. په هغه صورت کې چې د کلاسونو فاصله ګډه وي نو د (14) فورمول په تصنیف شوو اعدادوکې د معیاري انحراف لپاره لنډ ترینه او موثره طریقه ده.

(1)   جدول د 142 کورنیو د کلني وسطي عاید د معیاري انحراف سنجش په کال 1355کې

کلني وسطي عاید زر افغانی	فریکونسي *f*	د ټولګي وسط *X*	fX	fX^2
66.00-66.49	11	66.25	72875	48279.69
66.50-66.99	15	66.75	1001.25	66833.44
67.00-67.49	24	67.25	1614.00	108451.50
67.50-67.99	40	67.75	2710.00	183602.50
68.00-68.49	20	68.25	1365.00	43161.25
68.50-68.99	14	68.75	962.50	66171.88
69.00-69.49	11	69.25	761.75	52751.19
69.50-69.99	7	69.75	488.26	34055.44
مجموعه	142		9631.50	653396.89

(c) ketabton.com: The Digital Library

(2) جدول د 142 کورنیو د کلني عاید په وېشنه کې د معیاري انحراف سنجش د ټولګي په واحدونو په لنډه طریقه تطبیق کړو.

کلني وسطي عاید زر افغانۍ	فریکونسي f	d'	fd'	fd'^2
66.00-66.49	11	3	33	99
66.50-66.99	15	2	30	60
67.00-67.49	24	1	24	24
67.50-67.99	40	0	0	0
68.00-68.49	20	1	20	20
68.50-68.99	14	2	28	56
69.00-69.49	11	3	33	99
69.50-69.99	7	4	28	112
مجموعه	142		22	470

نظر (2) جدول ته (14) فورمول حل کولای شو:

$$\delta = C.\sqrt{\frac{fd'^2}{f} - \left(\frac{fd'}{f}\right)^2} = 0.5\sqrt{\frac{470}{142} - \left(\frac{22}{142}\right)^2} = 0.5(1.81) - 0.15 = 0.83 \text{ (زر افغانی)}$$

په تصنیف شوو اعدادو کې معمولا د معیاري انحراف ارزش یوڅه لږ لوړ دی. نظر په معیاري انحراف کې په هغو اعدادو کې چې تصنیف شوي نه وي شنجول کېږي.

له تحلیلي نګاه څخه د کلاسونو د فاصلو اندازه په تصنیف شوو اعدادو کې باید کوچني وي دمعیاري انحراف له ربع څخه.

له تشریحي نګاه څخه سربیره پر تیروتنو کولای شو د کلاسونو دفاصلو اندازه حتي د معیاري انحراف نیمایي شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.13 نسبي انحراف (دانحراف ضريب)

کولای شو دوه يا زياتې لړۍ (سلسلې) د اړوندو لړيو د اعدادو د خوريدنې (پراګندګۍ) د څرنګوالي د پوهيدو په غرض چې د پوره يا تقريبا ورته اوسطونو لرونکې وي پرتله (مقايسه) کړو، په ځينو حالاتو کې بيلا بيلې وېشنې بيل يا متفاوت اوسطونه لري او يا په بيلا بيلو واحدونو باندې څرکنديږي. په دې حالت کې د هغوی د معياري انحراف پر تلنه نا ممکنه وي د بيګې په ډول د طب د ډاکترانو د کلني عايد د وېشنې معياري انحراف 1500 افغانۍ او د پوهنتون داستادانو معياري انحراف 1000 افغانۍ وي پدې به دلالت ونکړي چې انحراف د طب د ډاکترانو په عايد کې د 150 سلنې په اندازې، انحراف د پوهنتون د استادانو په کلني عايد کې وي، يواځې په هغه حالت کې کولای شو تعبير کړو چې په دواړو ګروپونو کې د کلني عايد اوسط مساوي وي. که د لومړني ګروپ د کلني عايد اوسط مثلاً 75000 او د دويمي 36000 وي د استادانو په عايد کې نسبي انحراف نظر دطب د ډاکترانو عايد ته زيات دې. په حقيقت کې د انحراف د دوو مطلقه ارزښتونو په منځ کې توپير له له متفاوته اوسطونو سره په يوازيتوب (تنهايي) سره پرتلنې اساس نشي کېداې. دمقياسونو په دې حالت کې بايد مطلقه انحراف په نسبي انحراف تبديل شي، ترڅو د اړوندو ويشنو د پرتلنې امکان ميسر شي.

په دې ځای کې دري ډوله د نسبي انحراف مقياس مطالعه کېږي.

- ☑ دمعياری انحراف ضريب
- ☑ د وسطي انحراف ضريب
- ☑ د کوارټايلونو د انحراف ضريب

د معيارېانحراف ضريب

د نسبي انحراف له مقياسونو څخه يو مقياس چې په عمل کې زيات په کار اچول کېږي د نسبي انحراف ضريب دې، دا ضريب معمولاً په V افاده کېږي او پر حسابي اوسط باندې د معياري انحراف له نسبت څخه عبارت دی يعنې:

$$V = \frac{\text{معياري انحراف}}{\text{حسابي اوسط}} = \frac{\delta}{\bar{\bar{X}}} \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

مثال د طب د ډاکترانو او د پو هنتون د استادانو د کلني عايد په اړه د انحراف ضريبونه عبارت دی له:

$$V_1 = \frac{1500}{75000} = 0.2 \text{ يا } 2\%$$

$$V_2 = \frac{1000}{36000} = 0.028 \text{ يا } 2.8\%$$

2.14 د وسطي انحراف ضريب

د بلې خوريدنې نسبي مقياس چې ډير زيات معمول دی د وسطي انحراف د ضريب په نوم ياديږي چې لاندې په V_a باندې اعاده شويدي چې پر حسابي اوسط باندې له وسطي انحراف څخه عبارت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V_a = \frac{\text{وسطي انحراف}}{\text{حسابي اوسط}} = \frac{MD}{\bar{X}}$$

که په یوه وېشنه کې د $\bar{X}$ حسابي اوسط او د MD وسطي انحراف د هغو طریقو په اساس چې مخکې مطالعه شویدي پیدا کړو. د (V_a) د وسطي انحراف ضریب هم په هغوی کې ویشو او په نسبت یا معمولاً په فیصدۍ یي څرګندوو.

د مثال په ډول په 2,3,6,8,11 پنځو عددونو کې څرنګه چې مو مخکې ولیدل.

$$\bar{X} = 6$$

$$MD = 2.8$$

د وسطي انحراف ضریب په دې اعدادو کې عبارت دی له:

$$V_a = \frac{MD}{\bar{X}} = \frac{2.8}{6} = 0.0466 \text{ یا } 46.6\%$$

هرکله چې وسطي انحراف نظر میدیان ته وسنجول شي د (3) فورمول به ولیدل شي، نو کولای شو چې (16) فورمول دارنګه ولیکو:

$$V_a = \frac{AD}{\bar{X}} \cdots (16)$$

په ځانګړي توګه په بعضي ځایونو او حالاتو کې، د دوو سرته رسیدلو کلاسونو په وروستیو کې یوه وېشنه خلاصیږي، او یا دغیر هادي ارزښتونو وېشنه وجود لري.

مثال: دلاندې دفعاتوتوزیع لپاره چې په هره ونه کې دمنو شمیر ښیي، وسطي انحراف یي محاسبه کړئ؟

Classes	65-84	85-104	105-124	125-144	145-164	165-184	185-204
fi	9	10	17	10	5	4	5

حل:

classes	xi	fi	$fi.xi$	$xi-\bar{x}$	$fi\|xi-\bar{x}\|$
65-84	**74.5**	**9**	**610.5**	**-48.0**	**432.0**
85-104	**94.5**	**10**	**945.0**	**-28.0**	**280.0**
105-124	**114.5**	**17**	**1946.5**	**-8.0**	**136.0**
125-144	**134.5**	**10**	**1345.0**	**12.0**	**120.0**
145-164	**154.5**	**5**	**772.5**	**32.0**	**160.0**
165-184	**174.5**	**4**	**698.0**	**52.0**	**208.0**
185-204	**194.5**	**5**	**972.5**	**72.0**	**360.0**
		$\sum fi = 60$	**7350**		**1696.0**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{n} = \frac{7350.0}{60} = 122.5gr$$

$$\text{MD} = \frac{\sum fi|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{1696.0}{60} = 28.27gr$$

2.15 کوانټیلQuantiles

مخکې مو وویل چې میانه معلومات په دوومساوی برخو ویشی، په همدې ترتیب کولی شو چی معلومات په څلورو،لسو او یاسلو مساوی برخو وویشو.

د کوانټیل ډولونه: 1.کوارټیل 2. ډسایل 3. پرسنټایل

1. کوارټیل(Quartiles): که چیری معلومات په څلورومساوی برخو وویشل شی، هری یوی برخی ته کوارټیل ویل کیږی .

عموماً دوه ډوله کوارټیل وجودلری Q_1 ته لومړی کوارټیل او Q_3 ته دریم کوارټیل وایل کیږی .

همدارنګه Q_1 او Q_3 ته ټیټ او لوړکوارټیل په ترتیب سره وایی. دویم کوارټیل Q_2 ته میانه وایی.

کوارټیل دلاندی فورمولونوپواسطه پیداکوو.

Q_1=د $\frac{n+1}{4}$ رقم ارزښت Q_2=$\frac{2(n+1)}{4}$ رقم ارزښت Q_3= د $\frac{3(n+1)}{4}$رقم ارزښت

لومړی مثال: دلاندی مشاهداتوڅخه ټیټ کوارټیل ، دویم کوارټیل اولوړکوارټیل په لاس راوړئ

15 , 20 , 25 , 25 , 25 , 30 , 30 , 35 , 35 , 40 , 45

حل:

$\frac{n+1}{4} = c$ a) $\frac{11+1}{4} = 3 \Rightarrow r = 3 \wedge w = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q_1 = (1-w)X_r + w.x_{r+1} = (1-0)X_3 + 0 \cdot X_4 = X_3 \qquad Q_1 = 25$$

$b)\ \frac{2(n+1)}{4} = C \Rightarrow \frac{2(11+1)}{4} = 6 \quad ,r = 6\text{^}w = 0$

$Q_2 = (1-w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1-0)X_6 + 0 \cdot X_7 = X_6$

$\mathrm{Q_2 = X_6 = Me} = 30$

C) $\frac{\mathbf{3(n+1)}}{\mathbf{4}} = \mathbf{C} \Rightarrow \frac{\mathbf{3(11+1)}}{\mathbf{4}} = \mathbf{9} \quad ,\mathbf{r = 9\text{^}w = 0}$

$$Q_3 = (1-w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1-0)X_9 + 0 \cdot X_{10} = X_9 \qquad Q_3 = X_9 \Rightarrow Q_3 = 35$$

د کوارتیل انحراف ضریب

د انحراف ضریب نظر کوارټایلونو ته چې لاندي په V_q سره افاده شوي د هغوی په مجموعي باندې د دریم کوارټایل او لومړی کوارټایل د توپیر له نسبت څخه عبارت دی یعني:

$$V_q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \cdots (17)$$

د مخکنیو انحرافونو ضریبونه کولای شو په کسري، اعشاري، یا څرنګه چې زیات معمول دې په فیصدی یې څرګندوو.

د مثال په ډول لکه څرنګه چې مخکې هم ولیدل شول د 142 کورنیو وسطي کلني عاید په وشنه کې.

$$Q_3 = 68.41$$

$$Q_1 = 67.21$$

نو وروسته پدې وېشنه کې:

$$V_q = \frac{68.41 - 67.21}{68.41 + 67.21} = \frac{1.20}{135.62} = 0.009 = 0.9\%$$

په لنډه توګه باید ووایو دوه یا زیاتي وېشني د انحراف او خوریدني له پلوه یواځې هغه وخت پرتله کولای شو چې د کتې مټ اوسط یا تقریبا داوسط لرونکې وي او په ورته (مشابه) واحد باندې افاده شوی وي پرته له دې باید د نسبي انحراف مقیاسونه په کار واچول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ویشنو د پرتلني (مقایسي) پر وخت باید خپله مقیاس په کار واچول. شي او نشو کولای V یوه وېشنه یا V_a او V_q له بلي وېشني سره پرتله کړو، او همدارنګه نشو کولای δ یوه وېشنه یا AD او QD له بلي وېشني سره پرتله کړو.

2. دیسایل (Deciles): په دی کې معلومات په لسو مساوی برخو وېشل کیږی او په D_1 $D_2,\ldots D_9$ یی وښو. پنځم ډیسایل د میانی څخه عبارت دی.

$D_1=$ د $\frac{n+1}{10}$ رقم ارزښت

$D_2=$ د $\frac{2(n+1)}{10}$ رقم ارزښت

....

....

$D_9=$ د $\frac{9(n+1)}{10}$ رقم ارزښت

لومړی مثال: په لاندی معلوماتو کې D_3 او D_5 پیداکړی.

82, 53, 54, 62, 60, 63, 46

لومړی معلومات په صعودی ډول تر تیبوو.

46, 53, 54, 60, 62, 63, 82

a) $\frac{3(n+1)}{10} = C \Rightarrow 3\frac{(7+1)}{10} = 2.4$

r =2 w =0.4

$D_3 = (1-w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1-0.4)X_2 + 0.4 \cdot X_3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D_3 = 0.6(53) + 0.4(54) = 31.8 + 21.6 = 53.4$$

b) $\frac{5(n+1)}{10} = C \Rightarrow 5\frac{(7+1)}{10} = 4$

$$D_5 = (1-w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1-0)X_4 + w \cdot X_5 = X_4$$

$$D_5 = 60$$

3 . پرسنټیل (Percentiles): په دی کی معلومات په سلو مساوی برخو وېشل کیږی او په P_1 , P_2 ......P_{99} یی ښیو، P_{50} د میانی ځخه عبارت دی.

P_1= رقم ارزښت $\frac{(n+1)}{100}$ د

P_2= رقم ارزښت $\frac{2(n+1)}{100}$ د

....

....

P_{99}= رقم ارزښت $\frac{99(n+1)}{100}$ د

لومړی مثال: په لاندی معلوماتو کی P_{30} او P_{60} پیداکړئ.

82, 53, 54, 62, 60, 63, 46

لومړی معلومات په صعودی ډول تر تیبوو.

46, 53, 54, 60, 62, 63, 82

$a)\ \frac{30(n+1)}{100} = C \Rightarrow \frac{30(7+1)}{100} = 2.4 \qquad r = 2\text{^}w = 0.4$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_{30} = (1-w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1-0.4)X_2 + 0.4 \cdot X_3$

=0.6 (53)+0.4(54)=53.4 ⇒ $P_{30} = 53.4$

b) $\frac{60(n+1)}{100} = C \Rightarrow \frac{60(7+1)}{100} = 4.8 \quad r = 4\text{^}w = 0.8$

$P_{60} = (1-w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1-0.8)X_4 + 0.8 \cdot X_5$

$$P_{60} = 0.2(60) + 0.8(62) = \Rightarrow P_{60} = 61.6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم فصل

تصادفی متحول او د هغه واریانس ،دریاضی امید او معیاری انحراف

3.1 داحتمالاتوتابع

تعریف۱: فرضوچې Xیواتفاقي متحول او $x_1, x_2 ... x_n$ دنوموړي اتفاقي متحول ارزښتونه دي پدې صورت کې دنوموړي متحول داحتمالا توتابع دی چې دXمتحول دهریوه ارزښت دتحقیق پیداکولواحتمال توضح کوي یاپه بل عبارت : احتمال ددې چې Xاتفاقي متحول د x_i ارزښت ولري داحتمالاتو په تیوری کې داحتمالاتو دتابع په نامه یادیږي په ریاضیکي توګه کولای شو هغه په لاندې ډول سره افاده کړو:

$$F_x(x_i) = P(X = x_i), \qquad i = 1,2,3 ... n$$

تریف۲: هغه تصادفی متحول چی په احصایه او احتمالاتو کی تر ځیرنی لاندی نیول کیږی عبارت له هغه تابع څخه دی چی دتعریف ناحیه یی نمونیی فضضاء او دقیمتونو ناحیه یی حقیقی اعداد وی

که ، $p(X = x_i)$ ولرو نو $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)] ... [x_n, f(x_n)]$ ته د مجزا (کسسته) احتمال تابع وایی.

د تجمعی او پیوسته احتمال تابع په $F(x) = p(X \le x)$ بڼه ښودل کیږی.

دیوه اتفاقي متحول داحتمالا توتابع لاندېني مشخصات لري :

(c) ketabton.com: The Digital Library

1) $P(X = x_i) = F_x(x_i) \geq 0$ 1) 2) $\sum_{i=1}^{n} F_x(x_i) = 1$

3.2 د ریاضی تمه (امید) (math expectation)

که x نا ثابې مجزا متحول وی په دی حالت کی اوسط (expected value) چی د x تصادفی مجزا

متحول چی د **E(*X*)** په بنه ښودل کیږی عبارت دی له $E(X) = \sum_{x} x\, P(X = x)$

یا $E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) \ldots x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$............*

که $f(x_i) = p_i$ سره وښیو چی احتمال دی نو د ریاضی امید په لاندی ډول هم لیکلای سو

$+x_2p_2+x_3p_3+\ldots+x_n\, p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i E = E(\mathrm{x}) = x_1p_1$

$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.................**

په هغه صورت کی چی X لایتناهی قیمتونه واخلی د ریاضی امید یی په لاندی ډول دی

$E = E(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i$

په پورته فورمول کی p احتمال دی

همدا ډول که k *یو مثبت عدد وي نو:* $E(X^k) = \sum_{x} x^k\, P(X = x)$

که تصادفی متحول د n مقدار سره راکړل سوی وی او احتمال یی یوشان وی یعنی p_j =1/n
نوپه دی صورت دریاضی امید (اوسط) عبارت دی له

$$E = x_1\left(\frac{1}{n}\right) + x_2\left(\frac{1}{n}\right) + x_3\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + x_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots x_n}{n} = \bar{x}$$

تعریف: که چیرېX یو تصادفي متغیر وي، د X *واریانس د* V(X) *په بنه ښودل کیږی او داسی تعریف شویدی*

V(X) = E[(X – E(X))^2].

یا V(X) = E(X^2) – [E(X)]^2

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

معیاری انحراف عبارت له : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

مثال: د لاندی جدول کی په پنځه نمریی تیست کی په ترتیب سره د ۲،۳،۴،۵ نمرو اخستلو احتمال درکړی سوی دی د ریاضی امید یی پیدا کړی (د نمرو اخستلو احتمالی اوسط) پیداکړی

x	2	3	4	5
p	0.2	0.4	0.3	0.1

حل: $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = 2(0.2) + 3(0.4) + 4(0.3) + 5(0.1) = 3.3$

د پورته احتمال پر بنسټ ویلای سو چی په پنځه نمریی ازموینه کی به ۳,۳ نمری واخستل سی

دریاضی د امید خواص.

په هغه صورت کی چی متحولین x ,y تصادفی وی او c حقیقی عدد وی

1) E(cx)=cE(x) 2 . E(X+Y)=E(X)+E(Y)

3 . E(XY)=E(X)E(Y) (۴) E(a) = a (۵) E(aX + b) = a E(X) + b

1.$E(cx) = \sum_x cf(x) = c\sum_x xf(x) = cE(x$

تیورم: د یو شمیر تصادفي متغیرونو د مجموعي امید (تمه) مساوي ده د هغوی د امیدونو د مجموعی سره

ثبوت: راځئ چې د x او y تصادفي متغیرونه په پام کې ونیسو. داسی چې x د . xi د مقادرو څخه دی او i = 1, 2, 3, . . .,m همد انګه د y لپاره j = 1, 2, 3, . . . ,n

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$E(x+y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i + y_j)P_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \; P_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_j \; P_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}\right) + \sum_{i=1}^{m} y_j \left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}\right)$$

$$= \sum_{i} x_i P_{ij} + \sum_{j} y_j P_{ij} = \mathrm{E(x) + E(y)}$$

$$\therefore \; \mathrm{E(x + y) = E(x) + E(y)}$$

$$\text{Since } \sum_{j=1 to\, n} P_{ij} = P_j \text{ and } \sum_{i=1 tom} P_{ij} = Pi\,.$$

د پورته ثبوت پربنسټ لرو: $E(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) \ldots\ldots + E(x_n)$.

یا په لنډ ډول:

$2.E(x+y) = \sum\sum(x+y)f(x,y) = \sum\sum xf(x,y + \sum\sum yf(x,y) = \mathrm{E(x)+E(Y)}$

تیورم: د یو شمیر خپلواکو تصادفي متحولونو د حاصل ضرب ریاضیکی تمه د دوی د تمو له حاصل ضرب سره مساوي ده.

یعنی:

$$E(x\,y) = \sum_{j}\sum_{i} x_i\, y_j\, P_{ij}$$

ثبوت : د قانون په اساس لرو $P_{ij} = P_i \; P_j$

$$\sum_{j}\sum_{i} x_i \; P_i \; y_j \; P_j = \sum_{i} x_i \; P_j \sum_{j} y_j \; P_j = \sum_{i} P_i\, x_i \; E(y) = E(y)\sum_{i} P_i\, x_i = E(x)\,E(y)$$

یا: $3.\ \mathrm{E(xy)} = \sum\sum \mathrm{xy} f(x,y) = \sum_x [xf(x)\sum_y yf(y)] = \sum_x [xf(x)E(y) = \mathrm{E(x)E(y)}$:

د پورته ثبوت پر بنسټ لیکلای سو. $E(x_1 .\, x_2 .\, x_3 \ldots\ldots x_n) = E(x_1) .\, E(x_2) .\, E(x_3) \ldots\ldots E(x_n)$.

یادونه: $E(x, y) = E(x)\,E(y)$ د x او y خپلواکي تضمین نه کوي.

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: که چیرېxیو تصادفي متغیر وي، د x واریانس د V(X) *په بنه ښودل کیږی او داسی تعریف شویدی*

$$V(X) = E[(X - E(X))^2].$$

یا $$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

معیاری انحراف عبارت له : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

$$V(x) = \sigma^2 = E\left[(x - E(x))^2\right] = E\left[(x-\mu)^2\right] =$$

$$= \sum_{\text{all } x}(x-\mu)^2 p(x) = \sum_{\text{all } x}\left(x^2 - 2x\mu + \mu^2\right)p(x) =$$

$$= \sum_{\text{all } x} x^2 p(x) - 2\mu\sum_{\text{all } x} xp(x) + \mu^2\sum_{\text{all } x} p(x) =$$

$$= E\left[x^2\right] - 2\mu(\mu) + \mu^2(1) = E\left[x^2\right] - \mu^2 = E[x^2] - [E[x]]^2$$

$$\text{Standard Deviation}: \sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

$$\ldots\ldots{*}{*}{*}V(x) = \sigma^2 = E[x^2] - [E[x]]^2$$

د واریانس ځینی خواص:

(a) $V(a) = 0$ (b) $V(aX \pm b) = a^2\, V(X)$

(c) $V(aX + bY) = a^2\, \sigma^2_X + b^2_Y + 2ab\, \sigma_{XY}$.

دبرنولی په توزیع کی دریاضی امید او واریانس

دبرنولی په توزیع کی چی p کامیابی او q ناکامی نومول سویده د x=0 لپاره ناکامی او د x=1 لپاره

کامیابی ده چی په لاندی ډول ده

X	0	1
P	Q	P

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f\,(1) = p(x = 1) = p, \quad f(0) = p(x = 0) = q = 1 - p \;\;, \quad 0 \leq p \leq 1$$

$$,\; f(x) = \{p, \quad x = 1\} f(x) = \{p^x (1-p)^{1-x} \,, x = 0, \}$$

$$E(X) = \sum_x xP(x) = (0)(1-p) + (1)(p) = p$$

$$Var(X) = \sum_x (x-p)^2 P(x) = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2(p)$$

$$= p(1-p)(p+1-p) = p(1-p) = pq$$

3.3 دبینومیل توزیع دریاضی امید او واریانس Mean and variance of the Binomial

distributionدوه حده توزیع دبرنولی دتوزیع په شان ده چی د n تجربولپاره یی احتمال یوشان دی او په

B(n,p) سره ښودل کیږی <چی p احتمال او n دتجربوشمیر دی او د k کامیابیو لپاره په لاندی ډول لیکل

کیږی

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

$$E(X) = E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = p + \ldots + p = np$$

$$Var(X) = Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n) = np(1-p) = npq$$

یا :

$$Mean = \mu = \sum_{x=0}^{n} x.b(x;n,p)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x.\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{(n-x)}$$

Put y = x – 1, $\therefore$ x = 1 + y

When x = 1 implies y = 0

x = 1 implies y = x – 1

$$= np \sum_{y=0}^{n-1} {}^{(n-1)}C_y p^y q^{(n-y-1)}$$

$$= np\ (q+p)^{(n-1)}$$

So, μ = np is Mean of Binomial distribution.

Variance of the Binomial Distribution د بینومیل توزیع واریانس 3.4

$$E(X)^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2\ b(x,n,p)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} [x(x-1)+x]\ b(x,n,p)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\ b(x,n,p) + \sum_{x=0}^{n} x\ b(x,n,p)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\ \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{(n-x)} + \mu$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^x q^{(n-x)} + np$$

$$= n(n-1)\,p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^{(x-2)} q^{(n-x)} + np$$

y = x – 2 $\therefore$ x = 2 + y

x = 2 $\Longrightarrow$ y = 0

که x = n imples y = n - 2

$$= n(n-1)\,p^2 \sum_{y=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{y!\,(n-2-y)!} p^y q^{(n-2-y)} + np$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= n(n-1)\, p^2 \sum_{y=0}^{n-2} {}^{(n-2)}C_y\, p^y\, q^{(n-2-y)} + np$$

$$= n(n-1)\, p^2 (q+p)^{n-2} + np$$

$$E(X^2) = n(n-1)\, p^2 + np$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= n(n-1)\, p^2 + np - (np)^2$$

$$= n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2$$

$$= np(1-p)$$

$$\therefore$$

$$\sigma^2 = npq \qquad ، \ \sigma = +\sqrt{npq}\,.$$

مثال : که یوه سکه شپږ ځل وغورل سی دشیر راتلو لپاره یی امیدریاضی او واریانس حساب کړی

حل:

$$E(x) = \mu = np = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$Var(x) = \sigma^2 = npq = 6\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1.5$$

$$\text{standard}\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.5} = 1.22$$

مثال: که دوی سکی یو ځای وغورځول سی د شیر راتلو لپاره یی د ریاضی امید او واریانس پیداکړی

حل:

X = x	0	1	2	Total
P(X = x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\text{Mean: } \mu = E(X) = 0.\ \frac{1}{4} + 1.\ \frac{2}{4} + 2.\ \frac{1}{4} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{Variance: } \sigma^2 = V(X) \quad = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 0^2.\ \frac{1}{4} + 1^2.\ \frac{2}{4} + 2^2.\ \frac{1}{4} - (1)^2$$

$$= \frac{2}{4} + 1 - 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال: دلاندی جدول څخه واریانس ، اوسط(امید ریاضی) سندرد انحراف پیداکړی

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0.1	0.1	0.2	0.4	0.2

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = (1 \times 0.1) + (2 \times 0.1) + (3 \times 0.2) + (4 \times 0.4) + (5 \times 0.2) = 3.5$$

$$E(X^2) = (1^2 \times 0.1) + (2^2 \times 0.1) + (3^2 \times 0.2) + (4^2 \times 0.4) + (5^2 \times 0.2) = 13.7$$

$$V(x) = \sigma^2 = E[x^2] - \left[E[x]\right]^2 = 13.7 - (3.5)^2 = 1.45$$

$$\text{Standard deviation } \sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{1.45} = 1.20$$

3.5 دپواسن داحتمال توزیع

په احصایه کی د پواسون توزیع د احتمال توزیع ده چی په یو مشخص وخت کی د یوی پیښی د څوځلی د احتمال لپاره کارول کیږی ، یا په بل عبارت د شمیرلو توزیع ده.

دا نوم د فرانسوی ریاضی دان سیمون دنیس پواسون (Simeon Denis Poisson) په ویاړ پر یادی توزیع اینبودل سوی دی.

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپواسن توزیع دلمدا د پرامتر سره په لاندی دی ډول ده x چی $f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$, for x = 0, 2, 3, . . .

یوصحصحیح مثبت عدد دی

دپواسون تقرب د بینومیل توزیع ته:

Poisson Approximation to Binomial Distribution Theorem:

Statement بیان**:** $n \to \infty$ ،$p \to 0$ $np = \lambda$ او λ یو غیری صفری محدود عدد دی ، چی لمداλ
$b(x, n, p) \to \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$.

Proof: Let us consider b(x, n, p) so that $b(x, n, p) = {}^nC_x\ p^x q^{n-x}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(x-1))}{x!}\ p^x q^{n-x}$$

and given np = λ $\Rightarrow$ $p = \frac{\lambda}{n}$ also q = 1- p = 1 - $\frac{\lambda}{n}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(x-1))}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(x-1))}{n^x}\ \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{(n-1)}{n}\right)\left(\frac{(n-2)}{n}\right)\ldots\left(\frac{(n-(x-1))}{n}\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$b(x, n, p) = {}^nC_x\ p^x q^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{(n-1)}{n}\right)\left(\frac{(n-2)}{n}\right)\ldots\left(\frac{(n-(x-1))}{n}\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x} \text{ ---------- (1)}$$

Now as $n \to \infty$, $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{x-1}{n} \to 0$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x \to 1 \text{ and } \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda}\right]^{-\lambda} \to e^{-\lambda}$$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\therefore$ from equation (1) b(x, n, p) $\rightarrow \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$.

This completes the proof of the Poisson's Approximation to Binomial distribution theorem.

Note: 1. $e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$

2. Show that $\sum_{x=0}^{\infty} f(x, \lambda) = 1$

For that consider $\sum_{x=0}^{\infty} f(x, \lambda) = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\ e^{\lambda} = 1$

3. $\lambda > 0$ is called the parameter of the Poisson Distribution.

4. P(X = 0) = $\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$

Applications of Poisson distribution:

Poisson distribution is applicable when n is very large and p is very small. Hence some of the applications of Poisson distribution are as follows:

1. Number of faulty blades produced by a reputed firm

2. Number of deaths from a disease such as heart attack or cancer.

3. Number of telephone calls received at a particular telephone exchange.

4. Number of cars passing a crossing per minute.

5. Number of printing mistake in a page of a book.

Mean and Variance of Poisson distribution:

Mean μ = E(X)

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x\ P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} x\ f(x,\lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} x\ \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty}\ \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^x}{(x-1)!} = \lambda\ e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\ \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda\, e^{-\lambda}\ e^{\lambda}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Therefore Mean = μ = λ

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2\ f(x,\lambda) \quad = \sum_{x=0}^{\infty} [x(x-1)+x]\, f(x,\lambda) \quad = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\, f(x,\lambda) + \sum_{x=0}^{\infty}\ x\, f(x,\lambda)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + \lambda \quad = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-2)!} + \lambda \quad = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$\therefore\ E(X^2) = \lambda^2\, e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda$$

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

Variance = V(X) = $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$. $\therefore$ variance = λ

Standard Deviation = S.D. = $\sqrt{Variance} = \sqrt{\lambda}$

Note : In a Poisson distribution mean always equal to the variance.

دیکنواخته (متصل)تصادفی متحولینو واریانس او اومیدریاضی:

په دی تابع کی ، x په [a,b] انتروال کی قرارلری او متحول یکنواخته (متصل) وی چی ریاضیکی بنودنه

یی په لاندی ډول ده ،یادونه باید وشی چی دریاضی امید په متصل اومنفصل متحولینوکی یو ډول تعبیر لری

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ o\,, & x = 0 \end{cases}$$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = b - a$$

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{1}{2}x^2\frac{1}{b-a}\right]_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp_x(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Bigg|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2p_x(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var(x) = DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{DX} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال په [0,1] انتروال کی دریاضی امید او واریانس څودی؟

حل:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Var(x) = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{(0-1)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

نورمال توزیع:

د x تصادفی متحول د $f(x)$ تراکمی تابع سره د نورمال توزیع لرونکی دی که تابع په لاندی ډول راکړل سوی وی

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

تصادفی متحول چی د نورمال توزیع لرونکی وی په لنډ ډول په $X \sim N(\mu,\sigma)$ شکل ښودل کیږی

چی μ د متحول امید یا اوسط ، σ معیاری انحراف راښی، یعنی نورمال توزیع کاملا د معیاری انحراف او اوسط په واسطه مشخص کیږی

د $f(x)$ تراکمی تابع دلاندی خواصو لرونکی ده

1- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
2- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
3- د $f(x)$ تابع د $x=\mu$ قیمت سره اعظمی ده.
4- $f(x)$ د μ پر شاوخوا متناظره ده، یعنی $f(x+\mu) = f(-x+\mu)$
5- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ او $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

<u>مثال:</u>

د X تصادفی متحول توزیع د $X \sim N(30,9)$ په شکل راکړل سویده احتمال یی داسی پیدا کړی چی X په [24,43] انتروال کی قیمت واخلی .

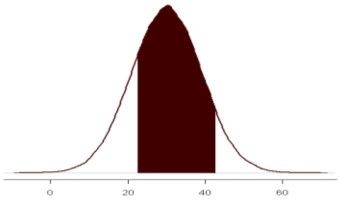
حل: لرو چی

$$P(24 \leq X \leq 43)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تعریف په اساس اود نورمال توزیع په نظر کی نیولو سره لرو چی:

$$P(24 \leq X \leq 43) = \frac{1}{9\sqrt{2\pi}}\int_{24}^{43} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-30}{9}\right)^{2}\right) dx$$



$P\ (24 \leq X \leq 43)$

د محاسبی څخه وروسته پورته انتګرال 0.6737 کیږی .

معنا دا چی د X تصادفی متحول په احتمال د 0.6737 په یاد سوی انتروال کی قیمت اخلی

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

دمیلان تحلیل
(The Regression Analysis)

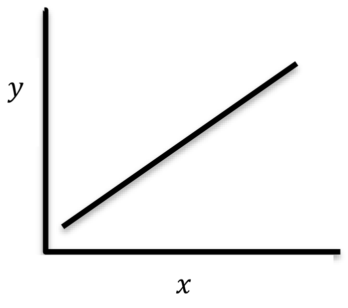
میلان اصطلاح په 1885م کال (frances Galton) په واسطه لومړی معرفي شوه، کوم چې دې اولادونو او والدېنو د قدونو افادې موضوع څېړله، دې د اوموندله چې دلوړ قد لرونکی والدېنو اولادونه لوړقد او د ټيټ قد لرونکي والدېن د ټيټ قد اولادونه لري، دغه پېښه یې د اوسط خواته د میلان Regress Toward (the Average) په نوم یاده کړه ، دغه مرکزي اوزانونو میلان د ګالتن له خوا د یو تمایل په نوم ونومول شو.

ځیني وخت یو مستقل متحول (lndependelt variable)او یود تابع متحویل (Depenent variable)وي،

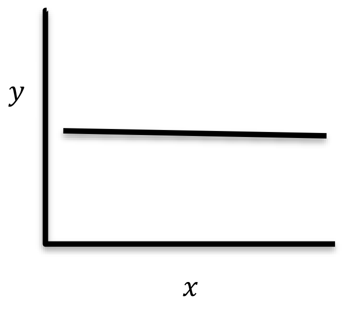
چې دیته ساده یا یو اړخیزه میلان (simple Regression) ویل کیږي که مستقل یا د تابع متحولین څوځو وی، په داسي حال کې د څو مستقلو متحولینو لرونکي میلانونه د څو ګوني یا څواړ خیزه میلان(Multiple Regression)په نوم یادیږي.

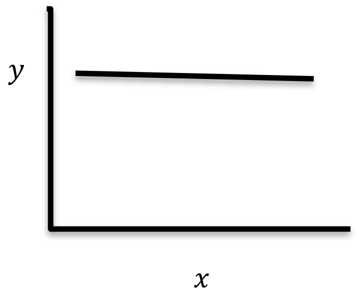
د بیلګي په ډول د بوټو وده د ځمکي د حاصلخیزي ، د سرو تطبیق، اوربښت، د تخم کیفیت او نورو پوري اړه لري.

یا د یو تن فشار د هغې وزن، عمر اونورو پوري اړه لري،



Positive Slope


Zero Slope


Negative Slope

دمیلان بیلګي عبارت دي له:

- د نباتاتوحاصل او تولید چې د سرې په مختلفو اندازو شنه شوې وی.
- د پلاستیک کلکوالي د تودوخي په مقابل کي د وخت د مختلفو دورانونو لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورتنیو بیلګو کې په یو مقیاس کې بدلون مطالعه شوې دې د یو مشخص بدلون د بل متحول سره، چې د تجربه کوونکې په واسطه انتخاب شوې دې.

تعریف: میلان یو احصائیوي تیوري ده، په کوم کې چې مونږ د یو متحول د ارزښتونو اټکل کوو او د دې په وسیله د بل متحول ارزښتونه پیژندل کیږي .

فر ضوو چې دکال په پیل کی یو شاګرد له اوسط څخه زیاتی نمری اخستی دی اودکال په پای کې یې هم له اوسط څخه زیاتی نمری اخستی دی اوکه دکال په پیل کی له اوسط څخه کمی نمری اوهم یی دکال په پای کی له اوسط څخه کمی نمری اخستی وی ؛ نووایو چی دانمری یودبل سره مثبت ارتبا ط لری اوکله دا سی حالت واقع کیږی چې دیو متحول لوړې نمری دبل متحول دکوچنیونمرو سره جوړه شوی وی؛ نووایی چې دا دواړه متحوله یو دبل سره منفی ارتباط لری .

دارتباط ضریب دمتحولینو درابطو ترمنځ یوشاخص دی چی مختلف ډولونه لری؛ خو دهغوی اکثریت ځینی مشترک صفتونه لری که دوه متحوله په خپل منځ کی مثبته رابطه ولری نو دهغوی دارتباط ضریب مثبت یودی اوکه منفی رابطه ولری نو دارتیاط ضریب منفی یودی اوکه دوه متحوله په خپل منځ کی هیڅ ارتبا ط ونه لری، نودارتباط ضریب یی صفردی .

په دی ډول که دارتباط ضریب په r وښیونو:

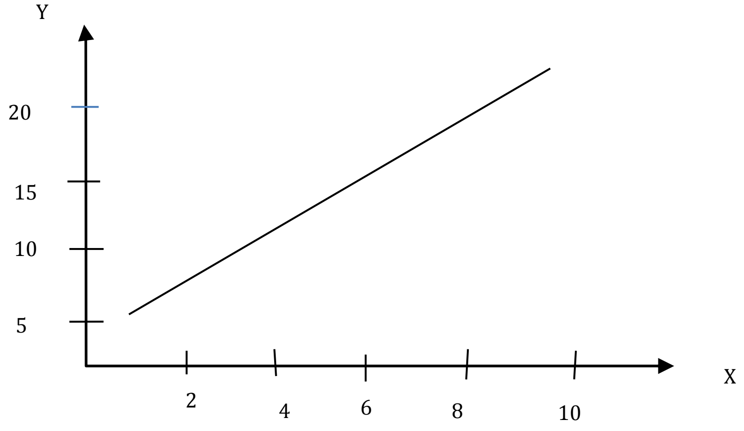
$$-1 \le r \le +1$$

په لنډه توګه که $r = 1$ وی نو ددوه متحولینو تر منځ ارتباط کاملاًمثبت اوکه $r = -1$ نوارتباط یی کاملاًمنفی اوکه $r = 0$ وی نو د دواړو متحولینو ترمنځ ارتباط وجود نه لری

د بیلګی په ډول: که د یو شمیر زده کوونکو د دوو ازموینوپایلی په پام کی ونیسو د لومړۍ ازموینی پایلی په x او ددویمی ازموینی پایلی په y وښیو،د x او y تر منځ رابطه دقایمو مختصاتو په افقی اوعمودی محور باندی ښودلای شو داسی چی دنمرو هره جوړه په قایمو مختصاتو کی یوه نقطه ورکوی .

دنمرو لا ندی جدول د هغی د ګراف سره په څوحالاتوکی په پام کی نیسو:

X	1	3	4	6	7	8	10
Y	4	8	10	14	16	18	22

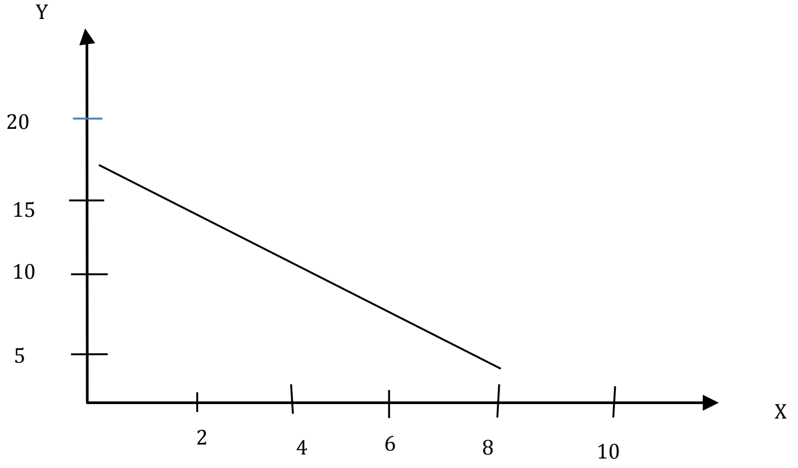


(c) ketabton.com: The Digital Library

ګراف ښيې چې نقطې په يومستقيم خط قرار لرې او د دوی ترمنځ رابطه $r = 1$ ده.

اوکه دا جدول په پام کی ونيسو:

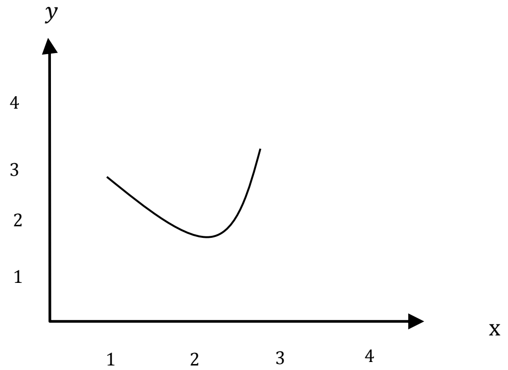
X	1	2	4	5	7	8
Y	16	14	10	8	4	2



په دی شکل کی د X او Y ترمنځ رابطه منفی ده یعنی $r = -1$

په نورو حالا تو کی چې نفطې په بشپړ توګه په مستقيم خط نه وی ،کيد ای شی چی رابطه مثبت، کيدای شی رابطه منفی او کيدای شی هيڅ رابطه موجوده نشی او يا دا چی رابطه د منحنی خط په شکل وی لکه:

X	1	2	3	4
Y	3	2	4	5



استاد عبدالاحد ارين

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترسیم شوی کرښه چې هرڅومره مستقیمه وی، یا مستقیم والی ته نږدی وی، دارتباط د درجې لوړوالی ښکاره کوی، که چیری د دوه متحولینو ترمنځ دبشپړ والی رابطه وجود ولری ټولی نقطی (قیمتونه) په یو مستقیم قرار نیسی، په داسی حالت کی د مستقل متحول له مخی د تابع متحول د تګلوری او قیمتونو پیشګویی ډیره اسانه ده، یعنی د بعدی قیمتونودپیش بینی لپاره صرف له Y سره د یوموازي په رسمولو موږ د X مربوط قیمت پیدا کولی شو، مګر په عمل کی د کرنی په سکتور کی ځینی وخت د دوو متحولینو تر منځ رابطه مکمله نه وی،یعنی ټول نقاط په یوه مستقیم نه واقع کیږی، نو په داسی مواردو کی د پیشګویی لپاره مهمه خبر ه دا ده چې موږ داسی نقاط په ښه کړای شو، چی تر ممکنه حده د X د قیمتونو له مخی د Y پیشګویی خطا اصغری وی، نو که چیږی داسی فرض کړو چی $\hat{Y}$ پیشګویی شوی قیمتونه (نقاط) موجودوی، نو د واقعی (Y) قیمتونو او $\hat{Y}$ ترمنځ تفا وت ته د پیشګویی خطا ویل کیږی چی هغه په لاندی ډول ښودل کیږی .

$$e = Y - \hat{Y}$$

کله چی له $\hat{Y}$ څخه Y کوچنی وی، نو د پیشګویی خطا منفی ځواب ورکوی، خو د دی برعکس مثبت ځواب راوځی او که دواړه قیمتونه برابر وی، ځواب صفر یعنی خطا هیڅ وجود نه لری،

مثال: د یو زده کوونکی د نمرو پیش بینی د ورکړشویو معلوماتو په اساس .

X	Y	X^2	Y^2	X·Y	$\hat{Y}$	e	$(Y-\hat{Y})^2$
7	19	49	369	133	18.4	0.6	0.36
6	15	36	225	90	16.6	-1.6	2.56
5	17	25	289	850	14.8	2.2	4.84
4	13	16	169	52	13.0	0	0
4	11	16	121	44	13.0	-2.2	4
3	13	9	169	39	11.2	1.8	3.24
2	7	4	49	14	9.4	-2.4	5.76
1	9	1	81	9	7.6	1.4	1.96
=32$\sum X$	=104$\sum Y$	=156$\sum X^2$	=1446$\sum Y^2$	Y=466$\sum X\cdot$	=104$\sum \hat{Y}$	=0$\sum e$	$\sum(Y-\hat{Y})^2 = 22$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته یوه مشاهده چی د X نمره یی 4 ده، $Y-\hat{Y}=0$ شوی، چی هیڅ خطا نه بلل کیږی یوه بله مشاهده چی هلته هم $X=4$ خو $Y=11$ دی، د هغی پیشګویی شوی نمره 13 ده په دی ځای کی دلته دارتبا ط ضریب موندلو لپاره فورمول لرو.

$$r=\frac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2 \sum Y^2}}$$

دوه متحولینوخطي رابطه اومعادله:

ددي له پاره چی یو متحول دبل متحول له مخی پیشګویی کړای شی؛ نوباید د دواړو متحولینو ترمنځ دروابطو په هکله پوره معلومات ولرو یعنی لومړی د یو جمیعت د ټولو غړو په هکله چی د اندازه ګیری په هکله یی کومی پایلی موجودی وی ترکتنی لاندی ونیول شی او وروسته د دی متحول له مخی د بل متحول لپاره یشګویی کیدای شی .د پیشګویی په پروسه کی یوه مهمه فرضیه موجوده ده او هغه باید موږ ترکتنی لاندی ونیسو چی د دوه متحولینو ترمنځ خطی رابطه ده. دا رابطه د یو مستقیم خط معادله ده چي $Y=a+bx$شکل لری

په دی معادله کې (x) مستقل متحول اوY د (x) متحول تابع دي، a او b ثابت عددونه دي چې a ته عمودی قاطع (Intercept) او b د مستقل متحول ضریب دی، چې ورته د مستقیم خط میلان هم ویلاې شو. چې همدا د دوه متحولینو تر مینځ یوه خطي رابطه بلل کیږي، او ګراف یې د مستقیم خط شکل ځانته غوره کوي.

Equation for a Straight line
$Slope$ $Dependent\ v \leftarrow Y = \overset{a}{\downarrow} + \overset{\uparrow}{b} X^{\rightarrow} independent\ v$ $Intercept$

په دې ډول مونږ د (X) د بدلونونو له مخې Y پیشبیني کولای شو که چیږې (X = 0) شي؛ نو Y = a کیږی، (a) د ګراف په ساحه کې د Y د محور په امتداد قیمتونه اخلي، (b) د رسم شوې مستقیم خط میلان دي چې همدې ته د میلان ضریب وایي. پوهیږو چی د مستقیم خط دترسیم لپاره کاپی ده چی دهغه دوه نقطی وپیژندل شی ،که X ته د x_1 اوx_2 قیمتونه ورکړونو Y د y_1 او y_2قیمتونه اخلی

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_1 = a + bx_1$$

$$y_2 = a + bx_2$$

$$y_2 - y_1 = b(x_2 - x_1)$$

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

چی b دمستقیم خط میل دی همدا رنګه که $y_1 = a + bx_1$ له $y = a + bx$ څخه تفریق کړونو لرو :

$$y - y_1 = b(x - x_1) \implies y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

دا د هغه مستقیم خط معادله ده چی میل او یوه نقطه یی ورکړ شوی وی .

مثال:

X	2	3	5	7	9	10
Y	1	3	7	11	15	17

ارقام ورکړشوی دی د دی ارقاموترمنځ خطی رابطه موجوده ده ،د هغی معادله په لاس راوړئ.

$$x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = 3$$

$$y_1 = 1 \quad \wedge \quad y_2 = 3$$

$$y - 1 = \frac{3-1}{3-2}(x - 2) \Rightarrow y - 1 = 2(X - 2) \Rightarrow = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y - y_1$$

$$y = 2X - 3$$

$$y = a + bx \Rightarrow y = -3 + 2x$$

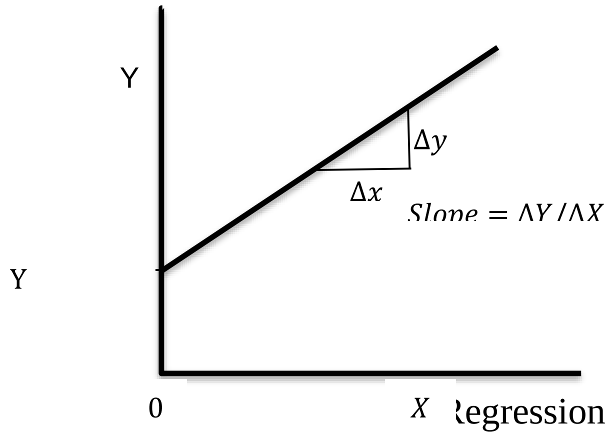
$$a = -3 \quad \wedge \quad b = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$The\ Slope\ of\ Straight\ line$
$b = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$

د خطي ګرافونو د ترسیم لپا ره دوه لارې شتون لري، لومړي دا چې مستقل متحول ته بېلا بېل قېمتونه ورکول کیږي، او له دې لارې د تابع متحول ارزښتونه یا قېمتونه ځرګندیږي بله طریقه دا ده چې په وضعیه کمیاتو کې دوه داسې ټکي چې دواړه محورونه (عمودي اوافقي) قطع کړي معلوم او دواړو ټکو تر مینځ مستقیمه کرښه رسمېږی، یعني د دغه ډول خط په لاس راوړلو لپاره صرف د دوه نقطو د قېمت موجودیت کفا یت کوي، په دې ډول روابطو کې د متحولینو تر مینځ خطي ارتباط

(Linear Correlation) وجود لري.



د میلان ضریب (Regression Co-efficient)
د میلان دوه ضریبونه وجود لري:

1. د میلان ضریب د X په Y (Regression Co-efficient of X on Y)
2. د میلان ضریب د Y په X (Regression Co-efficient of Y on X)

د میلان ضریب bxy او byx باندې ښودل کیږي.

$$b_{xy}= r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad \wedge \quad b_{yx} = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

د میلان معادلې (Regression Equations)
یادونه: هغه معا دله چی دمتحولینو ترمنځ ارتباط افاده کوی دتخمین یاسنجش دمعادلی په نامه یادیږی.

$$y = a + bx$$

د y ترټولو ښه تخمین د a او b په ارزښت پوری اړه لری که د y ترټولو ښه تخمین په $\hat{y}$ وښیو.چې،
نومعادله یی عبارت ده له $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 2... په پورتنی شکل کی داتخمین ښودل شوی دی ،لازمه ده چې a

(c) ketabton.com: The Digital Library

او b داسی تعین شی ترڅو د مشاهداتو د انحرافاتو د مربعاتومجموعه اصغری وی یعنی $\sum(y-y_i)^2$ اصغری شی. د دی موخی لپاره که 1 معادله په پام کی ونیسو لومړی لیکلای شو .

$$=\sum(a+bx) \;=\sum a+\sum bx=\sum a+b\sum x\sum y$$

$$=na+b\sum x \ldots\ldots 3\sum y$$

اوبیا د 1 معا دلی دواړه خواوی په x کی ضربوو.

$$Xy=x(a+bx) \;\Rightarrow xy=xa+bx^2$$

$$=a\sum x+b\sum x^2 \ldots\ldots 4\sum xy$$

ددریمی معادلی څخه دb قیمت په څلورمه معادله کی وضع کوو.

$$b=\frac{\sum y-na}{\sum x}$$

$$=a\sum x+\frac{\sum y-na}{\sum x}.\sum x^2\sum xy$$

دواړه خواوی په$\sum x$ ضربوو.

$$\sum x.\sum xy=a\left(\sum x\right)^2+\sum y.\sum x^2-na\sum x^2$$

$$\sum x.\sum xy=a\left[\left(\sum x\right)^2-n\sum x^2\right]+\sum y\;.\sum x^2$$

$$a\left[\left(\sum x\right)^2-n\sum x^2\right]=\sum x.\sum xy-\sum y.\sum x^2$$

$$\hat{a}=\frac{\sum y.\sum x^2-\sum x.\sum xy}{n.\sum x^2-(\sum x)^2}$$

اوس که دی دریمی معادلی څخه دa قیمت په څلورمه معادله کی وضع کړو په لاس راځی چی :

$$\mathrm{na}=\sum \mathrm{y}-\mathrm{b}\sum \mathrm{x}$$

$$\mathrm{a}=\frac{\sum \mathrm{y}-\mathrm{b}\sum \mathrm{x}}{\mathrm{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum xy = \frac{\sum x\,(\sum y - b\sum x)}{n} + \mathrm{b}\sum x^2$$

$$\mathrm{n}.\sum xy = \sum \mathrm{x}.\sum y - b\left(\sum x\right)^2 + \mathrm{nb}\sum x^2$$

$$\mathrm{n}.\sum xy = \sum \mathrm{x}.\sum \mathrm{y} - \mathrm{b}[\left(\sum \mathrm{x}\right)^2 - \mathrm{n}\sum \mathrm{x}^2]$$

$$b[\left(\sum x\right)^2 - n\sum x^2] = \sum x\,.\sum y - n\sum xy$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum xy - (\sum x)\,(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

په دی ډول په لاس راغلل: $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$

دامعادله دنارمل معا دلی (normal equation) په نامه یادیږی.

مثال:د 8 زده کوونکو د پوهنتون او لیسی د دوری د نمرو لپاره لاندی جدول جوړوو که x_i د لیسی د دوری او y_i د پوهنتون د دوری نمری وي نولیکو چی:

x_i	y_i	${x_i}^2$	$x_i.y_i$	${y_i}^2$
85	2.3	7225	195.5	5.29
65	1.2	4225	78.0	1.44
73	1.5	5329	109.5	2.25
90	1.9	1800	171.0	3.61
82	1.8	6724	147.6	3.24
80	2.0	6400	160.0	4.00
68	1.3	4624	88.4	1.69
88	2.1	7744	184.8	4.41
$\sum x_i$ =631	$\sum y_i$ =14.1	$\sum {x_i}^2$=50371	$\sum x_i\, y_i$=1134.8	$\sum {y_i}^2$=25.93

$$(\sum x_i)^2 = (631)^2 = 398161$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\sum y_i)^2 ==(14.1)^2 = 198.81$$

$$\sum x_i \cdot \sum y_i = 631 \cdot 14.1 = 8897.1$$

ددی قیمتونوڅخه په استفاده لیکلای شو:

$$\hat{a} = \frac{\sum y . \sum x^2 - \sum x . \sum xy}{n . \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{14.1(50371) - (631)(1134.8)}{8 \cdot (50371) - 398161}$$

$$= \frac{710231.1 - 716058.8}{402968 - 398161} = \frac{-5827.7}{4807} = -1.2 \Longrightarrow \hat{a} = -1.2$$

$$\hat{b} = \frac{n \sum xy - (\sum x)\ (\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{8(1134.8) - 631 \cdot 14.1}{4807} = \frac{9078.4 - 8897.1}{4807} = \frac{181.3}{4807} = 0.037$$

نو نارمل معادله عبارت ده له:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

$$\Longrightarrow \hat{y} = -1.2 + 0.037x$$

$$\hat{y} = -1.2 + 0.037 \cdot 81 = -1.2 + 2.99 \Longrightarrow \hat{y} = 1.79$$

د میلان معا دلې د میلان د کربنو الجبري افادې دي، دلته دوه د میلان معادلې وجود لري

١. دمیلان معادله د X په Y (Regression Co- efficient of X on Y)

٢.دمیلان معادله د Y په X (Regression Co - efficient of Y onX)

1. Regression equation of(X) on(Y)

$$(x - \bar{x}) = r . \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

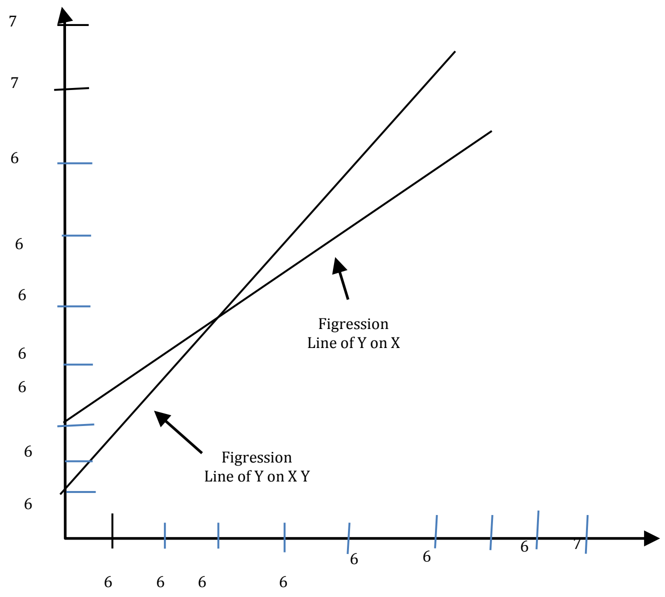
$$(x - \bar{x}) = b_{xy}(y - \bar{y})$$

2. Regression equation of (Y) on (X)

(c) ketabton.com: The Digital Library

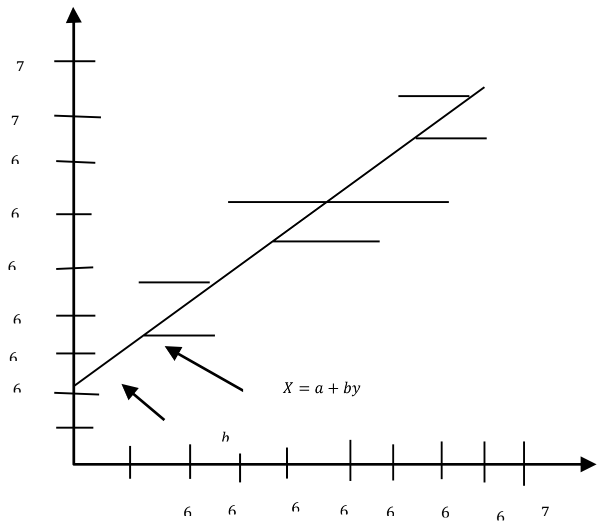
$$(y-\bar{y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$$

$$(y-\bar{y}) = b_{yx}(x-\bar{x})$$

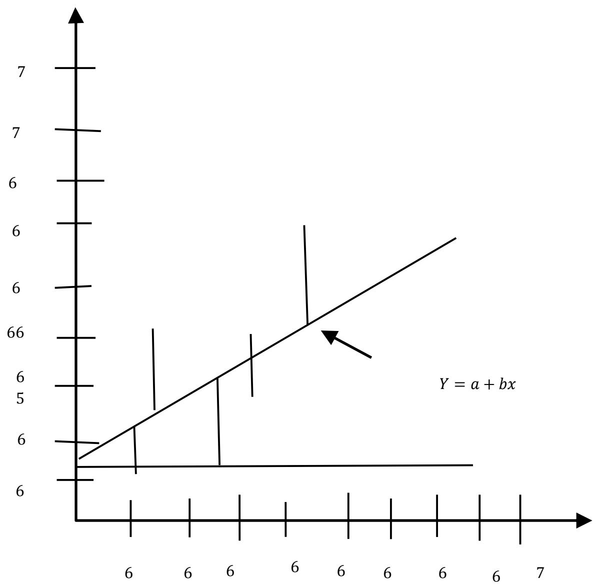


Hehght of fathers (lnches)
(graph of orlglna dat)

(c) ketabton.com: The Digital Library



Heloht of(x(y,,, ice)is minimum



Helots of(x(y,,, ice)is minimum

Regression of y on x $\sum(y - yc)^2$ *isminlmum*

1. **بېلګه:** لاندي د عرضي او تقاضا د ارقامو لپاره د پیوستون ضریب، د میلان ضریب او دمیلان معادلي محاسبه کړئ؟

Supply	400	200	700	100	500	300	600

(c) ketabton.com: The Digital Library

Demand	50	60	20	70	40	30	10

حل:

X	Y	dx	dx^2	Dy	dy^2	Dxdy
400	50	0	0	10	100	0
200	60	-200	40000	20	400	-4000
700	20	300	90000	-20	400	-6000
100	70	-300	90000	30	900	-9000
500	40	100	10000	0	0	0
300	30	-100	10000	-10	100	1000
600	10	200	40000	-30	900	-6000
2800	280	0	280,000	0	2800	-24000

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2800}{7} = 400$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{280}{7} = 40$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{n}} \sqrt{\frac{280000}{7}} = \sqrt{40000} = 200$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (Y-\bar{Y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum dy^2}{n}} \sqrt{\frac{2800}{7}} = \sqrt{400} = 20$$

$$r = \frac{\sum dx.dy}{n.\sigma_x.\sigma_y} = \frac{-24000}{7 \times 200 \times 20} = \frac{-24000}{28000} = -0.857$$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

Regression coefficient of X on Y

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = -0.857\frac{200}{20} = -8.57$$

Regression coefficient of Y on X

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = -0.857\frac{20}{200} = -0.0857$$

Regression Equation of X onY

$$(X - \bar{X}) = b_{xy}(Y - \bar{Y}) \Rightarrow (X - 400) = -8.57(Y - 40)$$

$$X - 400 = -8.57Y + 342.8$$

$$X = -8.57Y + 724.8 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (I)$$

Regression Equation of Y on X

$$(Y - \bar{Y}) = b_{yx}(X - \bar{X}) \Rightarrow (Y - 40) = -0.0857(X - 400)$$

$$Y - 40 = -0.0857X + 34.28$$

$$Y = 74.28 - 0.0857X \quad \dots\dots\dots\dots\dots (II)$$

2. **بیلګه:** د خاوند او ښځي د عمرونو تر منځ د پیوستون ضریب 0.80 دی، د خاوند اوسط عمر 25 کاله او د ښځې اوسط عمر 22 کاله و، دلته معیاري انحرافونه 4 او 5 کلونه وو نو:
   a. د میلان معادلي يې تشکيل کړئ
   b. د خاوند عمر په هغه صورت کې پیدا کړئ چې ښځه 18 کاله عمر ولري
   c. د ښځې عمر پيدا کړئ په هغه صورت کې چې خاوند يې 29 کاله عمر ولري

$$r = 0.8\,, \quad \bar{x} = 25 \quad , \bar{Y} = 22 \quad , \quad \delta_x = 4 \quad , \delta_y = 5$$

Regression Equation of X onY

$$(X - \bar{X}) = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \bar{Y}) \Rightarrow (X - 25) = 0.8\frac{4}{5}(Y - 22)$$

$$X - 25 = 0.64Y - 14.08 \Rightarrow X = 0.64 - 14.08 + 25$$

$$X = 0.64Y + 10.92 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (I)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Regression Equation of Y on X

$$(Y-\bar{Y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\bar{X}) \Rightarrow (Y-22) = 0.8\frac{5}{4}(X-25)$$

$$Y-22 = 1(X-25) \Rightarrow y-22 = X-25$$

$$Y = X-3 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (II)$$

Age of husband when wife age is 18

$$X = 0.64Y + 10.92 = 0.64(18) + 10.92$$

$$\Rightarrow 11.52 + 10.92 = 22.44$$

Age of wife when husband age is 29

$$Y = X-3 \Rightarrow 29-3 = 26$$

3. بېلګه: که چېرې ارقام په لاندې ډول درکړل شوي وي، د میلان معادلې د x په y او د y په x پیدا کړئ.

$$r = 0.97\,,\ \bar{x} = 66\,,\bar{Y} = 133\,,\ \sigma_x = 3.32\,,\sigma_y = 14.2$$

Regression Equation of X onY(I)

$$(X-\bar{X}) = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\bar{Y}) \Rightarrow (X-66) = 0.97\frac{3.32}{14.2}(Y-133)$$

$$X-66 = 0.2267(Y-133) \Rightarrow X-66 = 0.2267Y-30.16$$

$$X = 0.2267Y + 35.84 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (I)$$

Regression Equation of Y on X(II)

$$(Y-\bar{Y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\bar{X}) \Rightarrow (Y-133) = 0.97\frac{14.2}{3.32}(X-66)$$

$$Y-133 = 4.149X-273.834 \Rightarrow y = 4.149X-273.83+133$$

$$Y = 4.149X-140.834 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (II)$$

4. بېلګه: د یوې جوړونکې تصدۍ د یو شخصي ریکارډ څخه لاندې ارقام محاسبه شوي و:

$$\sum n = 25\,,\sum X^2 = 305460\,,\sum Y^2 = 925085\,,\sum XY = 524860$$

$$,\sum X = 2645, \qquad \sum Y = 4620$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

محاسبه کړئ؟

a. معیاري انحراف او د پیوستون ضریب
b. د میلان معادله پیدا کړئ، چې Y څخه تخمین شوي وي کله چې $X = 8$ وي.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2} = \sqrt{\frac{305460}{25} - (\frac{2645}{25})^2} = \sqrt{12218.4 - 11193.64}$$

$$= \sqrt{1024.76} = 32.01$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\frac{\sum y}{n})^2} = \sqrt{\frac{925085}{25} - (\frac{4620}{25})^2} = \sqrt{37003.4 - 34151.04}$$

$$= \sqrt{2852.36} = 53.41$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)\left(\frac{\sum y}{n}\right)}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{\frac{524860}{25} - \left(\frac{2645}{25}\right)\left(\frac{4620}{25}\right)}{30.01 \times 53.41}$$

$$= \frac{20994.6 - 19551.84}{1709.654} = \frac{1442.76}{1709.654} = 0.84$$

Regression Equation of X onY

$$(X - \overline{X}) = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \overline{Y}) \Rightarrow (X - 105,8) = 0.84\frac{32.01}{53.41}(Y - 184.8)$$

$$X - 105.8 = 0.84Y - 93.08 \Rightarrow X = 0.84Y + 12.08$$

$$X = 0.84Y + 12.08 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

X=0.84(46.90)+12.08

X=23.5

Regression Equation of Y on X

$$(Y - \overline{Y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \overline{X})$$

$$\overline{X} = 105.8 \qquad \overline{Y} = 184.8$$

$$(Y - 184.8) = 0.84\frac{53.41}{32.01}(X - 105.8)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Y - 184.8 = 1.41(X - 105.8) \Rightarrow Y = 35.622 + 1.41X$$

The value of (Y) when (X=23.5)

Y=35.622+1.41(23.5)=68.90

5. بیلګه: که چیري د 200 پلارونو اوسط لوړوالی د 2.5inches معیاري انحراف سره 67.5 inches وي، او د دوي د زامنو اوسط لوړوالي 2.6inches د معیاري انحراف سره 68.2inches وي او د دوي تر منځ د پیوستون ضریب 0.65inches وي د میلان خط معادله یې حاصله کړئ؟

Here $r = 0.65\ ,\ \bar{x} = 67.5\ ,\bar{Y} = 68.2\ ,\ \sigma_x = 2.5\ ,\sigma_y = 2.6$

Regression Equation of X on Y(I)

$$(X - \bar{X}) = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \bar{Y}) \Rightarrow (X - 67.5) = 0.65\frac{2.5}{2.6}(Y - 68.2)$$

$$X - 67.5 = 0.625(Y - 68.5) \Rightarrow X - 67.5 = 0.625Y - 42.625$$

$$X = 0.625Y - 42.625 + 67.5$$

$$X = 0.625Y + 24.875 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (I)$$

Regression Equation of Y on X(II)

$$(Y - \bar{Y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \bar{X}) \Rightarrow (Y - 68.2) = 0.65\frac{2}{2.5}(X - 65.5)$$

$$Y - 68.2 = 0.676(X - 67.5) \Rightarrow y - 68.2 = 0.676X - 45.6$$

$$Y = 0.676X - 45.63 + 68.2$$

$$Y = 0.676X + 22.57 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (II)$$

د تشخیص ضریب (co-efficient of Determination)

مخکې له دې چې د تشخیص ضریب باندې بحث وکړو نو لومړی باید مجموعي انحراف و پیژنو:

مجموعي انحراف (Total variation)

مجموعي انحراف د Y او $\bar{Y}$ تر منځ د انحراف د مربعاتو د مجموعې څخه عبارت دي.

$$\text{Total variation} = \sum(Y - \bar{Y})^2$$

مجموعي انحراف په دوه برخو ویشل کیږي، یو یې تشریح شوي انحراف (Explained variation) او بل یې نا تشریح شوي انحراف (Unexplained variation) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشریح شوي انحراف (Explained variation)
تشریح شوی انحراف د پیشبني شوي $\hat{Y}$ او حسابي اوسط $\overline{Y}$ د انحراف د مربعاتو له مجموعي څخه عبارت دی.

$$Explained\ variation = \sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2$$

نا تشریح شوي انحراف (Unexplained variation):
نا تشریح شوي انحراف د ور کړ شویو قیمتونو Y د او پیشبیني شوي $\hat{Y}$ د انحراف د مربعاتو له محموعي څخه عبارت دی.

$$Unexplained\ variation = \sum(Y - \hat{Y})^2$$

نو مجموعي انحراف د تشریح شوي او نا تشریح شوي انحرافاتو له مجموعي څخه عبارت دی.

Total variation = Explained variation+ Unexplained variation

$$\sum(\mathrm{Y} - \overline{\mathrm{Y}})^2 = \sum(\hat{\mathrm{Y}} - \overline{\mathrm{Y}})^2 + \sum(\mathrm{Y} - \hat{\mathrm{Y}})^2$$

مخکي ذکر شو چې د پیوستون ضریب د دوه متحولینو تر منځ د رابطي یو مقیاس څخه عبارت دی او په (r) توري ښودل کیږي د لاندي فورمول په اساس یې پیدا کولای شو.

$$r=\pm\sqrt{\frac{\sum(\hat{\mathrm{Y}}-\overline{\mathrm{Y}})^2}{\sum(\mathrm{Y}-\overline{\mathrm{Y}})^2}}$$

دا د تابع متحول د انحراف لپاره یو مقیاس دی کوم چې د میلان د کرښي او د تابع متحول په واسطه تشریح شوي دې یا د تشخیص ضریب د پیوستون ضریب مربع ته ویل کیږي او په $(r)^2$ سمبول سره ښودل کیږي.

$$\mathrm{r}^2 = \frac{\text{Explained variation}}{\text{Total variation}} = \frac{\sum(\hat{\mathrm{Y}} - \overline{\mathrm{Y}})^2}{\sum(\mathrm{Y} - \overline{\mathrm{Y}})^2}$$

د تشخیص د ضریب متبادل شکل د محاسبي لپاره په لاندي ډول دي.

$$\mathrm{r}^2 = \frac{\mathrm{a}.\sum \mathrm{Y} + \mathrm{b}\sum \mathrm{XY} - \frac{(\sum \mathrm{Y})^2}{\mathrm{n}}}{\sum \mathrm{Y}^2 - \frac{(\sum \mathrm{Y})^2}{\mathrm{n}}}$$

تشخیص ضریب(co-efficient of Determination) بیا عبارت دی له $(1.00 - \mathrm{r}^2)$ څخه

$$\Rightarrow 1 - r^2 = 1 - \frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2}$$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. بیلګه: لاندي فرضي د میلان موډل په نظر کې و نیسی.

X	1	2	3	4	5
Y	10	8	12	16	20

د میلان د کرښي معادله عبارت ده له $\hat{Y} = 4.8 + 2.8X$

لومړی مرحله: پیشبني شوي ارزښتونه $\hat{Y}$ پیدا کوو.

For/ x=1$\Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(1) = 7.6$

For/ x=2$\Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(2) = 10.4$

For/ x=3$\Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(3) = 13.2$

For/ x=4$\Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(4) = 16.0$

For/ x=5$\Rightarrow \hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(5) = 18.8$

نو ارزښتونه په دي بیلګه کې په لاندي ډول دي.

X	Y	$\hat{Y}$
1	10	7.6
2	8	10.4
3	12	13.2
4	16	16.0
5	20	18.8

دوهمه مرحله: د Y د ارزښتونو اوسط پیدا کوو.

$$\hat{Y} = \frac{10 + 8 + 12 + 16 + 20}{5} = 13.2$$

دریمه مرحله: مجموعي انحراف $\sum(Y - \bar{Y})^2$ پیدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(10-13.2)^2 = 10.24$$

$$(8-13.2)^2 = 27.04$$

$$(12-13.2)^2 = 1.44$$

$$(16-13.2)^2 = 7.84$$

$$(20-13.2)^2 = 46.24$$

$$\sum(\mathrm{Y}-\overline{\mathrm{Y}})^2 = 92.8$$

خلورمه مرحله: تشریح شوی انحراف $\sum(\widehat{\mathrm{Y}}-\overline{\mathrm{Y}})^2$ پیدا کوو.

$$(7.6-13.2)^2 = 31.36$$

$$(10.4-13.2)^2 = 7.84$$

$$(13.2-13.2)^2 = 0.00$$

$$(16.0-13.2)^2 = 7.84$$

$$(18.8-13.2)^2 = 31.36$$

$$\sum(\widehat{\mathrm{Y}}-\overline{\mathrm{Y}})^2 = 78.4$$

پینځمه مرحله: نا تشریح شوي انحراف $\sum(\mathrm{Y}-\widehat{\mathrm{Y}})^2$ پیدا کوو.

$$(10-7.6)^2 = 5.76$$

$$(8-10.4)^2 = 5.76$$

$$(12-13.2)^2 = 1.44$$

$$(16-16)^2 = 0.00$$

$$(20-18.8)^2 = 1.44$$

$$\sum(Y-\hat{Y})^2 = 14.4$$

Total variation = Explained variation+ Unexplained variation=

(c) ketabton.com: The Digital Library

=92.5=78.4+14.4

$$r^2 = \frac{78.4}{92.8} = 0.845$$

د تشخیص ضریب معمولاً د فیصدی په وسیله تشریح کیږي؛ نو په دي وجه r^2 =84.5% څخه عبارت دی، بله لاره دا ده چي د پیوستون ضریب مربع کړو.

$$\mathrm{r} = 0.919 \Rightarrow \mathrm{r}^2 = (0{,}919)^2 = 0.845$$

نا تشخیص شوی ضریب (co-efficient of Non Determination) عبارت دی له.

$$1.00 - \mathrm{r}^2 = 1 - 0.845 = 0.155 \vee 15.5\%$$

دوهمه طریقه: د پورتني فورمول په عوض یو بل فورمول څخه هم استفاده کولای شو.

X	Y	Y^2	X.Y
1	10	100	10
2	8	64	16
3	12	144	36
4	16	196	64
5	20	400	100
$\sum x = 15$	$\sum Y = 66$	$\sum Y^2 = 964$	$\sum XY = 226$

$$\mathrm{r}^2 = \frac{a.\sum Y + b\sum XY - \frac{(\sum Y)^2}{n}}{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}} = \frac{4.8(66) + 2.8(226) - \frac{(66)^2}{5}}{964 - \frac{(66)^2}{5}}$$

$$= \frac{316.8 + 632.8 - 871.2}{964 - 871.2} = \frac{78.4}{92.8} \Rightarrow \mathrm{r}^2 = 84.5\%$$

دریمه طریقه: تر ټولو لومړۍ د پیوستون ضریب (r) محاسبه کوو اړ بیا د پیوستون ضریب مربع (r^2) کوو چي په دي ډول د تشخیص ضریب حاصلیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

X	Y	X^2	Y^2	X.Y
1	10	1	100	10
2	8	4	64	16
3	12	9	144	36
4	16	16	196	64
5	20	25	400	100
$\sum x = 15$	$\sum Y = 66$	$\sum X^2 = 964$	$\sum Y^2 = 964$	$\sum XY = 226$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2} = \sqrt{\frac{55}{5} - (\frac{15}{5})^2} = \sqrt{11-9} = \sqrt{2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\frac{\sum y}{n})^2} = \sqrt{\frac{964}{5} - (\frac{66}{5})^2} = \sqrt{192.8 - 174.24} = \sqrt{18.56}$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)\left(\frac{\sum y}{n}\right)}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{\frac{226}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)\left(\frac{66}{5}\right)}{\sqrt{2} \times \sqrt{18.56}}$$

$$= \frac{45.2 - 39.6}{\sqrt{37.12}} = \frac{5.6}{6.09} = 0.919$$

$$r = 0.919 \Rightarrow r^2 = (0.919)^2 = 0.845 \vee 84.5\%$$

د تخمين معياري خطا (Standard Error of the Estimate)

د تخمين معياري خطا په (S_{est}) سره ښودل کيږي، د Y د ارزښتونو او پیشبینی شویو ارزښتونو ($\hat{Y}$) تر منځ معياري انحراف دی د تخمين د معياري خطا لپاره فورمول په لاندي ډول دي.

Standard Error of the Estimate

$$S_{est} = \sqrt{\frac{\sum\left(Y - \hat{Y}\right)^2}{n-2}}$$

څرنګه چي د فرمول څخه معلوميږي چې د تخمين معياري خطا د معياري انحراف سره مشابه ده، بلکي دلته اوسط استعمال شوي نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه: یو څېړونکی لاندي ډېټا را ټوله کړي ده، چې په دی ډېټا کې د کاپي ماشین د عمر او د دي د مراقبت د مصارفو څرګنده رابطه ده، د میلان معادله عبارت $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x$ نو د تخمین معیاري خطا پیدا کړئ؟

Machine	Age x(years)	Monthly cost Y
A	1	62
B	2	78
C	3	70
D	4	90
E	4	93
F	6	103

لومړی مرحله: په لاندي ډول یو جدول جوړ کړئ.

Age x(years)	Monthly cost Y	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}$	$(Y - \hat{Y})^2$
1	62			
2	78			
3	70			
4	90			
4	93			
6	103			

دو همه مرحله: د میلان د کرښي معادله $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x$ استعمال کړئ او پیشبیني شوي ارزښت ($\hat{Y}$) د هر (X) لپاره محاسبه کړئ او نتیجه یې د ($\hat{Y}$) په کالم کې ولیکئ.

For/ $x=1 \Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(1) = 63.70$

For/ $x=2 \Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(2) = 71.83$

For/ $x=3 \Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(3) = 79.96$

For/ $x=4 \Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(4) = 88.09$

(c) ketabton.com: The Digital Library

For/ x=6⇒ $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(6) = 104.35$

دریمه مرحله: د هر Y نه $(\hat{Y})$ تفریق کړې او $(Y - \hat{Y})$ پر کالم کې ځای پر ځای کړئ.

$$62 - 63.70 = -1.70$$

$$78 - 71.83 = 6.17$$

$$70 - 79.96 = -9.96$$

$$90 - 88.09 = 1.91$$

$$93 - 88.09 = 4.91$$

$$103 - 104.35 = -1.35$$

څلورمه مرحله: د دریمي مرحلي کې د لاس ته راغلو ارقامو $(Y - \hat{Y})$ مربع اخلو او بیا د $(Y - \hat{Y})^2$ کې لیکوو.

پینځمه مرحله: اوس د اخري کالم مجموعه پیدا کړئ او مکمل جدول په لاندي ډول و لیکې.

Age x(years)	Monthly cost Y	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}$	$(Y - \hat{Y})^2$
1	62	63.70	−1.70	2.89
2	78	71.83	6.17	38.0689
3	70	79.96	−9.96	99.2016
4	90	88.09	1.91	3.6481
4	93	88.09	4.91	24.1081
6	103	104.35	−1.35	1.8225

شپږمه مرحله: اوس د تخمین معیاري انحراف په لاندي ډول پیدا کوو.

$$S_{est} = \sqrt{\frac{\sum(Y - \hat{Y})^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{169.7392}{6 - 2}} = 6.51$$

د تخمین معیاري خطا د یو بل فورمول په واسطه هم پیدا کولای شو چې په لاندي ډول دی.

Short- cut Method for finding Standard Error of the Estimate

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S_{est} = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - a\sum Y - b\sum XY}{n-2}}$$

حل:

لومړۍ مرحله: یو جدول جوړوو

دوهمه مرحله: د X او Y ارزښتونه حاصل ضرب پیدا کوو او نتیجه په دریم کالم کې لیکو.

دریمه مرحله: د Y د ارزښتونو مربع پیدا کوو او نتیجه یې په څلورم کالم کې لیکو.

څلورمه مرحله: اوس د دوهم، دریم او څلورم کالمونو مجموعه پیدا کوو او یو مکمل جدول جوړوو.

X	Y	X.Y	Y^2
1	62	62	3844
2	78	156	6084
3	70	210	4900
4	90	360	8100
4	93	372	8649
6	103	618	10609
	$\sum Y = 496$	$\sum X.Y = 1778$	$\sum Y^2 = 42186$

پینځمه مرحله: د رگریشن د معادلې $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x$ څخه a=55.57 او b=8.13 دی

شپږمه مرحله: اوس د تخمین معیاري خطا محاسبه کوو.

$$S_{est} = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - a\sum Y - b\sum XY}{n-2}}$$

$$S_{est} = \sqrt{\frac{42186 - (55.57)(496) - (8.13)(1778)}{6-2}} = 6.48$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخذونه

1. راسخ،ضیاالرحمن (1396) د احصائي بنسټونه، مومند خپرندویه ټولنه.
2. **اصیل، مرادعلي (1395) مبادي تیوریهای عمومي احصائیه و تطبیق آنها در اقتصاد انتشارات سعید تهران**
3. **دودیال، محمدبشیر (1390) احصائیه،ننګرهارپوهنتون، ګودر خپرندویه ټولنه.**
4. **نوري، نورالله** (1392) د احصائي اساسات، مومند خپرندویه ټولنه.
5. **ژیل ګرینون و سوزن ویو ترجمه حمزه ګنجی و مهدي ګنجی (1384) تهران،سوالان**
6. **غلام،سنایي (1390) احصائیه کابل انتشارات سعید**
7. **حمیدي،عبدالباقي (1391) احصائیه عالي، کابل انتشارات سعید**

8. Chaudhry.Sher M.(2010): Introduction to Statistcal Theory Part(I)

ILMI Kitabkhana, Lahor-pakistak

9. Chaudhry.Sher M.(2010): Introduction to Statistcal Theory Part(II)

ILMI Kitabkhana, Lahor-pakistak

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library