شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

لومړی برخه

دویم غځېدلی چاپ

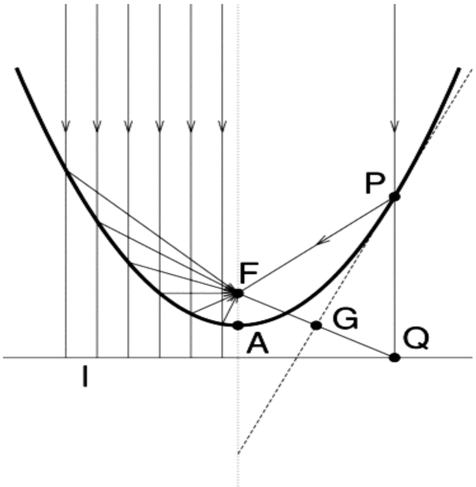
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میړی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(رياضي)

ستركتاب



دويم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرړي شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسي لږ ونده اخستې وي.

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: د شمیرپوهنه ستر کتاب(لومړی برخ)

لیکونکی: ډاکتر ماخان،، میری،، شینواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپریدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولته

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندویي ټولنې تخنیکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې لیکونکي یا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې يادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساينسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پيل کړې، تراوسه يې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هيواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په يوه مهمه غني ژبه بدليدلای شي، چې د پوهې په ګڼانه سمبال شي او په علمي او اکاډميکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بيلابيلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودريږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحاديي له حوا د ډاکتر ماخان شينواري تراوسه زياتو چاپ شويو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمير پوهنې نويو ژباړو او ليکنو او دوه ټولنيزو ليکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساينسي اثارو د خپراوي په لړ کې د يوه مهم ګام په توګه ګڼل کيدای شي او هيله ده، چې د دې برخې مينه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کڼه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتوري ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونده هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي ډپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي ډپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترمانوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي ډپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او ډپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر ځانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوي سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند یا منطق ۱

۱ ۰ ۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه ۱

۱ ۰ ۲ د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې ۳

۱ ۰ ۳ ۰ ۱ ثابتې ، اووښتوني یا واریابلې ، ترمونه ۳

۱ ۰ ۲ ۰ ۲ وینا ۵

۱ ۰ ۲ ۰ ۳ د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ ۷

۱ ۰ ٤ وینا فورم یا ۰بڼه او کوانتورونه ۱۳

۱ ۰ ٥ اړیین او پوره کیدونکي شرطونه ۲۸

۱ ۰ ٦ د شمیرکلیمه یا د لغاتو ۳۱

۱ ۰ ۷ برابرون او نابرابرون ۳۳

۱ . ۸ تمرینونه ۳۸

۲ ۰ ډیر ئ پوهنه ۳۹

۲ ۰ ۱ د ډیرئ پوهنې کلیمه ۴۰

۲ . ۲ د ډېریو ترمنځ اړیکې ۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

	برخڼېرۍ	۴۶
	د یوې ډېرۍ توان یا تواندېرۍ (توانسټ)	۴۸
۲ ۰ ۳	په ډیرۍ کې کارونې یا عملیې(۱)	۵۰
	غوڅډېرۍ یا متقاطعډېرۍ	۵۲
	د یوې ډېرۍ یا سټ کمپلیمنت	۵۷
۲ ۰ ٤	څیرونه	۵۸
	تمرینونه	۶۷
۳ ۰	د رییل ګڼونو سره د شمیرلو بنسټیزې...	۷۰
۳ ۰ ۱	د ګڼونو- یا اعدادو سیستم جوړښت	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱	پیداینتي یا طبیعي ګڼونه	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ الف	د پیداینت یا طبیعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ب	د پیداینت ګڼونو انځورونه او شمیرنه	۷۲
۳ ۰ ۱ ۰ پ	د شمیرنې بنسټیز قوان ین	۷۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	الف د ویش تیوري	۸۶
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب	غټ ګډ پرویشونی(بزګترین مقسوم علیه ...)	۸۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ ۰ ۱ ۰ ٤	رییلګڼونه	۱۰۸
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشمیرنه	۱۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳	تمرینونه	۱۳۰
۰ ٤	پوتنځ یا توان ، ريښه یا جذر	۱۴۱
۱ ۰ ٤	توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت	۱۴۱
۲ ۰ ٤	ريښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره	۱۴۴
۳ ۰ ٤	توان د رییلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره	۱۵۱
٤ ۰ ٤	ټولګه	۱۵۲
۰ ٥	لوګاریتم	۱۵۸
۱ ۰ ٥	د لوګاریتم کلیمه	۱۵۸
۳ ۰ ٥	ټولګه	۱۶۶
۰ ٦	ګونومتري	۱۶۹
۱ ۰ ٦	بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۱	ټکی او کرښه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۲	کونج	۱۷۱
٦ ۰ ۱ ۰ ۳	درېګوډئ	۱۷۴
٤ ۰ ۱ ۰ ٤	کونکروانیخ او ورته والی	۱۷۸
٦۰ ۱ ۰ ٥	ولاړکونجیز دریګوډئ	۱۸۴
۲ ۰ ٦	په ولاړکونجیز دریګوډئ کې د ...	۱۸۸
۳ ۰ ٦	په یوونګردئ کې د کونج بلواک ..	۱۹۰
٤ ۰ ٦	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ، ٥	تریګنومتریکي کتمتوالی	۲۰۵
۶ . ۵	تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
۰۷	کمپلکس ګنونه	۲۲۲
۰۸	د ښووني یا ثبوت متودونه	۲۳۵
۸ ، ۱	سیده ښوونه	۲۳۵
۸ . ۲	ناسیده ښوونه	۲۳۷
۸ ، ۳	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
۹	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
۱ ، ۹	لاینیز برابرون	۲۴۴
۱۰	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
۱۰ ، ۱	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
۱۰ ، ۲	د بینوم ځله ونه	۲۶۷
۱۰ ، ۳	د بینوم جمله	۲۷۰
۱۰ ، ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
۱۰ ، ٤ ، ۱	پرموتیشن	۲۷۵
۱۰ ، ٤ ، ۲	واریيشن	۲۸۰
۱۰ ، ٤ ، ۳	کمبینیشن	۲۸۶
۱۰ ، ٤ ، ٤	د پرموتیشن، واریيشن او	۲۹۱
۱۱ ،	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۵	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲. ۴	د ګاوس لګوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	ځلورۍ ئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۰ ۲۰ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وییتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	ځلورۍ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . ۳	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
۱۲ . ٤	د ریښي برابرونونه	
۱۳	ترانسڅیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱۳ . ۱	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۱۳ . ۲	اکسپوننشل- یا په جګګې برابرونونه	۳۸۰
۱۳ . ۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱٤ . ۱	نابرابرونونه	۳۹۶
۱٤ . ۱ . ۱	بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین	
۱٤ . ۱ الف	اینتروال	۳۹۷
۱٤ . ۱ . ۲	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
۱٤ . ۱ . ۳	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
۱٤ . ۱ . ٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
۱٤ . ۲	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱٤ . ۲ . ۱	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
۱٤ . ۲ . ۲	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۱٤ . ۲ . ۳	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰
۱۵ . ۱	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶
۱ ۰ ۱٦ کرښه ۴۶۶
۲ ۰ ۱٦ ګردۍ ۴۷۵
۳ ۰ ۱٦ ایلیپسې ۴۸۲
٤ ۰ ۱٦ هیوپربول ۴۸۷
٥ ۰ ۱٦ پارابول ۴۹۲
٦ ۰ ۱٦ ټولګه ۴۹۴
۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲
۱ ۰ ۱۷ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲
په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲
۲ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹
۳ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲
٤ ۰ ۱۷ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷
٥ ۰ ۱۷ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....
۱ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱
۲ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴
٥ ۰ ۱۷ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸	پرلپسې او پرلپسې لړۍ	۵۳۳
۱۸۰۱	پیل	۵۳۳
۱۸۰۲	د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه	۵۳۴
۱۸۰۲۰۱	مونوتوني پرلپسې	۵۴۲
۱۸۰۲۰۲	اریتمیتیکي پرلپسې	۵۴۵
۱۸۰۲۰۳	هندسي پرلپسې	۵۴۷
۱۸۰۲الف	لړۍ	۵۵۰
۱۸۰۲ الف ۰۱	هندسي لړی	۵۵۵
۱۸۰ ۲ الف ۲	اریتمیتیکي لړۍ	۵۵۷
۱۸۰٤	د پرلپسې او لړیو د پولې ...	۵۵۸
۱۹	د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه	۵۷۸
۱۹۰۱	بنسټیزې کلیمې	
	د پولو یا حدونو خویونه	۵۸۶
	د راشنل، کسري یا نسبتي	۵۹۲
	د مشلثاتي یا دریکوڼي کچ توابعو پولې	۵۹۶
	ناپرېکیدنې	۶۰۴
۱۹۰۲	په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې	
۱۹۰۳	د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه	۶۱۰
۱۹۰٤	د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي ټولګه ۶۱۶

۲۰ دفرنښیالشمیرنه ۶۲۶

د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت) ۶۲۶

په یوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸

د لحضوی(سترګورپ) تغیر... ۶۳۰

کمښتوېش (تقسیم تفاضل؟) ۶۳۱

دفرنشلوېش یا رابیلیدنه یا مشتق ۶۳۳

کمښتوېش او مشتق یا رابیلیدنه ۶۳۶

د x_o په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳

د تانجنت پیژند او خویونه ۶۴۷

د تانجنت او عمود یا ولاړ ټولیز مساوات ۶۵۰

په بیدیا کې جګوالی ۶۵۲

۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت یا جګیدنې غوره والی

۲۰ ۰ ۲ د فرنښیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې ۶۵۶

د درېګوډیزو یا مثلثاتي ۶۶۲

د اکسپوننشل یا په جګ توابعو.... ۶۷۰

د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې ۶۷۶

د ایمپلیښیت توابعو مشتف ۶۸۳

د بنسټیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه ۶۸۸
د يوې تابع د مشتق قابليت ۶۹۱
د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق ۶۹۸
۲۰ .۳ د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه ۷۰۱
د رول قضيه ۷۱۰
د وايرشتراس قضيه ۷۱۱
۲۰.٤۰ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی
د دفرنشل منځ ارزښت قضيه ۷۱۲
يوعبزيزې توابع ۷۱۵
ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰
د انعطاف – يا اوړونټکی ۷۲۴
د کوږ يا منحني بحث يا خبرې ۷۳۳
ناټاکلي حدونه يا پولې ۷۴۶
د برنولي او د لو پيتال ۷۵۰
۲۰ ۰ ۵ د غتو ګټو پرابلم ۷۵۷
تمرينونه ۷۶۷
په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸
۲۱ انتيګرالشميرنه ۷۸۷
پيلراوړنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱ انتیګرالشمیرنه ۷۸۹

د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال ۷۹۰

بنسټیزه یا لومړنی تابع ۷۹۴

سطحه او لومړنی تابع ۷۹۶

ناټاکلی انتیګرال ۷۹۹

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه ۸۱۲

تکمیلیدونکي بنسټونه ۸۱۴

د ټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي ... ۸۱۵

د انتیګرالوني قاعدې ۸۱۷

د اکسپوننشل توابعو انتیګرال ۸۱۹

د لوګاریتمي توابعو انتیګرال ۸۱۹

بدلون قانون ۸۲۱

توابع، چې بې د بدلون له لارې... ۸۲۷

ټوټه انتیګرالونه ۸۳۲

د ټوټه انتیګرالوني لار ۸۳۴

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال ۸۳۸

ناپای(مبهم) انتیګرال ۸۴۱

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې ۸۵۲

د انتیګرالشمیرنې استعمال ۸۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مهربان او بخښونکي خدای(ج) په نامه

سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چي پیل لري نو پاي هم باید ولري، د داسي یوه کار پیل او پای ته ځما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چي مېښت یې زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چي په یوه کار پیل وکړي، ځکه چي سملاسي ورته څرګندیږي، چي په هیڅ شي کی څموږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوي په جوړښتیزه لور، په وراني کی مو د نړی سرکښي ځانته ګټلی.
موږ ګورو چي په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چي تراوسه حتی هغه بنستیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چي مسلك ته اسانتیاوي پیښوي. له کومه ځاي چي ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دي هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او ستتونځي یي نه دي ګاللي، چي دلته طبعاً افراد ملامت نه دي، بلکه څموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنی او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودي دنده د حکومتونو ده، چي څموږ په هیواد کی څموږ حکومتونو خپل ځانونه د دي کار جوګه نه دي ګڼلي، کیدی شي چي ووایو چي په ریښتیني یي ددي کار مخه هم نیولی ده، چي په افغاني ژزبه دي څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار ځکه په افغاني او په ولسی افغاني لیکل شوی، چي زه په مسلکي اړخ کی یواځي، په علمي توګه په الماني ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

نومونه چې له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچې په ښوونځي کې څما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمې په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومې او یا کومې چې ماته معلومې دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکې ښکاریدلې .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتی څانګې لري. دا چې څما په فکر دا متآسفانه نه یواځي زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبې په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چې په دې بنسټیزه توګه په درسي او تمریني ډول سرته رسیږي.

نن نړۍ او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چې پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستوځوبیو (د ستونځو حل باندې) پیل نه دی کړی ، که دا په هره څانګه کې هم وي. څموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چې په ټولو پوهنو کې تغبنتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کې د پوهیدلو بنسټیزه رینبه جوړه وي، که دا پوهنې اجتماعي وي او که طبعي (پیدایښتی) یعنې که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك، بیله شمیر پوهنې یې وده او په پوهیدنه ناشونې ده. شمیرپوهنه له بلې خوا یواځنې خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کې ونیوه او لیکل یې د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متآسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسې یوه کتاب لیکنې مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسې لیکنې څخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چې څموږ د هیواد ستنځې نورې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چې خپلې د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم
– د لیکونکې راهڅونې دلیلونه یا د شوق رابیدارول
– دداسې کتاب لیکنه په هغه وخت کې شونې کیږي، چې د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنې د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یې هم نه لرم چې پیسې وګټم.

– وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چې له دې د مخه مې په سیاسي هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس مې خپل مسلك ته رامخه شوه.

– ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلې ټولنې او د خپلې ټولنې د خلکو سره مینه ولرې او په همدې ډول، د خپلې ټولنې او د ټولنې د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چې یواځې د خوبونو ریښتیا کولو لپاره په داسې کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځې په پوره مینه په غاړ واخستلې او دا کار مې په پوره مینه سر ته ورساوه.
–په دې برسیره لیکونکی دې وظیفې ته هم باید شعوري وي، چې دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسې لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غبرګوالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خو د داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیو (ستونځو حل) په خاطر، چی موږ افغانان بی په ځانګړی توګه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځي د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات يي ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځی:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

۱ – دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری څخه نیول شوې، زیندی شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندی پاتی شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چی دا کرښي دا مطلب نه لري، چی ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کمیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پرینښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپرینښوولو حق څوك نه لري، نه دولت او نه افراد . دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوك باید ګیله من نه وي.

افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشی یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژبه یواځې د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کې پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لاربښودې او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهې د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبې پرمخوده یو بل باندې سیده او په څټ اغیز من دي، چې ولس وروسته پاتې وي، ژبه یې وروسته پاتې ده او که یوه ژبه وروسته پاتې وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد ځان کې نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چې کم له کمه بنسټیزې کلیمې په افغاني واړوم، چې دا کار مې په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله مې زیات فکر هم په کار اچولی چې مسلکي بنسټیزې کلیمې په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چې ټاکل شوي، داسې نومونه دي، چې د هغه شي ماهیت په کې روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چې په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.
په پوهنه کې له بلې ژبې تیریدنه ناشونې ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چې افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځې هلته کیږي، چې یوه ژبه له پوهنې وروسته پاتې وي.
د پوهنیزې ودې سره ژبې ته د نورو ژبو لغات رانتوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چې که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهاني مروجه لغاتو ولیکم.
دا چې افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم زیندی شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبې ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبې د زیندی څخه خلاسون یا د افغاني ژبې څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغې باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوك د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسې یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.
دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولی، چې هغه مې په ټول کتاب کې شاید اصلاح کړې نه وي، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځې نه پیښوي لکه د بیلګې په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلی وه، چې وروسته مې شمیر پوهنې بانډې واړوله، شاید په ټولو ځایونو کې مې نه وي شمیرپوهنه کړي. دریګوډې ما لمړی دریکونجې لیکلی وو، چې دا هم شاید د کتاب په اوږدوکې نه وي اصلاح شوی، داسې نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چې د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځې ه پیښوي.

۲ – تخنیکي ستونځې:
د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځي، چې څمږ لپاره د داسې کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکي ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودي، نو له دې امله مې د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته مې سریښ کړې، چې کله کږې هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چې دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکې او چاپوونکې به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښې څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطې به شوي وي،، خو په پوهیدلو کې به ستونځې پیښې نه کړي، د هغې بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.
ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

حرکت کی برکت اېښوولی دی.
لنډه دا، چې ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چې زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره مې نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملګرو په فشار ما ، ځما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم — کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چې دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیدایښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
ځنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

څلورم — دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنستیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځاي کړم.
ما د بنستیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعنې منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي څیړل شوی.
ځما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اومه اتمه او نهمه برخه څموږ په هیواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیري پوهی سره اشناییته هم خورا ضرور ده

شپږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کي د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.

ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراګټوره مشوره هم راکړي.
زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاتړ کاوه، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یی کله کله ویل، چی ګوندې پیسی می باید ګټلی وی ، خو په دې پوهیږي، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنګه شوه نو ویل به یي چی نور دا د چرګانو ټونګي باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن ښاپیری څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی ښه تکړه ورته د لوي خداي(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

المان د پنځم ټولګی ښخه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی ترلی چاپ ته ورکړي شي.
زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.
که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په څانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. ځما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما ځخه لټ بل څوک نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

(c) ketabton.com: The Digital Library

افغاني ، يوناني او الماني الف بی

ا	ب	پ	ت	ټ	ث	ج	چ
څ	ځ	ځ	ح	خ	د	ډ	ذ
ر	ړ	ز	ژ	ږ	ص	ض	ط
ظ	ع	غ	ف	ك	ګ	ق	ل
م	ن	و	ه	ي	ی	ې	ۍ ئ

يونانی الف بی

Α	α	*Α α*	Alpha
Β	β	*Β β*	Beta
Γ	γ	*Γ γ*	Gamma
Δ	δ	*Δ δ*	Delta
Ε	ε	*Ε ε*	Epsilon
Ζ	ζ	*Ζ ζ*	Zeta
Η	η	*Η η*	Eta
Θ	ϑ	*Θ ϑ*	Theta
Ι	ι	*Ι ι*	Iota
Κ	κ	*Κ ϰ*	Kappa
Λ	λ	*Λ λ*	Lambda
Μ	μ	*Μ μ*	My
Ν	ν	*Ν ν*	Ny
Ξ	ξ	*Ξ ξ*	Xi
Ο	ο	*Ο ο*	Omikron
Π	π	*Π ϖ*	Pi
Ρ	ρ	*Ρ ϱ*	Rho
Σ	σ	*Σ σ*	Sigma
Τ	τ	*Τ τ*	Tau
Υ	υ	*Υ υ*	Ypsilon
Φ	φ	*Φ φ*	Phi
Χ	χ	*Χ χ*	Chi
Ψ	ψ	*Ψ ψ*	Psi
ω	ω	*Ω ω*	Omega

الماني الف بي

A	a	𝒜	𝒶	𝔄	𝔞
B	b	ℬ	𝒷	𝔅	𝔟
C	c	𝒞	𝒸	ℭ	𝔠
D	d	𝒟	𝒹	𝔇	𝔡
E	e	ℰ	ℯ	𝔈	𝔢
F	f	ℱ	𝒻	𝔉	𝔣
G	g	𝒢	ℊ	𝔊	𝔤
H	h	ℋ	𝒽	ℌ	𝔥
I	i	ℐ	𝒾	ℑ	𝔦
J	j	𝒥	𝒿	𝔍	𝔧
K	k	𝒦	𝓀	𝔎	𝔨
L	l	ℒ	𝓁	𝔏	𝔩
M	m	ℳ	𝓂	𝔐	𝔪
N	n	𝒩	𝓃	𝔑	𝔫
O	o	𝒪	ℴ	𝔒	𝔬
P	p	𝒫	𝓅	𝔓	𝔭
Q	q	𝒬	𝓆	𝔔	𝔮
R	r	ℛ	𝓇	ℜ	𝔯
S	s	𝒮	𝓈	𝔖	𝔰
T	t	𝒯	𝓉	𝔗	𝔱
U	u	𝒰	𝓊	𝔘	𝔲
V	v	𝒱	𝓋	𝔙	𝔳
W	w	𝒲	𝓌	𝔚	𝔴
X	x	𝒳	𝓍	𝔛	𝔵
Y	y	𝒴	𝓎	𝔜	𝔶
Z	z	𝒵	𝓏	ℨ	𝔷

اومیګا د پښتو وینه ↑ ک په الماني کې وینه ↑

شمیرپوهنیزې نخښې

مساوي .... $=$

نامساوي (نوروکتابونو کی) $\neq$ ($\not=$)

کوچنی له .... $<$

لوي له.......... $>$

کوچنی یا مساوي له .... $\leq$

لوي یا مساوي له .... $\geq$

ډیر کوچني .... $\ll$

ډیر لوي .... $\gg$

ورته یا متناسب........... $\sim$

کونګروانیڅ .... $\cong$

همداسی یا ښایي یا په ګوره کوي

کتیمټ................... $\equiv$

غبرګ .... $\parallel$

ناغبرګ................ $\nparallel$

ولاړ په .... $\perp$

دریګوډی .... $\triangle$

ګردی .... $\bigcirc$

نیمی یا قطر............ $\oslash$

کونج .... $\angle$

د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج $\angle(g,h)$

کرښه، له A و B ته .... $\overline{AB}$

له A و B ته لوریزه کرښه..... $\overrightarrow{AB}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده.................... AB

مطلقه ارزښت د .... $|a|$

ایماجینار یوون (واحد)....... i

د اویلرګڼ = ...2,7182818 e

پي د لودولف ګڼ π = ...3, 14149

د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي ->

ناپای.................... œ

د x فنکشن یا په واک چې بلواک مو بللی $f(x)$

(لوستل یي (f د x یا د f, x لنډ : fx)

د x څیرونه په $f(x)$: لیکو: ~~x~~ → $f(x)$ $f: x \to$

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن $h(x); g(x)$

لیمس یا پوله............... lim

تریګونومتریکي بلواک:

- ساین .... sin
- کوساین .... cos
- تانجنت .... tan
- کوتنجنت........... cot

څیکلومتریکي بلواک:

- ارکوس ساین.......... arc sin
- ارکوس کوساین ...... arc cos
- ارکوس تانجنت .... arc tan
- ارکوس کوتانجنت..... arc cot

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیدایښتي لوګاریتم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس گڼونه........... $\mathbb{C}$

رییلگڼونه .... $\mathbb{R}$

ټولگڼونه .... $\mathbb{Z}$

نامنفي ټولگڼونه یا

طبعي گڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي گڼونه .... $\mathbb{N}$

تعریفډېری .... D

ارزښتډېری........... W

حلډېری L

د ډېري A پوتنځډېری $P(A)$

ډېري............. M,N,A,B

تشډېری .... $\emptyset$

برخه ډېری...........

پورته یا لویډېری (چې بل ډېری خوندي لري)

ټولنډېری........... $\cup$

غوځډېری .... $\cap$

د A کومپلیمنت ..... CA , A'

د ډېریو ورته والی ...... $A \sim B$

د ډېریو ځل.......... $A \times B$

لوستل B اتیران A یا - ځل -

توپیرډېری : A بې له B ده $A \setminus B$

دلته: a د b پرویشونی ده یا a b ویشي $a \mid b$

د a او b غټ (خولا) ګډ په ویشونی (لنډ: غ ګ و) $ggt(a,b)$

د a او b کوچني ګډ زیاتځله (لنډ: ك ګ ځ) $kgv(a,b)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته : a د M توکی دی .... $a \in M$

او a د M توکی نه دی .... $a \notin M$

ټولنخښه (د ټولو x لپاره باور لري) $\forall$

د موجودیت نخښه: یو x موجود دی $\exists$

کونیونکشن A او B لیکو $A \wedge B$

دیسینکشن A یا B لیکو $A \vee B$

(کله کله الترناتیو)

ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي $A \Rightarrow B$

نیګیشن یا نه والی $\neg$

د A او B ویناو ورته والی یا اکویوالنت $A \Leftrightarrow B$

له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.

ماتریکس......... A نورو کتابونو کي $\|A\|$

دیترمینانت $|A|$

د a څخه n–امه ریښه $\sqrt[n]{a}$

د x اکسپوننشلبلواك

د n – فاکولتیت یعنی $n!=1.2.3....n$ $n!$

بینومځلوونی $\binom{n}{p}$

لوستل: n په p باندې

له a تر b واز اینتروال $]a,b[$

$= \{ x \mid a < x < b \}$

له a تر b بند اینتروال $[a,b]$

$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

کیڼ واز اینتروال $]a,b]$

$= \{ x \mid a < x \leq b \}$

ښی واز اینتروال $[a,b[$

$= \{ x \mid a \leq x < b \}$

د زیاتون نخښه (سیګما) $\sum_{i=1}^{n}$

که د زیاتون‌نخښه داسی وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

څلنخښه (پي) $\prod_{i=1}^{n}$

که داسی لیکل شوي وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

پرموتیشن یا بدلون $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چي اند(فکر) یا وی(لغات) ته وایی).

د وینا د تیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس(۳۸٤ تر ۳۲۲ ز۰ ک۰ ا)) له خوا کینښول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دیٍ او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله ختِه کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دیٍ نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې(متن) لرودیٍ شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشونې ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه ځرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهنی(علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور(په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګریټې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.

په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک ایښوولو (ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنۍ ژبی ویناودد څخه ګټه اخلي٠

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده٠

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي٠

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ایښوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي٠

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره (متصور؟) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسي په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغهٔ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښونې دبنسټیزو نخښؤ څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندی ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ .

۱ ۰ ۲ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمې

۱ ۰ ۲ ۰ ۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکې او د شیانو تړنې په نخښو(سومبولونو) انځوریږي.

۱ – شمیرپوهنیزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې (علامې): دا د یوه کره ټاکلې مانا لپاره نخښې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، π ، e, او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د یوې ورکړ شوې ډیرۍ یا سټ (په ډیرۍ پوهنه کې روښانه کیږي) داسې په زړه پورې توکی لپاره یوه نخښه ده، کومه چې د اووښتونویا متحولو بنسټسټ یا-ډیرۍ بلل کیږي، دا په لاتین تورو په نخښه کیږي او کله کله په اندکس(ز۰ ایندکسونو) یا پیژندنخښه index (ز۰ پیژندنخښې Indices) چې ایندکس د تورو ښنو ته راځې په نخښه کیږي۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړیکنخښې : دا د شیانو اوګنونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نخښې دي لکه $<$, $>$، $=$, $\leq$, $\geq$,

- د نښلونو،کارونو، تړنو یا عملیونخښې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-) ، ځل-(ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library

- تخنیکي نخښی : لکه سیمیکولوم (,, ,,)، نوکان ( ) او نور ډولونه یې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واریابلی(اووښتونې), ثابتی او د هغوي يوځاي ايښودل د اړيکو- ، نښلونو- ، او تخنيکی نخښو يوځاي ايښوول موخه ور يا هدفمند يو په بل زيات شي، نو يوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځیٍ٠

(۱) ثابتې((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتیزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړیدونی یا واریابلې او ترمونه

بیلګه :

الف : د 3.(2a + 1) – a + 144 یوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 3a – 6= 11x).(12 – b) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یواځې ثابتې (همغه)، اووښتونې(متحولې، واریابلې) نښلونې او تخنیکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړیکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پورې که واریابلی ولرې پیژندډیرۍ یا تعریفسټ هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو یا متحولو اصلی بنسټسټ یوه برخډیرۍ او یا هغې سره برابر برخه سټ یا - ډېرۍ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنسټډېرۍ توکی دۍ. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې یا عملیې اجرا شي، که چېرې اووښتونې یا واریابلې د پېژندډېرۍ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو(اکه: T, T_1, T_2) په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتونې یا متحولې نه لري په Tسره په نخښنه کوو او

لیکو: $T=126 + 3/4$ یا $T=126+\frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتونې یا متحولې x لري یانې $T(x) = 10 + 2x$ ۰ د
اووښتونو بنسټېدیرۍ یا –ډېرۍ دې یا د طبیعي اعدادو ډیرۍ N°وي

تعریفډیرۍ د بنسټېدیرۍ سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتونې یا واریابلی x پهٔ ځاي

یو پیدایښتې ګڼ یا طبیعي عدد 2 کیږدو، نو د ترم ارزښت دۍ : $T(2) = 14$

پ : (x+2y)/x یا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دۍ چې دوه متحولې لري او په T(x,y) سره یې په نخښنه کوو۰ د اووښتونو یا
متحولو بنسټېدیرۍ دې د پیدایښتي یا طبیعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعریفډیرۍ
N° ده۰ د y لپاره N (پیدایښتی ګڼونډیرۍN° تعریفډیرۍ لپاره ترم نه دۍ تعریف
یاپیژند نه لري)

د 0 = x لپاره ترم نه دۍ تعریف یا پیژند ند لري

د ترم $T(x,2y) = (x,y) /x$ یا $T(x,2y)=\frac{x+2y}{x}$

ارزښتشمیرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده :4 = 2 / (2+6) = T(2,3)

یادونه: د ګڼونو لپاره دې دریمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼونډیرۍ ورکړ
شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې انسان د خپل چاپيريال د ټولو شيانو او پيدايښتونو سره لاس په ګريوان دی، نو پوښتنې او هيلې رامنځ ته کيږي،غوښتنې لري او يناوې کوي، په کومو يناو کې،

چې شيان او ريښتونی(واقعيتونه) بيرته هنداره (منعکس) کيږي يا په يوه څه يا شي، چی وينا کيږي، نو موخه ترې د هغه څه ريښتون حالت يا ځانىيونه ده٠ يوه وينا په واقعيت کې ټيک هلته ريښتيا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت يا بهتره شي ځانىيونه په ريښتونې شته يا موجود وي، په بل حالت کې دا وينا ناريښتيا (غلطه) ده. موږ نيسو، چې دا څه دې په شميرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پريکړه دې پرې کيدی شي٠

پژند(تعريف) ۱ ۰ ۱ :

وينا د يوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دی)، د هغهٔ بيرته هندارونه يا منعکسونه ده٠ (دا په دې مانا، چې وينا يو شی په وينا کې همهغسی ښايي لکه څنګه چې دی له دې امله شي هندارونه يامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کيږي يا په همدې ډول په نخښه کيږي٠

يا په بل عبارت وينا د کليمو داسې هدفمند يوځايوالی يا يوځاې ايښوول دي، چې د يوه شی حالت (ځانىيونه) يا شکل او د شيانو ريښتونې اړيکی بيرته هنداره يا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه دريښتياوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي٠

يا په بل ډول :

د وينا لاندې سړی يو ژبنی يوون، يا يووالی (واحد unit ,Einheit)پوهيږي، کوم چې د شي اړيکی (د شي څرنګوالی) بيانوي٠ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وينا په کومه ژبه، په پيدايښتي (طبيعي) او که په مصنوعي ژبه ويل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وينا د طبيعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده٠

په بل او ورځني ډول: يوه وينا يوه جمله ده يا فرمول دی، چې يا رښتيا او يا نارښتيا ده٠ داسې هم ويل کيږي، چې وينا يو «رښتيارزښت » ،، رښتيا يا نا رښتيا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنې : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « رینتیا ارزښت»(رښښتیا یا نارښتیا) دی٠ نور خویونه په راتلونکی کې نه څیرل کیږي٠

ویناوې د لاتین په لویو تورو A , A* په نخښه کوو او داسې نور٠

۱ ٠ ۲ ٠ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یواځی یو ممکن « رینتیا ارزښت» لرودی شي، دا په دې نامه، چی وینا یا رینتیا ده او یا نارینتیا. (د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ)٠

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دی. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنی افاده یا وینه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چی د ویناارزښت حتمآ باید څرګند یا معلوم نه وي٠ که بالاخره ټوله پوهنه د رښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم موږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چی د هغه شي حالت (ځاننیونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چی پریکړه وشي٠

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کیږي، د رښتیا ویناو ټولګی او د نارښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف)٠

که وینا رینتیا وي، نو رینتیا ارزښت یې رینتیادی او په w سره یې ښایو، که وینا رینتیا ارزښت نارینتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا رینتیا ارزښت نارینتیا دی

تکرار : هره جمله، چی « رینتیا ارزښت» (رینتیا یا نا رینتیا) ولري، وینا بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

شميرپوهنيز سم اند(منطق) د ويناو سره سر او کار لري..

بيلګې:

غونډاله (جمله)

الف : » د کابل سين د کونړ له سين سره ګډيږي«رېښتيا وينا ده٠

ب : 3 + 4 = 7 رېښتيا وينا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا ناريښتيا- يا ناتيک وينا ده٠(د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد ياګڼونه کتلکيدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو يې ؟ « نه شي کيدی يو رېښتيا ارزښت باندې تنظيم شي٠ له دې امله وينا نه ده٠

نورې بيلګې :

ويناوې دي:

(دپيتاګوراس (فيثاغورس) جمله٠

د کاتيتونو يا د يو بل سره ولاړو يا عمودو اړخونو يا ضلعو مربعګانو (څلوريو) زياتون(جمعه) د هيپوتينوزې(اوږده اړخ قايمې زاويې ته مخامخ ضلعه يا قطر) د څلورى يا مربع سره برابر دی.

نورې بيلګې :

سرک لوند دی

ټول سپي خطرناک دي

3 > 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځای یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسیډ CO_2 وښایي

د دې پرڅېړ یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار;NaCl ;   لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنګ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیدایښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دریو بی له پاتې (باقي) نه ویشل کیږي

د وینا «رښتیا ارزښت » رښتیا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنی ښار دی

3 < 5   پنځه له دریو کوچنی دی

ټول لومړني اعداد یاګڼونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دی

هره یوه له دې ویناو « رښتیا ارزښت » نا رښتیا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوړه وایو۰

په لاندې کې به وڅېړو، چې ویناوې شته، چې نورې ویناوې د خپلې برخې په څېر په ځان کې خوندي(لنډ : خوندي) لري۰ داسې ویناوو ته یوځاېشوې یا یوځای ایښول شوې یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړی ! مرکبې ویناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بيلګه راوړو » کۀ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زياتون يا پرته جمعه په 3 ويشوړ وي، نو داعدد يا ګڼ په 3 ويشوړ دی، يانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ويشوړ ده له دې لاس ته راځي، چی پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ويشوړ دی٠

که کومه وينا په داسې ويناوو ويشوړ يا ټوټه کيدونکې نه وي، نو دې ته بيا ساده وينا ويل کيږي٠

لکه : سپين غر يوه خورا جګه څوکه لري

يوه بله بيلګه د يوځای شوې(ځنځيري) وينا لپاره

سپينغر خورا خواريکښ دی، هغه په دې پوهيږي، چی نور کار ته وهڅوي٠

څرګنده ده، چی دواړه ساده جملې د برخويناو په څير يوځاي شوي ويناوې دي: » سپينغر خورا خواريکښ دی« همدا ډول » هغه (سپيغر) پوهيږي، چی نور کارته وهڅوي«٠

دا ويناوې کيدی شي په نورو ډولونو هم يو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتياارزښت يې همغه پاتې شي٠

د بيلګي په توګه:

١ - سپينغرخورا خواريکښ دی٠ يا هغه پوهيږي، چی نور کار ته وهڅوي

٢ - ځکه، چی هغه پوهيږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپينغر خورا خواريکښ دی٠

٣ - دا چی سپينغر پوهيږي، چی نور کار ته وهڅوي ، نو سپيغر خورا خواريکښ دی٠

٤ – سره له دې، چی هغه پوهيږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواريکښ دی٠

ګورو، چی په دې ډول يو له بل توپيريدونکی تړلې يا ځنځيري، يا يوځاي شوی ويناوې جوړيږي، چی په خپله رښتياارزښت کی يو له بل توپير کيدی نه شي٠ د دوي توپير د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوي یو له بل سره تړلو ځرنګوالي له لارې مخ ته پروت دی یا رامنځ ته شوی دی٠
په لاندې کې به ممکنه« ویناتړنه» (یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر څیړنې لاندې ونیول شي.

پیژند ١٠٢ :

یوه «ویناتړنه» یا یو «ویناتړاو» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنۍ ویینې(افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډیرو ویناو څخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

موږ د سم اند یا منطق سټپرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یی یواځی او یواځی د «برخویناو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي٠

بیلګی

الف: سپین ډیر خواریکښ دی، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي٠

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي٠

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمي ولید٠

١٠٢٠٤ ویناتړنه یا وینابلواک (- فنکشن یا – تابع)

د ویناتړنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که څوک د تړنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځاي شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځاي غواړو «ریښتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپیژنو. موږ پریکړه کوو، چی د په زړه پورې ویناوو (ویناواریابلو یا وینا اوښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه p,q,r,... او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. موږ دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاینیونکی(یوځائیز یا یوګوني) بلواک یا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه٠

یادونه: د بلواک یا تابع کلمه وروسته څیړل کیږي، دلته د بلواک یا فنکشن پرځای ویناتړنه یا عملیه بسیا کوي. دا ځنی ویونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي یې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وینا تړاو یا ویناتړنی(عملیې) «نه والی»: دیوی ویناP نه والی هغه وینا ده، چې هلته او یواځی هلته د ریښتیا ارزښت ناریښتیا لري، چېP ریښتیا ارزښت ریښتیا ولري٠

موږ د وینا P نه والی نفی په Pنه سره ښایو ، شمیرپوهنیزه نخښونه یې په لاندې توګه ده ¬p په یوه جدول کې ریښتیا فنکشن یا ریښتیابلواک کې داسی څرګند وو(دا چې زه کله کله هغه شمیرپوهنیز سومبول د نه p لپاره ¬p نه شم لیکلی، نو دا به همغسې p نه ولیکم.

P	Pنه یا ¬p
w	F
f	w

د یوې وینا P تکرار نه والي یا بیا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې یې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

p	p¬	p¬ ¬
w	f	w
f	w	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه واره نه والی د همغږ لومړنی وینا رښتیاارزښت لري

په پیدایښتي ژبه کی نه والی په«نه» یا « نا » خپل رښتینوالی مومي۰ «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی۰ دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی۰

نه والی ته بیلګه : د وینا ¬ A نه والی : "7 < 3 „ وینا نهA ده: دا چی A رښتیا ده، نو ¬ A نارښتیا ده۰

ترنه(عملیه) یا کنجنکشن Conjunction (لاتین: ترنه، دلته د « او (and)» ترنه یا تړاو):

وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څېر یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼې لپاره بیلګی دي لکه پوښتني، امرونه او نظرونه یاعقیدې:

۱ – هوا څنګه ده ؟

۲ - کورته لاړ شه

۳ – شین یو ښه رنګ دی۰

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتونې لري، اړیکنښنی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي۰ یوه د نخښنو لړی کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګې په توګه

3 + x <5 د بنسټیزورشو N کې نه ریښتیا ده او نه ناریښتیا۰ دا له دې امله وینا نه ده۰ که چیرې د واریابلې یا اووښتونې یا متحولې پر ځاي ۰ او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا ترې منځ ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ځاي يې نور د پيدايښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بيا ناريښتيا ويناوې منځ ته ترې راځي۰

دا چی اووښتونې يا متحولې د بنسټډيرۍ يا بنسټ سټ ځخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک يا ازاده اووښتونې(متحولې) په نامه يادېږي۰

پيژند :

يوه وينابڼه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه يوه خپلواکه اوښتونې(متحوله) لري او د

- د دې اووښتونې په ځاي د بنسټيزې ورشو يا ساحې او يا
- د دې اووښتونې ترلو ځخه د کوانتيفيکاتورونو(کوانتورونو) په مرسته يوه وينا جوړيدی شي.

يادونه :

که په لاندې کې د تړاو يا تړنې کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه ياکنجنکشن conjunction دی۰ له ګرامر سره په توپير، چې هلته تړنه يا تړاو يو « تړونتيکی، تړاولغات» ښايي په سم اند کې تړنه يو ځرګند(دوه ځايلرونکی يا دوه ځاييزيا نوره هم ښه دوه ګونی) جملې تړل يا په بل عبارت دوه ځاينيونکې (نوره هم ښه : دوه ييز يا دوه- ګونی) فنکشن يا تابع(بلواک) تعريفوي يا پيژنی۰

د « او» تړنه او نخښه يې $\wedge$

پيژند ۱ ۰ ۳ :

$p \wedge q$ دوه ويناوې p او q يانې د «او » يوځايوالیp او q يواځې او يواځې هلته يو ريښتيا ارزښت ريښتيا لري، چې p اوq دواړه ريښتيا ارزښت ريښتيا ولري۰ که له دې ځخه يوه وينا هم ناريښتيا وي، نو بيا د « او » تړنه ناريښتيا ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترني نخښه ددوه ويناو qاو p ترمنځ ليکل کيږي p/\q او ويل کيږي p او p

مور د « او » ترنه په لاندې جدول کې روښانه کوو يا انځوروو:

يادونه: په لاندې کې w رښتيا او f نارښتيا په معنا دي

p/\q	q	p
w	w	w
f	f	w
f	w	f
f	f	f

د « او » ترني ته بيلګه :

د دوه رښتينو ويناو د A وينا : ,, 7 > 3 ,, او د B وينا : 3 يو لومړنی ګڼ دی رښتيا وينا A /\ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

يادونه: مور ګران لوستونکي به سره يوځاي فکر وکړو، چې دا پريمګنونه لومړي او که لومړني ګنونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګنونه لومړنی نه دي۰ دا ځکه لومړي ګنونه دي، چې له دوي له زياتون او يا کمون څخه لومړی ګنونه جوړيږي۰ مور به يې زياتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ويناو دا ترنه يا کنجنکشن، چې مختلف رښتياارزښتونه ولري ياني د A وينا: 3 ,, ,, 7 > (رښتيا او د B وينا: « ۳ يو جوړه ګڼ دی (نارښتيا)، نو A/\B وينا : چی ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « (نارښتيا) ده۰ دا ويناترنه ويناارزښت نارښتيا لري۰

د دوه ويناو د « او» ترنه دA وينا: 7 > 3 او د B وينا « ۳ يو جوړه ګڼ يا جفتعدددی» يوه نارښتيا وينا ده : ۳ يو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ومو لیدل، چی د « او » ترړنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده (عادي) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټی «پټیدځاي» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » ترړنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښایې»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځاي پیدا کړ« او » دا پټیدځاي یې پټ واسته۰

۱) هلمند موړ(بډا) شو او هیواد یې پریښود ۰

۲) سره له دې، چی برلین کوچنۍښار دۍهلته د منی د المپیک لوبې کیږي

۳) ۱۵ ګڼ جوړه دۍ، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونۍدۍ

په ټولیزه توګه د « او » ترړنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چی د جملی ټولی برخې رښتیاارزښت رینښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا ترړنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخی سره په ترړنه « او » وتړل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او برۍ یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» ترړنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « ترړنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله ترړنه» تل ژوروالی ته راهڅوي: باید جوته شي، چی ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»ترړنی پیژند یا تعریف یواځنی دۍ او دا $\vee$ د یا ترړننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p اوq ترمنځ ځایول کیږي p$\vee$q او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول څرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

p	Q	p∨q
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيږي، چې ديسجنکشن يا د « يا » تړنه p∨q يو داسې رښتياتابع (-بلواک يا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رښتيا فنکشن رښتيا اخلي، کله چې کم له کمه د « يا » تړنې يو غړی د رښتيا ارزښت رښتيا ولري يا واخلي۰ که د ديسجنکشن دواړه غړي نارښتيا وي نوp∨q هم نا رښتيا دی۰ دا د رښتيا فنکشن کې د ځايونې « يا» څخه بل څه نه دي۰ يوه د «نه خونديکونې» يا « نه ځايونې» يا « په برکې نه نيونې» د « يا » وييـنه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « يا۰۰۰ او يا ۰۰۰» ليکل کيږي۰

بيلګه (د « يا » تړنې ته):

د دوه رېښتينو ويناو د « يا» تړنه د A وينا: ,, 7 > 3,, اود B وينا: « ۳ د ٦ پرويشونی دیٔ» يوه رښتيا وينا A∨B ده : «۳ له ۷ کوچنی دیٔ او د ٦ پرويشونی هم دیٔ»۰

د دوه ويناو تړنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا ,, 7 > 3 ,, رښتيا او د B وينا: ,, 7 =3 ,, (نارښتيا) ، نو A ∨ B ده، چې 7 > 3 يا 7 = 3 دا وينا تړنه د رښتيا ارزښت رښتيا w لري۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه نارښتیا ویناو د « یا »(" Or") تړنه:

د A وینا : "7 > 3 " او د B وینا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دئ یوه نارښتیا وینا A∨B ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دئ»

الترناتیوAltenative یا انتیوالنځ Antivalenz ویناوې : دا د » یا « ویناتړنه باید د « یا ... او یا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتیا ده، که چیرې دواړه ویناوی ربنتیا وي٠

بیلګه : (دوه الترناتیو ویناو ته ، چې ربنتیا وي)

د وینا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دئ» د الترناتیو په نامه داسې دئ « ۳ یا له ۷ کوچنئ دئ او یا یو لومړی ګڼ دئ» نارښتیا دئ٠

بیلګی : (نه والي، کنجنکشن، دیسجنکشن ته)

یادونه: په لاندې (Wahr) w د ربنتیا او(Falsch)f د نارښتیا لپاره کارول شوي.:

ویناتړاو

A	π پي تولګڼ دئ	f
B	π ایراشنل ګڼ دی	W
C	صفر له پي π کوچنی دئ	W
D	π پي له دری کوچنی دئ	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

A	π ټولګې نه دی	W
C	π کوچنی برابر له صفر	F
A∨C	π ټولګې او له صفر لوي دی	f
B∧C	π ایراشنل او له صفر لوي دی	W
A∨C	πپي ټولګې یا له صفر لوي دی	W
A∨D	π ټولګې یا له ۳ کوچنی دی	f

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغۀ فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم۰ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دی، یانې د » او یا « امکان شته۰ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي۰ یانې دوه نرخونه باید ورنه کړای شي۰

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځیره دې یې په پام کې راولی۰ په شالت یا سرکت الجبر کې د کجنکشن یا د »او« ترنې« ریښتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه ترل شوي دي،

Bild 7.1

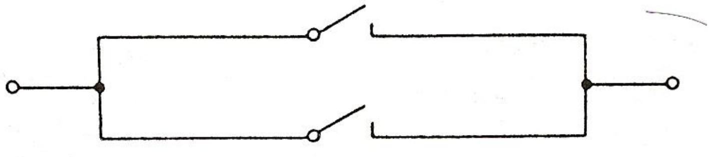


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس ربښتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستۍبیلګه په ګوته کوي، چې داسې یوځاي شوې ویناوې جوړیدۍ شي، په کومو کې چې له یو زیات تړوني موجود وي۰

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملی کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی (ربښتیا - بلواک یا ربښتیا فنکشن » نهp/\ p دی۰ د دې لپاره هم د ربښتیاارزښت فنکشن ورکول کیږي۰ د ربښتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا p نه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp/\p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دی

د یوې وینا نه والی

p	Pنه	p/\pنه
w	f	W
f	w	w

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکیک کوونکي نه ده یوه وینا نهp/\p تل ربښتیا ده، بی له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم ربښتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغې ربښتیابلواک کټمټ یا identisch(identic) ربښتیا دی(دا په دې مانا، چې که د ویناؤوښتونکې یا واریابلې ته هر ربښتیاارزښت ورکړ شي یانې ربښتیا یا نارښتیا تل د ربښتیا ارزښت ربښتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغو ربښتیاارزښت بلواک کټمټ نارښتیا دی (دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتونې په هره وینا ارزښت وینا نارښتیا ارزښت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction (د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

رښتیاارزښت دې د وییني یا افادې نه(p∨q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د نه$p\vee q$ رښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q$

$$p...q....p\vee q....\neg(p\vee q)......\neg p...\neg q...\neg p\wedge\neg q$$
$$w...w......w.........f.............f.....f.........f$$
$$w...f.......w.........f.............f......w.........f$$
$$f...w........w.........f............w.......f.........f$$
$$f...f........f.........w............w........w.........w$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویېنې یا افادې $\neg(p\vee q)$ او $\neg p\wedge\neg q$ په څرګند ډول همغه رښتیا بلواک یا – قنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه رښتیا - (او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکې جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو ـوینا تړنه) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعاً همغه نه پاتیږي، لکه

د بې نوکانو عملیې.

ایمپلیکیشن implication (لاتین: وررا‌ګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظیم یا ترتیب شي ایپلیکیشن سومبول<= چې دا سومبول د دواړو ویناو Aاو B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدیډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion (لاتین: پای لاس ته راوړنه) وایي۰ د دوه ویناو ایمپلیکیشن ټیک هلته نارښتیا دی، چې پریمیسس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي۰ په بل ډول رښتیا دی۰

د دوه ویناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرګندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول <=

P	q	p=> q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسی یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ویناو A اوB ټیک هلته یو نارښتیا یوځای شوې ویناچې په q<=/=pسره ښایو)۰

کله چې لومړیبرخه وینارښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوتري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا وینې په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځېدلی شي. په ښکاره ډول د بېلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلويزيون کتلو ته کورته راځي.

ناريښتيا ده، که د جملې لومړئ برخه رښتياوي او دويمه نارښتيا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بېلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې څلورمه کرښه سره يو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې رښتيا همداسې نا رښتيا وي) پرابلمونه نه پيښوي، په دې حالت کې تېوله وينا رښتيا ده، که لومړئ برخه وينا نارښتيا او معکوس دويمه برخه رښتياوي، نو په دې حالت کې به د بېلګې په توګه جمله نارښتيا ونه ليدل شي(که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلويزيون ليدلو ته راشي)، نو بيا د دوه ارزښتوالي پرينځيپ له مخې يواځې دا ارزښت ،، رښتيا،، باقي پاتې کيږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم ¬ pv q او هم ¬ (p v ¬q) ټيک بيرته بيا(بيرته) د ايمپليکيشن د رښتيا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې يې: q که p، او يا هم p ، د q لپاره پوره کيدونکی شرط دی(په بل ډول يې: qد p لپاره اړيين شرط دی)

ورته والی :يوارزښتوالی(برابرارزښتوالی) Äquivalent

که دوه ويناوې qاو p خپله ترڼه په » ټيک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که» تنظيم کړي، دې ته ورته والی يا ايکويوالنت وايي٠ د ايکويوالنت سومبول دی ≍ د دواړو ويناو pاوq ترمنځ دا سومبول پروت دی p ≍q په دې مانا، چې p ټيک هلته که q ٠ ايکويوالنت سومبول يې په دواړو خواو ايمپليکيشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ويناو ايکويوالنت ټيک هلته رښتيا دی، که دواړه ويناوې رښتيا يا دواړه ويناوې نارښتيا وي٠

دا شي څرنګوالی يا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

p	q	P⇔q
w	w	W
w	f	F
f	w	F
f	f	W

سیده او مخامخ یا په ځېښ دي په دې مانا وي، چې له p څخه q لاس ته راځی او په ځېښ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د ويناېلواکو یا ــفنکشنونو ترمنځ اړيکې

د دوه وېناو ترېنه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کيږي، که د ویناو رښتیاارزښت د ترېنوينااارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي۰ دا د یو وینااارزښت جدول له لارې څرګندیدی شي۰ ومو لیدل، چې ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی۰ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چې سره یوارزښته دي۰

p	q	$p \Leftrightarrow q$	p=>q	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q)$ $(q \Rightarrow p)$
W	w	w	w	w	...........W
w	*f*	f	f	*w*	.........*f*
F	*w*	*f*	*w*	*f*	..........F
f	*f*	w	w	*w*	.........*w*

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کيږي

$$(p \Leftarrow\Rightarrow q) \Leftarrow\Rightarrow (p \Rightarrow q)\ (q \Rightarrow p)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ورته والي ويناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې يو بل سره بدل کړو يانی د يوه ځاي د بل سره بدل کړو٠ له دې څخه پيچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کيږي٠

د دې ورته والی ويناتړنې غوره بيلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$
$$(2)......\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او ديسجنکشن لپاره ديستريبوتيو قانون:

$$(3) \quad [p\wedge(q\vee r)] \Leftrightarrow [(p\wedge q) \vee (p\wedge r)]$$

$$(4) \quad [p\vee(q\wedge r)] \Leftrightarrow [(p\vee q) \wedge (p\vee r)]$$

١ ٠ ٤ وينافورم يا - بڼه او کوانتورونه

وينا سم اند په لاندې ډول ساده ټوليز کيدی شي٠ د بيلګي په توګه که مختلف شيان همغه خويونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وويلي - - يا افاده کړای شو: دلته د يناو پر ځاي د وينافورم څخه خبري دي، يا غږيږو٠ دا داسی ژبنی ويينې يا افادې دي، چې د شيانو لپاره واريابلی يا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته يوه وينا شي٠ بيلګي يی په لاندی ډول دي

لومړی : x پر دوه ويشونی دی »

دويم : » z يو هوار څلورګوډی(څلورضلعي) » دی٠

دريم : «u له v څخه لوي » دی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته رښتیا یا نارښتیا وینا لاس ته راځي٠ که په دویم کی دz پرځاي «ډیرګوډی» (کثیرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو یوه رښتیا وینا لاس ته راځي٠

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو یوه نارښتیا وینا لاس ته راځی٠ دریم یوه اړیکه(ریلیشن(ده، چې هلته د انفرادیو د ایښولو ترتیب هم یو رول لري٠ دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا رښتیا وینا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي٠د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل٠(له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وایي٠

بیرته داسی لیکو P(x), Q(z), R(u,v)

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بڼي څخه وینا جوړوي٠ چې کوانتیفیکیشن Quantifikationبلل کیږي٠ دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بڼی افراد همغه خویونه ولري، چې ټولوینا (Allaussage) ورته وایو٠یاچې په پوښتل شوي چاپریال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خویونه ولري، دې ډول وینا ته موږ د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وایو٠ زموږ په بیلګه کې یی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پیداینتی یا طبیعي) ګڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کیږي

پنځم : ټولې څلوری (مربع) هوارې ډیرګوډی یا کثیرالاضلاع دي٠

د ټولکوانتور یا ټولوینا لپاره نخښه $\forall$

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتونوینا لپاره نخښه $\exists$

یادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څیر ده په پام کې دې وي، چی د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې (ویاریابلی یا مجهولی) ورکول کیږي٠

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی یي لولو، چی یوx په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځه ۱　: $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دئ (یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه)

دا سومبول ∃ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰۰۰ شته»د وینابنی او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیرئ کې، په کوم کې چې کم له کمه یوه داسې اووښتونې ځاي په ځایونه شته وي کومه چې وینابڼه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی (د رښتیا شتون - موجودیتویناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له(په) R (کې) شته ،د کوم لپاره چې0 =x+1 باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیرئ یا ریل ا عدادو سټ R توکی دئ او ∈ په دې مانا دی، چې توګي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$x^2 + 4x = 0$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x=0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلګڼونه شته دئ، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (2، -2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$\exists x \notin R: x^2+1=0$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې وینابنې هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډیرۍ یا واریابلډیرۍ ټولو توکو لپاره رښتیا وینا شي٠

بیلګه: وینابڼه « x په 2 ویشونی دی » د جوړه ګڼونو هریوه لپاره رښتیا ارزښت لري په

دا سومبول $\forall$ په دې مانا دی، چې « د ټولو x لپاره» د وینابنې او په همدې پوري اړوند د وینا متحولو ډېرئ یا سټ (ویناآووښتونډیرۍ یا واریابلډیرۍ) ترڼه له دې سومبول سره یوه Universalaussage یونیورزالوینا یا ټولوینا منځ ته راځي٠ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتونډیرۍ) هر توکی لپاره د وینابنې څخه یوه رښتیا وینا جوړیږي٠

جمله : (دUniversalaussage یونیورزال- یا ټولیزې وینا یا ټولوینا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ویشونی دی)

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو رییلاعدادو x لپاره, کوم چې له یوه لوي وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د نارښتیا ټولیزې وینا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وینا نارښتیا ده، ځکه چې دا د $1 \le x \le 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وینا د ټولو ریل عددونو لپاره باور نه لري٠

۱ ٠ ۵ اړین – یا ضروري- او پوره کیدونکي شرطونه

د ایمپلیکیکشن سومبولA=>B (« کهA نوB » « له A څخه Bلاس ته راځي»)یا په بل ډول : که A باور ولري، نوB هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته۰

الف) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دی»

ب) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف) وايي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چې آ پوره شي۰

بیا : وینا باور لري۰

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دی یا پوره کیدونکی دی یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – ویناA : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « ګڼ n پر ۳ ویشونی دی»

A => B

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دی یا بسیا کوي، چې یو رییل ګڼ n پر ۳ ویشونی دی، که دا پر ٦ ویشوني وي۰
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ۳هم ویشونی دی ۰ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي۰ د بیلګي په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ویشونی دی ، مګر په ٦ نه دی ویشونی۰

۲ - وینا A : “n > 7„

وینا B :وي دې: n > 6

A => B

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دا پوره کیدونکی دی، چې یو رییلګڼ ن له ٦ څخه لوي دی٠ که اړیکې، چې ن له ٦ لو دی، باور ولري

داسې رییلګڼونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له۷ څخه لوي نه دي٠ د بیلګي په توګه ٥ ،٦ یا شپږ.نیم

د ب) فرمولبندي وایي، چې وینا ب باورلرل غوښتونکی یا اړیین یا ضرور دی، د دې لپاره، چی وینا A باور ولري٠

که وینا B باور ونه لري نو وینا A هم باور نه لري ٠

بیلګی د اړیین(ضروري) شرطونو لپاره:

۱ – د دې لپاره، چې یوګڼ n پر 6 وویشل شي، اړین(ضرور) ده، چې دا ګڼ پر3 ویشونی وي٠ یو ګڼ، چې پر3 نه وي ویشونی، نو پر ٦هم ویشونی نه دی٠

۲ - ویناA : » څلور ګوډی یوه څلوری یا مربع ده«

وینا B : » څلور ګوډی څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې یوه څلورګوډی یوه مربع(څلوری) ده دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه یې ولاړ نه وي، نو مربع یا څلوری نه ده که یوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړین نه ده، چې څلوری یا مربع دې وي٠

د برابروالي یا برابرارزښتي (ایکویوالنت) سومبول«

$$A \Leftarrow\Rightarrow B$$

(په دواړو لورو ایمپلیکیشن) لپاره په شمیرپوهنه کي هم فرمولبندي شته: دا وایي، چې A دB لپاره یو ضروري او پوره کیدونکی شرط دی٠ « دا وایي، چېA ټیک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – ویناA   : « ګڼ یا عدد   n   پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n   پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دی، که دا عدد پر۳ او ۲ ویشونکي وي۰

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعې»

A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه(ضلعې) ولري۰

۱ ۰ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم(ترې پوهیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې تیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي۰ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کي داسې نه ده۰

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د تیک څرګندې پوهنې یوه نه پرینوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله څه شی دی ؟

ټولې ربښتونې ویناوې په شمیرپوهنه کې جملې بلل کیږي، چې د پیژندنې لپاره ښوونې یا ثبوت ته اړتیا لري ۰

اکسیوم Axium څه شی دی؟

بې ثبوته ربښتینې وینا ته اکسیوم وايي

شمیرپوهنیزې یا د ریاضي جملې زیاتې نیونې(فرضيي) او ثابتول(غوښتنه،جوته ونه یا ښوونه) په بر کې- یا خوندي لري۰

که دا وینا داسی وي، نو پس داسی به هم وي۰ دلته که دا وینا داسې وي نیونه یا فرضیه ده او نو داسې هم ده۰ دا غوښتنه ده، چې باید ثبوت یا وښوول شي۰

اکسیوم : ۱ طبیعي عدد دئ (پیانو Peano)

: ټکی هغه دئ، چې پر ویشونی نه وي یانې په ټکی ویشل بند دي۰ (Euklid)

: حتمي پیښنه د پیښي امکان ۱ درجه لري۰

جمله: که دریګوډی ولاړکونجیز وي، نو(پس) د پیتا ګوراس (pythagoras) درسي جمله باور لري

: یو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، باید ناجوړه(طاق) وي

: په اخره جمله کې نیونه(فرضیه) ده (که یو پریم عدد له ۲ لوي وي۰۰۰) او ثبوت یې (هر له دوه لوي عدد په دوه ویشل کیږي پس لومړی ګڼ نه شي کیدی، نو دا تل ناجوړه یاطاق دئ)په ځتوالي یا تضاد کې پیژندل کیږي۰
تل داسی نه ده، چې د جملې د ربښتینوالی ځخه دې د جملی په ځتوالی یا تضاد هم ربښتیا وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ۲٪ هم (ربنتیا)

جمله: که ۲ ٪ پس ٦٪ هم (نارښتیا)

۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دننني کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دی۰

په ځټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دننني کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته(هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځنې او یواځنې ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په ځټ) ولاړکونجیز دی، کله چې دنننی کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي څخه هر یو څو کلن دی؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دی او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دی یانی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کیږي او ساده کیږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \;\; \backslash/ \;\; 22x +3 = 113$$

په کیڼ ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزیات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا ګڼ ۲۲ ځله x بیا ۱۱۰ کیږي: 22x = 110 او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده یانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ۵ کلن پلار ۳٤ کلن او نیکه ۷٤ کلن دی٠

که ترمونه ^T او °T د برابروننخښنی = باندې یو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابرون پیداکیږي: ^T = °T ٠

که چیرې ترمونه په دې نخښو ≤ , ≥ , < , > او(نابرابروننخښه =|) یو له بل سره وتړل شي یو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي یا مجهولو سره یوځاي شي، هغې ته د وینافورم یا نوره هم ښه وینا بڼه ویل کیږي٠

دا یا رښتیا یا نارښتیا وینا کیدی شي٠ که ناټاکلي، چې اوښتونې یې هم بولو(د بیلګې په توګه z , x , y) پر ځاي د بنسټيډیری ګڼونه ولیکل شي٠ په برابرونپوهنه کې له پیژند – یا تعریفډیری څخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم یا بڼې یو برابرون یا نابرابرون رښتیا وینا کړي٠

د یو برابرون یا نابرابرون (مساوات یا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې ویناښه پیژند - یا تعریفډیری پورې اړوند وي او دا وینا ریښتینې کوي، اوبیډیری یا حلډیری L کې پروت دی یا د برابرون یا نابرابرون په ډکوونکو (پوره کوونکو) ډیریو پورې تړلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ریښتونې وینا ورکوي کټمټ یا (identisch, identic) وینا وایي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې :

الف)　$5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$　　نو　$L=\{0,8\}$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $x = -4$ لپاره رښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په ښت $3.4 = 48$ پس- $L = \{ -4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 \Rightarrow L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب) $x < 3 \Rightarrow L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی : الف) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیریکې سره برابر وي(یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیری ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي٠

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نابرابرون	براون
۱) وينافورم کې کيدی شي،چې خواوې سره بدلې شي	T° < T^ T^ > T° 2x < 6 6 > 2x	T°=T^ T^ = T° 3x=5y 5y = 3x
۲) که وينافورم په دواړو خواوو همغه ترم زيات يا کم شي او د يوې ورزيات ترم پيژندډيری خوندې وساتل شي يا ځاي کړي	T^ < T° => T^ ± T° < T° ± T^	T^ = T°=> T^ ±T° = T°± T^
يا تغير ونه خوري٠ مخامخ يا کينې لوربيلګه کې تفريفډيری تغير خوړلی	3y < 4x ⇔ ⇔ 4y±2x < 4x±2x	2z = 8 => 2z ± 3 = 8 ±3

پر ځنې بيلګه

2z=8 |=> 2z+3-z=8+3-z

دا چې z=4 دې نوي ورزيات شوي

ترم z-3نه دی تعريف يا پيژندنه

لري، ځکه چې z - 3 يو پيدايينتي يا طبيعي ګڼ نه دی

۳) د وينافورم دواړه T^=T° ⇔ T^.T > T°.T ⇔ T^ <T°

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه کيدی شي چې $T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow$ $T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$

له همغه مثبت ترم سره $T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T$ $\Leftrightarrow T^{\wedge}:T = T^{\circ} : T$

ځل او يا په همغه ترم $T > 0$ که $T > 0$ که وي

وويشل شي $3y - 12 < 30z - 90$ $4x+2 = 10x-6$

$\Leftrightarrow y - 4 < 10z - 30$ $\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x - 3$

$\Leftrightarrow 4y - 16 < 40z - 120$ $\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x - 30$

٤) د يوه برابرون $T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow T^{\wedge}.T > T^{\circ}.T$ $T^{\wedge} = T^{\circ} \Leftrightarrow$

دواړه خواوې کيدی شي، $T^{\wedge} < T^{\circ}$ $T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$

چې له يوه منفی ترم سره $\Leftrightarrow T^{\wedge}:T = T^{\circ} : T$ $\Leftrightarrow T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T$

ځل شي يا دواړه خواوې په $T < 0$ $T < 0$

همغه ترم وويشل شي. $-2y < -4$ $3x = 12$

که په دې فورم کې $\Leftrightarrow y > 2$ $\Leftrightarrow -9x = -36$

نابرابرونونه وي نو د $\Leftrightarrow 10y > 20$ $\Leftrightarrow x = 4$

برابرون لورې بدليږي، يا نخښه بدليږي

يادونه :

په ټوليزه، چې په کتابونو کې ليکل شوي، ترمونه Tيو او T دوه په لاندڼ توګه د اينډکس سره په نخښه کوي: T_1, T_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د ربښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د ربښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - (A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ډیرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډیرۍ پوهنې یا سټ تیوري باید خپل ځاي په شمیرپوهنه او همدا ډول په نورو پیدایښتي- یا طبیعی پوهنو کې نیولي وي، نو له دې امله د لنډ تیر وخت را په دې خوا په پرمختللو هیوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځیو په لیکلوست کې پیل شوه، ځکه چې بې له ډیرپوهنې یا سټ تیوري شمیرپوهنه بې مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې لیکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پیدایښتي یا طبیعي ګڼونه یا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څیره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډیرۍ یا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډیري پوهنې (سټ تیوري)په پرمختللو هیوادونو کې هم د شلمې پیړۍ په دویه نیمه کې د میندو او پلرونو لپاره ستونځې پیدا کړې، ځکه، چې دوي د ډیرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنیانو سره یې مرسته نه شوه کولی۰

د ډیرۍ کلمه له عدددونو یا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښووله لکه اوس۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ یا ډېرۍ پیژندل کیږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، یا په یوه ټولګی کې میزونه او چوکۍ، یا لکه هغه نیزوړي، چې نیز راوړي او د سپین په پټي کې یې ډیرۍ ډیرۍ اچولي یا د هسکې مینې د ښوونځي په لسم ټولګی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکیو او میزونو سټ یا ډیرۍ.

د ډیرۍ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډیرۍ له کلیمې سره اوس بلد شوي یو که څه هم تربیلو بیلو پردیو نومونو لاندې، چې زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته یوائځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چې د ډیرۍ څو مختلف پیژندونه یا تعریفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چې د ډیري پوهنې (سټ تیوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوګرځي.

ډیرۍ پوهنه د شمیرپوهنې سټه جوړوي او د شمیرپوهنې ټولې څانګې په ډیرۍ پوهنه

ودانې دي. نن شمیرپوهنه بې له ډیرۍ پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه یې وزي.

پیژند ۲ ۰ ۱

الف : ډیرۍ یا سټ د ټاکلو شیانو یا کلمو ټولګه (یوځایوالی، مجموعه) ده، چې

پخپله خوښه د یوې ټاکلې بنسټډیرۍ یا بنسټ سټ څخه ، چې د پیژندلشویو

اصولو یا کرکتریین له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شمیرپوه کانتور(George Cantor 1845 – 1918) پیژند:

زموږ د خیال یا لید څرګند ټاکلو ، تیک یو له بل توپیرکیدونکو شیانو ټولګې

(یوځایتولولو یا مجموعې) ته ډیرۍ وایي او هر شي ته، چې ډیرۍ یې جوړه

کړې یا ډیرۍ ترې جوړه شوې وي، د ډیرۍ – یا سټ توکی وایی.

(Set and elements of set ډیرۍ او د ډیرۍ توکی)

پ : د مختلفو شیانو ټولګې یوه یوون یا یووالی (واحد Einheit, unite) ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library

شميرپوهنه کې ډيرۍ وايي

يادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد يو يوون يا يووالى ښه نومه ونې دي٠ دا که څو واره وويل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدېږو٠

ت : ځرګند شيان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر څيړنې لاندې نيول کيږي او د دې نخښو له امله يوځاي ټوليږي يا ټولګه جوړوي، ډيرۍ يا سټ تشکيلوي٠ ګډې نخښې کيدى شي ښکلا، کوچنيوالى او داسې نور وي٠

يادونه: د ګرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پيژندونو کې يې غوره او د پام وړ پيژند ياتعريف د جورج کانتور پيژند دى.

بيلګه :

ګڼونه يا عددونه، نومونه، او نوري کيدى شي د ډيريو بيلګو په توګه راوړل شي٠

ګورو، چې د ډيرۍ يا سټ کلمه په شميرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډيرۍ د څنو شيانو زيات يوځاي کول موخه ده، د ځانګړو شرايطو لاندې.

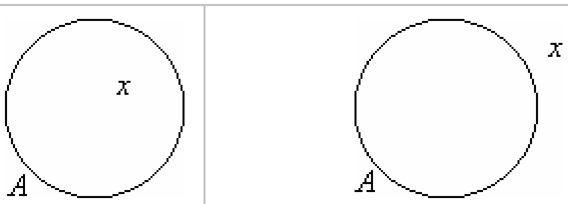
په شميرپوهنه کې ډيرۍ په لويو لاتين تورو ليکل کيږي لکه ..A,B, او يا ,M,N
....X,Y, د ډيريو توکي د لاتين په کوچنيو تورو ليکل کيږي، لکه ...a,b,c
او...m,n,x,v

د دې لپاره، چې وپوهيږو، چې ايا توکى a د ډيرۍ A توکى دى که نه نو ليکو: $a \in A$

په پورته کې توکى a د ډيرۍ A توکى دى.

که a د A توکى نه وي ، نو ليکو: $a \notin A$ دلته a د ډيرۍ A توکى نه دى

دا پورته لينکدود له ښى وکيڼ لور ته هم ليکلى شو، چې پرلپسى لړۍ يې ساتلې پاتې شي٠ زه يې په څټ ليکنو سره ليکنيزې ستونځى لرم٠دا لاندې يې دياګرام دى، خو توکي يې بل ډول ليکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهيدلو ستونځ پيدا نه کړي



$a \in A$
(a د A توکی نه دی)

$a \notin A$
(a د A توکی دی)

ډیرۍ A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه یې لیکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډیرۍ یا سټ نخښه ده

یادونه : دا د ډیرۍ کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چې ډیرۍ د شیانو مجموعه یا ټولګه ده او په الماني کې ورته مینګې Die Mengeوایي. هغه بنسټیزه خبره یې په پیژند یا تعریف کې ده، که موږ یې چې هرڅنګه وبولو، خو د یو بل څخه کره توپیرکیدونکو شیانو ټولګی ته ... وایو. د ټکو پر ځاي ، چی هر څه لیکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو یې هغهٔ مناسبه نوموه ونه ډیرۍ ده، دا د کوټې کوټې څخه یا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاریږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي. زه بیا په دې ټینګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انګریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ دی. د سټ مانا که په ډکشنري کی وګورئ ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دی. ګورووچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډېرۍ یا ډېرۍ خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ ۰ ۱

الف) M_1 (لوستل M ایندکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces ایندکش پيژند نخښې ته وايي) دې د لومړیو ګڼونو ډیر ۍ (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دې د لاندې برابرونونو یا مساواتو د اوبیونو(حلونو) ډیرۍ وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بیلګه ۲ ۰ ۲ :

الف) د مساوات $(x+1)(x-2) = 0$ حل ډیرۍ M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو یاګڼونو ډیرۍ M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$

ډیرۍ لکه، چې ومو ویل د توکو د خویونو له لارې هم څرګندیدی شي یا ورکول کیدی شي۰

$$M = \{ x \mid \text{x د خوویونو ۰۰۰ سره} \}$$

(لوستل: M د ټولو x ډیرۍ ده له خویونو ۰۰۰۰۰ سره)

بیلګه ۲ ۰ ۳

الف) { د ټولوx سټ ، چې هلته x یو لومړنی عدد یا ګڼ دی| M = { x

b) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشديرۍ: ډيرۍ، چې کوم توکی ونه لري تشډيرۍ يا خالي سټ بلل کيږي او داسی يې
ليکو: θ يا $\varnothing = \{\}$

دا دې د يوې ډيرۍ يا سټ سره، چې يوائی له صفر څخه جوړه ده، نه بدليږي يانې

$$\{0\} \neq \{\} = \varnothing$$

بيلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x \in Z, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرون يا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډيرۍ

$$\{x|x^2+x-/4= 0 \} = \{ 1 / 2 \ , -3/2\}$$

کوم ټولګڼ يا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګڼونو پيژند ته دې پام وي، چې د راشنلګڼونو برخډيرۍ ده۰دريمه برخه دې وکتلشي

بيلګه ۲ ۰ ٥ : د ز۰ کال د دويمې نيمايي مياشتو سټ يا ډيرۍ په , Ju , aug sep
ok,no, de سره ښايو او ليکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو يا نوره هم ښه داسی ليکلی شو: $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بيلګه ۲ ۰ ٦ : ټول منديزي، چې نن مازيګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون يا جماعت ته
ته راغلي۰

بيلګه ۲ ۰ ۷ : د هغو ميرو ، غواوو او وزو ډيرۍ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بيلګه ۲ : ۸ د ټولو هغۇ ګڼونو ډيرۍ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ويشي يانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ٥ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱٥ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې يې ليکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسې وايو، چې ډيرۍ يا سټ M د ټولو هغو توکوx - لکه پورته - جوړ شوې، چې ۳۰ ويشي او داسې يې ليکو: $M = \{ x \mid x$ د ۳۰ پرويشونى ګڼ $\}$

د ټولو پيدايښتي يا طبيعي ګڼونو ډيرۍ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې يې ليکو:

$$N = \{ 1,2,3,4\ldots.\}$$

دا نه پاى لرونکى يا لايتناهي ډيرۍ(سټ) ده ، چې په لاندې ډول يې نخښنه ده يا په لاندې ډول په نخښنه کيږي: ∞

ګورو، چې په شميرپوهنه کى موږ پر پاى ګڼونو برسيره ناپاى عددونو سره هم مخامخ يو.

۲ ۰ ۲ د ډيريو ترمنځ اړيکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړيکى د برابروالى او خونديونې يا خوندي لرنې (مساويوالى او يو په بل کې ځاي لرلو) اړيکې دي.

پيژند ۲ ۰ ۲ دوه ډيري يا سټونه M_1 او M_2 يو د بل سره برابرې دي، يانې

$$M_1 = M_2$$

که چيرې د ډيرۍ يا سټ M_1 هر توکى د ډيرۍ يا سټ M_2 توکى هم وي او پر ځټ يا برعکس هر د M_2 توکى د M_1 توکى هم وي.

برابرې ډيرۍ برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بيلګې په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دئ

برخډيرۍ(سبسټ subset)

پيژند ۲ ۰ ۳ :

يوه سټ M_1 د سټ يا ډيرۍ M_2 برخډيرۍ (لاندې ډيرۍ، خوندي ډيرۍ يا سب سټ) بلل کيږي يا M_1 په M_2 کې ځاى ده يا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي ده، ليکندود يا ليکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډيرۍ M_1 هر توکی دسټ يا ډيرۍ M_2 توکی هم وي۰

کيدی شي، چې M_1 د M_2 سره برابر هم وي، که برابروالی يا مساوات نا شوني وي نو بيا د اصلي برخډيرۍ يا اصلي سب سټ څخه غږيږو۰

پيژند ۲ ۰ ٤ :

يوه ډيرۍ يا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډيرۍ ده او داسې يې ليکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

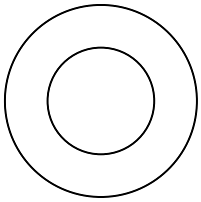
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 یو توکی د M_1 توکی نه وي۰

بیلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو M_1 په M_2 کې اصلی خوندي دی

ب) د ټولو څلوریو (مربعو) ډیرۍ د ټولوڅلورګوډیو(څلور اضلاعو) اصلي برخډیری ده۰

پ) څیره ۱ ۰ ۱ په هواره یا سطحه کې ټکوډیرۍ ښایي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډیرۍ یا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څیره کې وګورو، نو یوه ګردۍ (دایره) M_1 په بله لویه M_2 ګردۍ کې خوندي ده۰

تشډیرۍ په هره ډیرۍ کې خوندي ده۰ هره ډیرۍ په خپل ځان کې د نااصلي برخډیرۍ په څیر خوندي ده۰

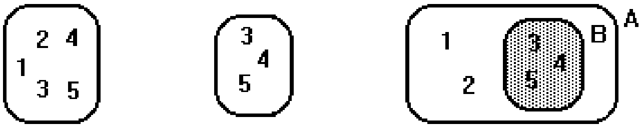
یا دا پیژند :

$A \subseteq B$ که باور ولري : $x \in A \Rightarrow x \in B$

بیلګه:

$A \subseteq A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{3,4,5\}$ B

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډيرۍ، چې هيڅ توکی ونه لري تشډيرۍ بلل کيږي او داسې يی ليکو: $M=\theta=\{\}$

يادونه : پام دې وي، چې صفر ډيرۍ او تشډيرۍ سره بدلې نه شي يانې لاندې ته:
$\{\}=\theta\neq\{0\}$

د يوې ډېرۍ توان يا تواندېرۍ (توانسټ)

پيژند ۲ ۰ ٦ :

د يوې ډيرۍ M د ټولو برخډيريو ډيرۍ پوتنځډيرۍ يا په تواندیرۍ(-سټ) بلل کيږي او داسې يې ليکو:(P(M په تواندیرۍ توکي لري، چی هر يو يی بيا خپله ډيرۍ ده۰

بيلګه : د {M = { a,b.c ډيرۍ دا لاندې په تواندیرۍ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډيرۍ چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټيک n جګ 2n توکی لري يانی : n^{2n}

دا پورته د جملې په څير د پوره اينډکشن له لارې اوبی (حل-) کيدی شي(لومړۍ برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د ګرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي يي۰

پيژند ۲ ۰ ۷ : د ډيرۍM زور |M| لاندې د ډيرۍ د توکو تعداد ياګڼون پوهيږو۰ که دوه ډيرۍ M اوN همغه زور ولري هغه ته يوزوريزه – يا برابرزوريزه ډيرۍ وايو او داسې يې ليکو: $|M| = |N|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرونونو یا مساواتو او خونديې ساتنو خویونه

الف) رفلکسیو- یا د انعکاس(هندارونیزې) اړیکېreflexivity

هغه اړیکي، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ رینتوني ویناوې ورکړ شوي وي
رفلیکسیویا انعکاسي اړیکي بلل کیږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خوندي لرل اړیکي رفلکسیو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هیڅ ډیرۍ د خپل ځان اصلي برخډیرۍ یا برخسټ نه شي کیدی۰

ب) سیومتریکې اړیکې Symetric relation

هغه اړیکې سیومتریک بلل کیږي، چې د شیانو ترمنځ چې کاروک کیږي یا استعمالیږي
یو له بل سره بدلیدلی شي۰

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خوندي لرل سیومتریکې اړیکې نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړیکی $M_2 \subset M_1$ نارښتیا یا ناټیک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزیتیویتي Transitivity یا وړون اړیکې

ترانزیتیویتي هغه اړیکې دي، چې له یوه نه وبل ته یي د وړلو امکان شته یا موجود
وي۰

له L = M او M = N څخه لاس ته راځي L = N

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته داسې لولو: که M_1 د M_2 برخډيرۍ او M_2 د M_3 برخډيرۍ وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې M_1 د M_3 برخډيرۍ ده

برابونونه يا مساوات او په بل کې ځايه ونه يا خوندي ساتنه ترانزيتيو اړيکې يا خويونه دي

۲ ۰ ۲ په ډيرۍ کې کارونې يا عمليې

ټولنډيرۍ (د اتحاد سټ)

پيژند۲ ۰ ۸ :

د دوه ډيريو M_1 او M_2 ټولنډيرۍ(unionاتحاد سټ)، چې د ډيريو ټولنه ورته وايو ده:

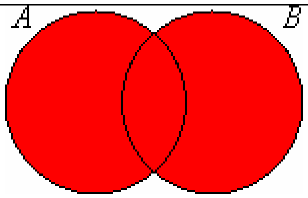
$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسی پوهيږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډيرۍ يا سټ ده، چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکي هم خوندي ولري۰

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د M_1 يا M_2 توکی هم دی (پرتله ۱ –مه برخه د يا سره پرتله) يانې دا د ټولنډيرۍ توکی د M_1 يا M_2 او يا د دواړو توکي دي۰

يا لاندې دياګرام

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A ? B$ $A \cup B$ (B تولنه A) x) د A سره B اړيکې لري	

بيلګى

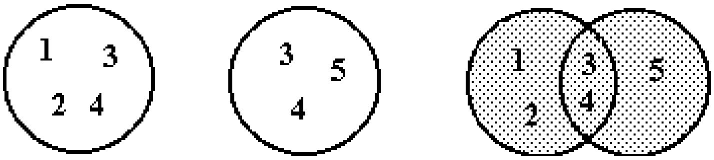
الف) M_1 دې د ځوانانو ډيرى وي، چې بکلوريا لري او M_2 دې د هغو ځوانانو ډيرى وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډيرئ ده، چې بکلوريا او مسلکي شهادتنامې ولري او يا دواړه شهادتنامې ولري۰

ب)

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

يا په لاندى توګه پيژند او بيلګه: Aاو B دې دوه ډيرى وي د دې ډيريو تولنه داسي ليکو

B} ∊x∨A ∊B = {x | x∪A
∪A={1,2,3,4} B={3,4,5} A
B={1,2,3,4,5}



تل په ټکو ټکي شوې ټکيډيرى تولنديرى په ګوته کوي۰

پ – خيره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې ټکيډيرى په ګوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) ټکيپردۍ دي٠ ب) ګډ ټکی لري٠

پ) اړيکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره څيرې په لاندې کې په بيلګو کې راغلې دي٠

د ټولنې لپاره کموتاتيو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسې دلته(لنډ: لړۍ) د ډيريو په ټولنه کی رول نه لوبوي

يادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ٠٠٠ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بيا دا سره جمعه کړو لګۀ

1 , 1+2,1+2+3,1+2+3+4+,1+2+3+4++..+….

نو دا لړپيرلپسې يا لنډ: لړۍ بولو(پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زياتو ډيريو ټولنه لړۍپرلپسی(لنډ: لړۍ) رول نه لري٠

اسوڅياتيو قانون باور لري٠

$$(M_1 \cup M_2) \cup M = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډيرۍ (د ډيريو غوڅی يا –متقاطع سټ) intersection

يادونه : دا کړی شو، چې د ډيرو ګډغوڅی وبولو(دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټيکوالی په کې نه شته)

پيژند:

ډيرۍ M د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 غوڅډيرۍ يا د تقاطع سټ ده(لوستل: M_1

غوڅ(پرې)په M_2 (لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ډیری M ټول توکي د ډیری M_1 او ډیری M_2 توکی وي۰

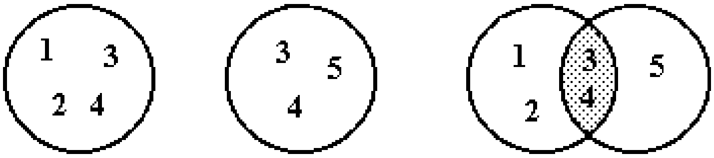
د غوڅډیری $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډیری M_1 او ډیری M_2 توکي دي (د ۱ ــمې بری د هم او هم په مانا یا د «او» په مانا)

یا دا پیژند :

د ډیریو A او B غوڅی $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بیلګه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3, 4\}$



یادونه: دې پورته ډول دیاګرام ته د ون دیاګرام Venn-Diagram یا د Euler-Venn- Diagram وایی

بیلګې :

لومړی : یوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتیا څخه راځي، چې په M_1 یې په نخښنه کوو۰ یوه بله ډله ، چې په M_2 یې په نخښنه کوود کندهار او همغه د پکتیا زده کوونکي، چې په M سره یې ښایو، دي۰ د دې دواړو ډلو غوځډیری

$$M = M_1 \cap M_2$$

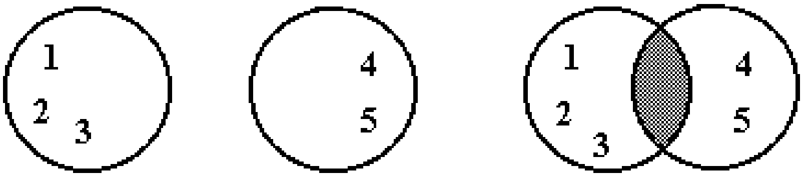
د پکتیا زده کوونکي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

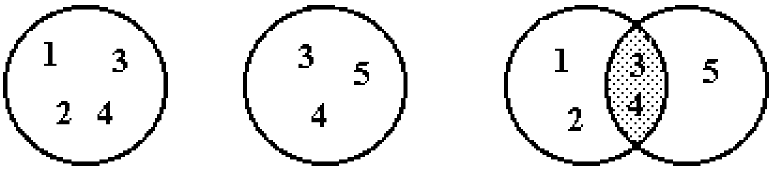
دویم:

$$M_1 = \{k,a,r\}, M_2 = \{u,r,s,e,l\},$$
$$M = M_1 \cap M \ = \{r,l\}$$

دریم څیره ۲ ۰ ۳ په هواره یا سطحه کې ښایي، چې الف) ګنون پردي دي



ب) یو بل سره ګډ ټکی لري



پ) اړیکی

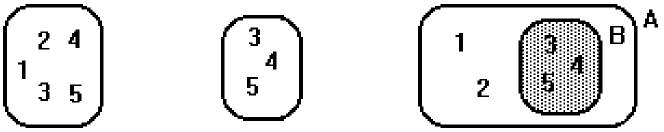
$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بیلګه:

B A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} A⊆

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه ټکو باندې ټکي شوې ډېرۍ اصلي برخډېرۍ ده

دوه ډېرۍ، چې غوځډېرۍ یې تشډېرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله پردۍ بلل کیږي

د غوځډېرۍ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډېرۍ لپاره کموتاتیو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوځیاتیو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډېرۍکارونو یا ډېرۍ عملیو یانې ټولنډېرۍ او غوځډېرۍ لپاره دواړه دیستریبوتیو قانونونه پوره کیږي یا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د ګڼونو د شمیرکارونو یا عملیو لپاره یواځې یو دستریبوتیو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټولیزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند :

کمونډیرئ یا تفریق سټ M_2 د ډیری M_1 او ډیری M کموالی یا فرق دی او

داسې یې لیکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د M_1 ډیری کمه شوې

یا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډیری M_1 توکي نه وي۰

لیکندود یالیکنډول :

$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A او B توپیرډیری یاکمونډیری یا تفریقډیری له ټولو هغو توکوx جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دی

بیلګې :

لومړی : په یوه ټولګي کې M_1 د ټولو نارینه وو زده کړو ډیری ده او M_2 دټولو زده کړو ډیری (د نارینه وو او ښځینه وو) ، چې په شمیرپوهنه کې لس نمرې وړي۰

M_1 / M_2

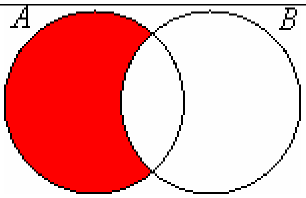
د هغو زده کړو ډیری ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ۵ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډیری ده، چې په شمیرپوهنه کې یې لس نمرې وړي۰

که په ټولګي کې یواځې نارینه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

یا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A\backslash B$ (A بې له B) (x له A سره B اړيکې‌لري)

دويم :

$$M_1 = \{k,r,a,i\}, M_2 = u,r,s,e,l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k,a\}, M_2 / M_1 = \{u,s,a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون يا تفريق پيژند او بيلګي را په ګوته کوي په ټوليزه توګه باور نه لري:

$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

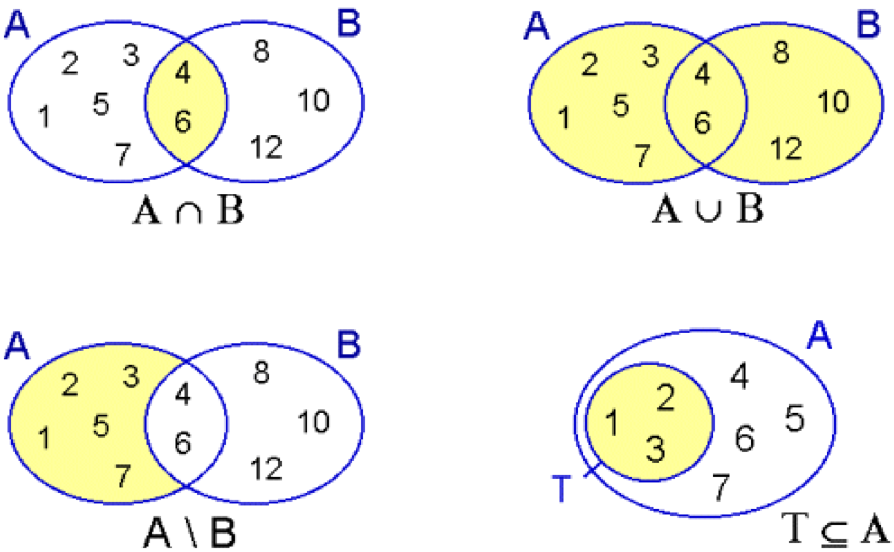
د يوې ډيرۍ يا سټ کمپلمنت يا پوره کوونکی :

دا کارونه يا عمليه د نورو کارونو څخه توپير لري، چې په ډيرۍ کی مو څيړلي٠ دا يوه يوځاييزه کارونه ده او دا نورې دوه ځايزې کارونی يا عمليې دي٠

مورږ بنسټډيری په U او د ټولو هغو توکو ډيری، چېU کې پراته دي ياني دU توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته ياني د M توکي نه دي پوره ډيری يا کمپليمنت بولو او د $\bar{M}$ سره يې په نخښه کوو٠

په لاندې څيره کې بيا د ډيرۍ غوڅې، - ټولنه او – کمون او برخډيرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زيات پام را اړوو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند:

پوره کوونکی- یا تکمیلډیری (یا د یوې ډیری کمپلیمنت) د یوې ډیری M پوره کوونکې ډیری $\bar{M}$ تیک هغه توکي لري(د بنسټډیری U څخه) ، کوم چې د M توکي نه وي٠

دوه ځله کمپلیمنتډیری جوړول خپلې لومړنی وینا ته ځي ، یانې　　$\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلګه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنی د توپیر او برګ کورنی اوسیږي٠ که دا دوه کورنی یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیری یا تکمیلډیری بلل کیږي یانې دا کلی پوره کوي٠

۲ ۰ ٤ څیرونه mapping یا اړیکې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو۰

په دې برخه کې لومړی د ډیری ضرب کلمه پیژنو یا تعریفوو او بیا د ضرب کلمې کارونه څیړو۰

پیژند ۲ ۰ ۹ : د دواړو ډیریو M یو او M 2 ډیریضرب(اټیرانضرب) هم ورته وایي، یانې په x سره څلیړي یا ضربیږي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظیم یا ترتیب شویو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډیری ده۰

بیلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظیم له مخې څل په ډیریو کې کموتاتیو نه دی دا په دې مانا، چې

په ټولیزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو رییلګڼونو ډیری وي۰ په هندسي مانا د کرښې د ټولو ټکو ډیری۰ RxR د ټولو ریيلګڼونو جوړو ډیری ده، په هندسي مانا د هوارې یا سطحې د ټولو ټکو ډیری ده۰

پیژند ۲ ۰ ۱۰ :

د څیړونې F لاندې د دوه ډیریو د ضربډیری $M_2 \times M_2$ برخډیری پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیرۍ، چې $x \in M_1$ له یوه یا ډیرو توکو $y \in M_2$ سره تنظیم

یا بهتره په باندې ځیره شي۰

داسی هم ویلی شو: د1 M توکي د2 M په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا ځېږه کیږي۰

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوریجنل یا اصلي توکی او y ځیره توکی بلل کیږي۰

د ټولو اصلي توکو ډیرۍ پیژندورشو یا تعریفورشو یا پیژنددیرۍ یا تعریفډیرۍ بلل کیږي او د ټولو ځېږه توکو ډیرۍ د ځېږوني ډېرۍ، ارزښتورشو یا ارزښتډیرۍ بلل کیږي۰

بیلګی

$$M_1 = \{a, b, c, d\}, M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

د جدول په توګه دM یو توکو ځېږونه ونه یا ځېږه کوونه د M دوه په توکو

ځېږه توکی — اصلي توکه یا ځیره کوونکی توکی

a -----------------------→ 1 , 2 ,5

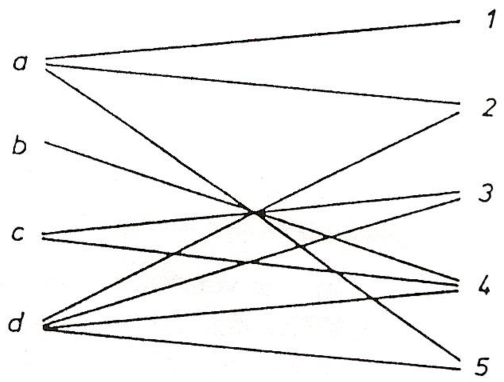
b -----------------------→ 4

c -----------------------→ 3,4

d -----------------------→ 2,3,4,5

یا دا لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځيرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

(د M يو او M دوه ډيريو د ټولو توکو جوړو ډيرئ)

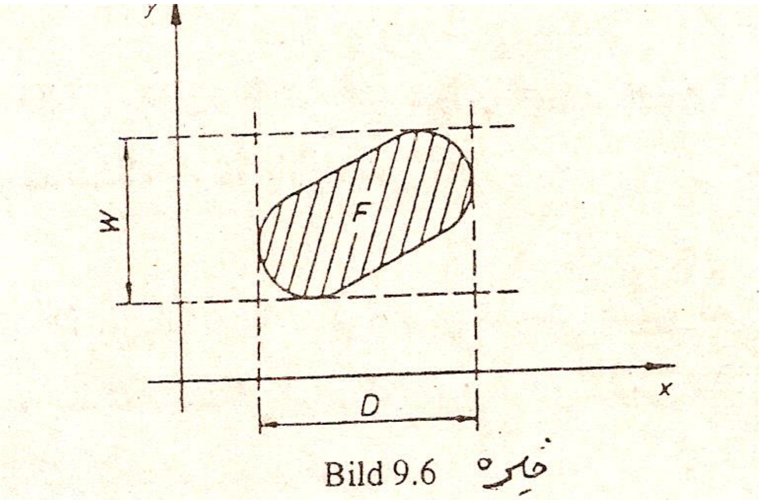


Bild 9.6 ځيره

دريم : هر پيدايښتي يا طبيعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې ځيره کيږي۰ داسې پيژند شوې يا تعريف شوې ځيره ونه په لاندې بڼه هم انځوريدلی شي۰

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم N د پيداينتي يا طبيعي ګڼونو ډيرئ٠ پيژندډيرئ يا تعريف- د ټولو پيداينتي ګڼونوډيرئ ده او ارزښتډيرئ د ټولو جوړه ګڼونو ډيرئ ده٠

ځلورم : كه M يو په يوه ښوونځي كې د ښوونكو ډيرئ وي او M دوه په ښوونځي كې د ځانګړو ټولګيو ډيرئ وي نو ښوونكي، چې په ټولګيو كې درس وركوي دا يوه څېرونه ده٠ د ښوونكو ډيرئ د ځانګړو ټولګيو په ډيرئ كې

مونږ د څېړه ونې څلور حالتونه توپيروو:

پيژندونه(دې ته دې ګران لوستونكي ښه پام وكړي):

لكه په لومړئ بيلګه كې په څيره ونه F كې د1 M ، چې تعريفډيرئ D سره برابر دئ او M2 ، چې له څيره ډيرئ , W سره برابر دئ ، توكي مو مخ ته پراته دي٠

له يوې څيرونې Fغږيږو د1 M په M2 باندې٠ دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لكه په دويمه بيلګه كې ، نو د يوې څيره ونې F غږيږو له M1 په M2 كې (دلته دې

« په » او ,په كې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د يوې څيره ونې غږيږو د1 M په M2 كې دلته دې دريمه بيلګه په پام كې راواړل شي٠

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د يوې څيره ونې غږيږو له M1 په M2 باندې٠ دلته څلورمه بيلګه د بيلګي په توګه راوړو٠ د دې نيونې لاندې چې ټول ښوونكى ځانګړي ټولګيو ته درس وركوي٠

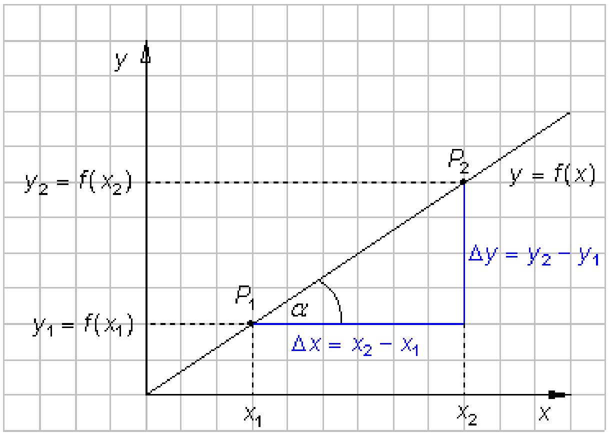
(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونكي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شايد خيرې هم رانه شي، خو كه لږ د شميرپوهنې سره بلد شو، بيا پرې پوهيدل ساده دې٠ زه مخ ته لرم، چې په دې هكله ليكلى كتاب، چې چاپ شوى نه دى دلته پر ليكه كړم، چې هلته بيا دا موضوع لږ غزيدلې ده٠

بيلګه ۲ ٠ ۵ : موږ په هواره يا سطحه كې څرګند شوې كړى د ډېريځل RxR په خير د برابرونونو له لارې رانيسو(R د ريبلګنونو ډيرى د ګنكربنې ټكې دي(ګڼونه دې وكتل شي))٠

الف) $y = 2x$ يوه خيره ونه ده د R په R باندې ، څكه چې باور لري

$$D=W=R$$



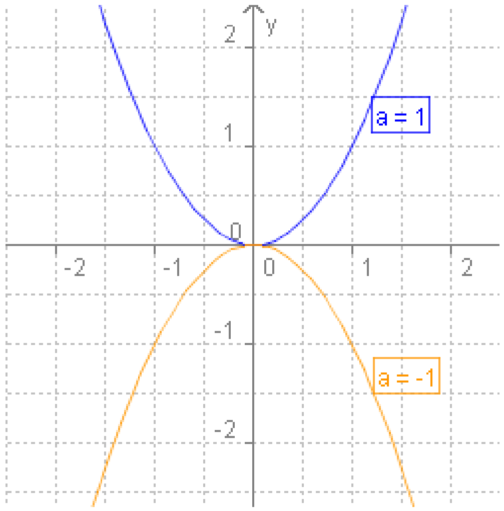
يادونه : په پورته خيره كې برابرون $y = ax+b$ دى.

ب) $y = x^2$

يوه خيره ونه ده د R په R كې ، څكه چې باور لري

$$D = R\,,\ W = [0, \infty]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



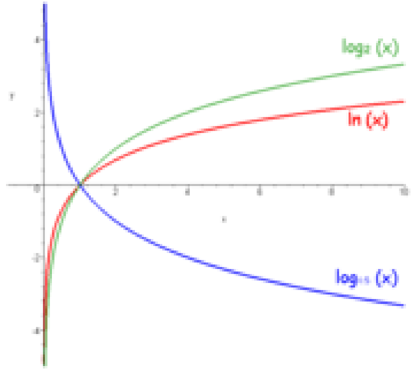
یادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ دول دی، چې b = 0 , c = 0 او a = 1 , a = -1
ایبنول شوي دي.

پ) y = log x

یوه خیره ونه ده له R په R باندې » ځکه چې باور لري.

$D = (0, \infty) \wedge W = R$

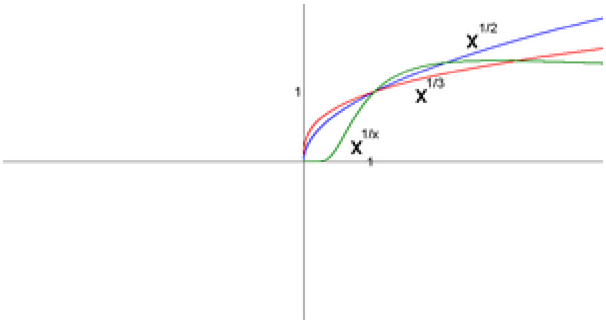


(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) $y = +\sqrt{x}$

یوه څېرونه ده له R په R ، څکه چې باور لري

$D = W[0, \infty]$



یادونه : پورته د دویې ،دریمې او په x -مې رېښې په مانا دی

څېرې له ویکې ښخه په مننه راکښنته شوي دي٠

پیژند ۲ ٠

یوه څېره ونه E یواځنی بلل کیږي٠ که هر $x \in D$ په ټیک یوه $y \in W$

باندې څېره شي٠ دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ ټیک یووار په $y \in W$

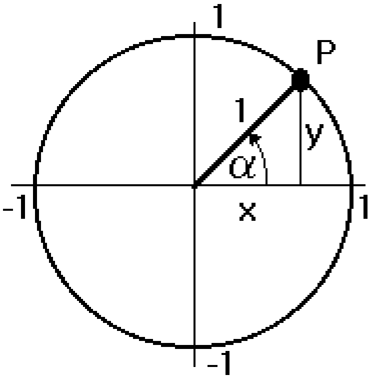
تنظیمډیرې یا جوړه ډېرې کې رامنځ ته کیږي٠ یوه یواځنی څېره ونه فنکشن

یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي٠

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنی څېره ونه » بلواک یا فنکشن بولم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



بيلګه ۲ ۰ ٦ : په بيلګه ۲ ۰ ۵ کې له الف تر ت پورې ټولې څيروني فنکشنونه يا بلواک دي۰ د دې پر ښت لاندې برابرون (يوونګردۍ ياني ګردی، چې وړانګه يې يو يوون يايووالی يا واحد وي څيره ۰) انځور شوې څيره ونه له R په R کې [-1,1] (D=W) فنکشن يا بلواک نه دي ، ځکه چې اصل دوه څيرې لري ياني که په تنظيمجوړه کې د څيره ونې لړي پرلپسې(لنډ:لړۍ) بدله شي، نو يوې پرښت څيره ونې ته راځو:

پيژند ۲ : څيره ونې F ته پرښت څيرونه F^{-1} د ټولو جوړو (x,y) ډيرۍ ده له $(x,y)\in F$ سره ۰

پيژند ۳ ۰ يوه څيره ونه يويواځنۍ بلل کيږي، که يواځنۍF او F^{-1} يوازنۍ څيروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x\in D$ او $y\in W$ ټيک يو ځل په تنظيم کې منځ ته راشي۰

يادونه : د څيروني نوم ښخه بايد ونه ډار شو دا څيره ونې څيرې کووني (که څوک يو کالی يا رخت څيرېکوي)او څيره کووني توپير، ځکه سره کيدی شي، چې هغه منځپانګه يې يو له بل توپير لري۰ موږ پښتو کې نږدې يو ډول ليکونکي ويونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپيريږي۰
ډيرۍ پوهنه د شميرپوهنې سټه ده، نو په راتلونکې کې به يې نوره هم ژوره وڅيړو او همدا اوس هم نور ګران هيوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار يا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د یوه کتاب په څیر هم وړاندې شي٠

۲ . ۵ تمرینونه

۱ – د لاندې ډېرۍ یا سټ توکي د شمیرنې له لارې انځور کړئ

الف {x لومړی عدد او$x < 20$ | x } (لوستل: د ټولو عددونو x ډېرۍ یا سټ، چې x لومړنی عدد او $x < 20$ دی).

ب- $\{x|x^2+x-6=0\}$

پ-$\{x^2+x-6=0$ او$x > 0$ |$x\}$ دا په نوکانوکې ټول له کیڼ ښي لور ته لولو

ت) { x | x ریبلګڼ او $x^2+1=0$ } دا ټوټه له ښي و کیڼ لور ته ولولی

۲ – د توکو x, y, z اړلرونوالی و ډیري M ته وښیی !

الف) M د لمړنیو ګڼونو ډیری

$$x = 4, y = 5, z = 6$$

ب) M د لاندې مساواتو حلډیری (اوبیډیری)

$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x = 0, y = 2, z = 3$$

پ) M د ریشنلګڼونو ډیری چې په اینتروال [3 ,3-] کی پراته دي

$$x = -2, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = 1/3$$

ت) M ډ ریبلګڼونو ډیری چی په اینتروال [3 ,3-] کي پراته دي

$$x = -4, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = 3$$

۳ – د لاندې ډیریو ترمنځ کومی اسپیکی پرتی دي

الف) M_1د ټول جفت ګڼونو ډیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

او M_2 د ټولو ټولګنونو ډیرۍ

ب) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$, حلونو (اوبیو) ډیرۍ

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ) M_1 د ټولو ګنو ډیرۍ چي پر ۶ ویشل کیږي.

او M_2د ټولو ګنونو ډیرۍ چي په ۳ ویشل کیږي !

او M_3د ټولو ګنو ډیرۍ چي په ۱۲ ویشل کیږي !

۴ – د ډیرۍ $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډیري ورکړی !

۵ – د لاندي ډیریو څخه ټولنډیرۍ ، غوڅډیري او دواړه ټوټډیري جوړ کړی !

الف) $M_2 = \{m,a,u,l,t,i,e,r\}$ $M_1 = \{ k,a,m,e,l\}$,

ب) $M_2 = \{ 3 ,6 ,9,.... \}$ $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$,

پ) $M_2 = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0\}$

۶ – د یوه ډیرۍ M او د تشډیري $\emptyset$ ټولنډیرۍ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړی !

۷ – د یوه ډیرۍ M او خپل همدي ډیرۍ ټولنډیرۍ ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړی !

۸ – وي دي $M_2 = \{ 3 , 6 , 8\}$ $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$

$M_3 = \{0 , 2 ,4 ,6 \}$, $M_4 = \{ 6, 12 , 18 \}$

جوړ کړی : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$!

۹ – جوړ کړی

الف) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ) $M \setminus \emptyset$

ب) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$

$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$

$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}, M_1 \setminus M_2 = \emptyset$

له دې پورته څخه M_1 او M_2 وټاکئ !

۱۱ – وي دې

الف) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ب) $M_1 \subset M_2$,

وټاکئ: $M_1 \setminus M_2$!

۱۲ – وي دی M_1 , M_2 (د نیمواز) اینتروال تکي ډيري:

$M_1 = \{-3, 3\}, M_2 = [1, 7]$

وټاکئ

الف) $M_1 \cup M_2$ ب) $M_1 \cap M_2$ پ) $M_1 \setminus M_2$

ت) $M_2 \setminus M_1$ ټ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دې $M_2 = \{\{a, b\}$, $M_1 = \{1, 2, 3\}$

الف) د $M_1 \times M_2$ ځل جوړ کړئ

ددې لاندې ب) تر ت) برخی تمرين لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول ځیرونی دي

$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$

$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$

$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$

$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$

$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$

په ټولو حلنونو (اوبیو) کی F_1 تر F_5 ورکړئ .

پ) په ځټ ځیرونه ورکړئ

ت) د ځیرونو F_1 څخه تر F_5 پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځنی دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . دحقيقي اعدادو (-ګڼونو) سره د شميرلو بنسټيزې نښلونې

(ترنی، کارونی یا عملیي)

۳ . ۱ د اعدادو د سیستم جوړښت

۳ . ۱ . ۱ طبيعی اعداد یا -ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتیا درلوده. له دې امله يې پرمخ ودیینه کې هڅې وکړې، چی له ډیری (سیټ) (د لیکنې په دننه کې ډیری پوهنه هم څیړلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چی دا ډیری تشریح کړای شي او د انسانانو او چاپیریال(طبیعیت) د پرلپسې اخ او ډب په نتیجه کې د ګڼ یا عدد وی(کلمه یا لغات) راپیداشوی، چې د عدد یا ګڼ کلیمې پربنسټ د ریښتینو شیانو څرګند څومره والي (کمیت)Quantitative ترلاسه کړي. د طبيعی اعداد و څخه په ګڼلو یا که غواړې شمیرلو کې ګټه اخستل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ الف د طبيعي عددونو(پيدايښتي ګڼونو) جوړښت

پيژند (تعريف)۳ ۰ ۱:

الف) ټول طبيعی اعداد د ډيری په څير يوه ټولګه جوړوي او د طبيعی اعدادو ډيری يا ست په نامه ياديږي يا يې طبيعی اعداد بولو او په N او همداسې N° سره يې په نخښه کوو۰

ډير پای طبيعي اعداد شته ، ځکه چی په هر طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد هم شته دئ (يعنی په هرڅومره لوي طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد شته دئ، چې دا وروسته روښانه کيږي)۰

ب) دطبيعي ګڼونو(اعدادو) اکسيوماتيکيAxiomatic جوړښت

اکسيوم جمله ده، چی اوبيونه (حل) نه غواړي او همداسی منل کيږي۰ دا چی جمله ، اکسيوم څه دي په لومړۍ برخه يانې سم اند (منطق) کې دې وکتل شي۰

طبيعی عدد کلمه د جيوسيپې پيانو(Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز۰کال) اکسيومونو پر بنسټ لاندې پيژند لري يا په لاندې توګه تعريف کيږي:

۱ – د صفر ګڼ يو پيدايښتي ګڼ دئ

۲ - د هرطبيعي عدد يا ګڼ m لپاره يو يوائځنی ټاکلی طبيعي عدد n شته، چې سملاسي(ترلی) د m پسی ګڼ دئ، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^{\wedge}$

دلته $m^{\wedge}$ د m پسې سملاسې يا ترلی ګڼ يا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبيعي عدد زيات له زياته په يوه طبيعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دئ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ – هيڅ طبيعي عدد نه شته، چې پسی راتلونکی پيداينښي عدد يې صفر وي٠

٥ – که طبيعي عددو ډيریَ M صفر د توکي په څير ولري او که له هر طبيعي عدد m سره د هغه پسی تړلی راتلونکی عدد يا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبيعي عددونه خوندي لري يا په بل ډول » ټول طبيعي اعداد په کې ځاي دي٠

يادونه: ځنې ادبياتو کې، د پيانو سيستم کې، د صفر په ځای ۱ ليکل شوی. په دې حالت کې بيا صفر ته د طبيعي عدد يا ګڼ په څير نه کتل کيږي. که بيا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبيعي ا عدادو ډيرئ يا –ستټ يې د صفر سره بولو.

۱ . ۱ ب : د طبيعی اعدادو يا ګڼونو انځورونه او سيستمونه:

طبيعي اعداد په نخښو (دې ته په الماني کې Zifferوايي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څيرو، دی) انځوريږي. د دې لپاره چې دا لړ ځای ونيسي، نو د لويو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنيو سره يوځای کيښول شوې دي. دا چې څرنګه يوه د عدد يا ګڼ نخښه له بل توپيريږي، په لاندې ډول يې د زياتون يا جمعي سيستم او ځای سيستم کې ښايو.

په زياتون سيستم کې هر بنستيز ،،ځای،، يو ،، ځای ارزښت،، لري. د څيفرونو زياتون د يو په بل کې د ورزياتشوي بنستيز څيفر پخپله هغه عدد يا ګڼ ورکوي. بيلګه يې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنستيزو څيفرونو جوړ شوی(ترې لاندې لسيز د اعدادو سيستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څيفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پيل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

رومي عددونه:	M	D	C	L	X	V	I
عربي عددونه:	1000	500	100	50	10	5	1

طبيعي عدونه له دې امله يو د بل ترڅنګ ليکو چې کم ځای ونيسي لکه د بيلګې په توګه:
CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کی، که بنسټيز کوچني ګڼنخښنی لکه C , V , I د لوي ګڼنخښنی و کيڼ لور ته وليکل شي نو دا مانا لري چی دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی. د بيلګي په توګه: $XC = C - X$.

بيلګی: الف: MMDCCLXVIII په دې ماناده 2768

ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځايسيستم: په ځاي سيستم کی هره بنسټيزه نخښنه يو «ځاي ارزښت نخښنه ارزښت» لري.

لکه : g– ئيز ځاي سيستم(پوزيشن سيستم ((Positionssystem)): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئيزځای سيستم کی په دې ډول ده چی د يوه ورکړشوي ستنی په بنسټ($g \in N$) $g \geq 2$ هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوريدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + ... + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټيزې ګڼنخښنی a_i، g د $i = 0,1,2,...,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چی $a_k \neq 0$ وي په کار راځی يا اړتيا ورته شته.

ليکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} .....a_1 a_0$$

که د بدليدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کيږي، نو بهتره به وي چی په

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ډول وليکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کې ګنډل په لسيز سيستم (ګنځای ارزښت) باندې کيږي، چې تل داسې نه وه، لکه په افغانستان کې چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسيز سيستم کې ګنځای «ارزښت» لري چې انځور شي، مګر په لرګي کې ځای ارزښت نه لري چې کرښه چيرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون يا تعداد څخه پور څرګنديږي.

بل د ګڼلو سيستم . لکه د مخه مو چې تر پام لاندې ونيوه، د ګڼلو رومي سيستم دی چې نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډک، زياتونسيستم(جمعی –) څرګنديږي.

بيا هم غواړو چې دا په لاندې ډول ځانګړی کړو:

۱ – هره لاندې نخښه I, X, C کړای شي چې زيات ترزياته ۳ ځله(۳ واری) په يو ګڼ کې پرله پسې يا څنګ تر څنګ راشي

۲ – هره، د ګڼ نخښه V, L, M ,خورا زياته يو ځل څنګ تر څنګ په يوه ګڼ کې راتلی شي.

۳ – که بنستيز نخښه I, X او يا ....__-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D يا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې يا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کميږي .

زياتون او کمون (جمعه او منفي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – په هرګڼ انځورونې (Zahlendarstellung) کی کیدی شي چې یواځې یو بستهیز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: 1098 = MXCVII مګر نه IMIC
۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمی تخنبی په کار واچول شي.

عربي ګڼونه : دا ګڼونه، چې موږ ورسره بلد یو، د لسیز سیستم ګڼونه دي، چې عربی ګڼونه بلل کیږي. دا د ګڼلو لسیز سیستم عربو د هند څخه راوړی چې په دولسمه پیړۍ کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر(۰) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر9 پورې، چې

ځیفر ورته واي (همغه عربی صفر دی) چې دلته ترې بنستهیز ګڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چې ګوته مو ورته ونیوه زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، ځکه چې د یو ګڼ ارزښت د ګڼ تخنبی زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د ګڼونو انځورول ساده دي.

> **تعریف ۱ . ۱ ب** : په یو «ځاي ارزښت سیستم» کی همغه ګڼ لوي دی چې زیات ځایونه ولري، که چیرې د ګڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي(مساوي وي) نو همغه ګڼ ستر دی چې له کینی لورې یی تخنبه لویه وي.

لسیز – یا لسګونی سیستم: لسیز سیستم همغه ځای ارزښت سیستم دی چې له انځورونی یی څرګندیږي. په لسیز سیستم کی د ګڼ انځورولو تخنبی، لکه د مخه مو چې انځور کړې، ۹،۸،۷،۶،۵،۴،۳،۲،۱،۰ دي. ۱۰ ګڼ د لسیز سیستم بنستهیزه تخنبه ده. دا چې نور ګڼونه نه انځوریږي، نو ځای هلته ډك دی چې پرله پسی (ترتیب یانظم) د ۰ تر ۹ یعنی له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پسی جګ ځای يوون (واحد) د په کار اچول شووګڼنخبنو ګنون (تعداد يا شمير) دی، خمور په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونيوله، د پای (نه لايتناهی) ډيري (set , die Menge) ګڼو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفايت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او ۹ –امه برخه دې وکتل شي)) غړو ګنلو لپاره لاندې ګڼونه کفايت کوي: داسی نور. تولودې ګنونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګنونو ډيری N ويل کيږي. ددې لپاره ليکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, ...\}$$

موږ ګڼونه په کوچنيو لاتينی ټکو يا حروفو ښايو لکه n . ... a ,b,c, . دا رينښتوني

(رينښتينوالی يا واقعيت) چی n دې يو طبعي ګڼ وي، داسی ليکل کيږي $n \in N$ يا $n \in N^*$ (ويل کيږي چی: n د طبعي ګنونوډيري N يا*N توکی دی(لنډ n د N يا *N ځخه دی)) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (ځيفر) توپير ته پام وي.

موږ دګڼونو ټاکلو لپاره بلد يا اشنا د نخښنډيري لسيز سيستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نخښبو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول يو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}\, .10^{n-2} + ..+ a_2\, .10^2 + a_1.10 + a_0\, 10^0$$
$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو ځيفرونو ډيري هم انځوريدی شي. د بيلګي په توګه په اينفورماتيك (Infrormatik) کی، چی د دوالسيستم (Dualsystem) (دوئيز سيستم) ځخه کار اخستل کيږي. ددې لپاره دوه ګڼنخښي (ځيفرونه) ليکل کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسیز او دوه ئیز سیستمونو لمړني ګڼونه یو د بل ترڅنګ کښل شوي:

دوه ئيز سيستم	لسيز سيستم
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4

په ټولیزه توګه(عمومي توګه) دلته یو څیفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ یو طبیعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots\ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 , \; a_i \in N$$

بیلګه ۱ . ۱ :

$$59 = 1.32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$$

$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

یا دونه :: څه لنډ لنډیزونه

د طبیعي اعدادو ډیرئ یا سټ داسی په نخښنه کوو:

د پیدایښتي یا طبیعی ګڼونو ډیرئ $N = \{ 1, 2 , 3 , \ldots \}$

دپیدایښتي ګڼونو ډیرئ د صفر سره $N° = \{ 0, 1 , 2 , \ldots\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ه کتابونو کی دا د صفر نخښنه په لاندې برخه کی راځي۰

۳ ۰ ۱ ۰ ب د طبیعي اعدادو یا ګڼونو انځورونه:

طبیعي اعداد په نخښو انځوریږي۰ دا عددونه یا ګڼونه د ځان لپاره یو سیستم لري، چې هغه زیات یې موږ نه څیرو۰ زموږ لپاره غوره هغۀ عربی اعداد یا ګڼونه دی۰

یا په بل ډول : دا عددونه چې موږ ورسره بلد یو د لسیز ځایستسم عددونه دي، چې دا مو د مخه په ګوته کړل۰ دا کورونه (خوني یا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نیوی شي او بیا یې هر ځاي یو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سیستم« دی۰ لومړي کور ته یویز، دوم ته لسیز، دریم ته سلیز او همداسی ، چې دا مو د مخه لړ روښانه کړي۰

انځورونه یا څیفرونه یې دي : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټیز ګڼونو نخښی دي، نور یې په کورونو یا ځایسیستم باندې روښانه کیدی شي۰

پیژند ۳ ۰ ۱ ۰ ب :

په یو» ځاي ارزښت سیستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چې ډیر ځایونه ولري۰ که چیرې د ګڼ د ځایونو یا کورونو ګڼون (تعداد) سره برابر وي۰ نو بیا هغۀ ګڼ لوي دی، چې کیڼ لور یې ګڼنخښه لویه وي۰

۳ ۰ ۱ ۰ پ : طبیعي اعدادو کې د شمیرنې بنسټیز قوانین

اوس په لاندې ډول د پیداینت ګڼونو، په ټولیزه توګه د رییل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري(معتبر) بنسټیز د شمیرنې قوانین وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : د انډول (نظم یا ترتیب یا لوي واړه ترتیب(Anordnung) بنسټیز قوانین:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کی یا د نخښی خوله کی عدد یا ګڼ لوي دی او د وتلی کونج یا لوي کونج >که نخښه یا داسی کونجکی یا څټ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دی٠ که ګڼونه یا اعداد ۱۵   او ۲۳ ولرو نو د لویواړه اړیکی داسی لیکو، یانې که $23 > 15$ ولرو نو ترې څرګندیږي، چی عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دی .

د دوه طبیعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړیکو څخه ټیک یوه اړیکه باور لري»

$a < b \quad , a = b \quad , a > b$

۲ ـ ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځاي توری ولیکو هم $a = a$ به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ریفلیکسیویتي Reflexivity)

۳ – له $a = b$ => (لاس ته راځي) $b = a$ (سیومتري، انډول، ورته وابي (Symmetry

د انعکاسي (ایینه ونیز – یا هندارونیز) برابروالی یانی که چیري دا عددونه ورانیه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابریږي٠ که انعکاسي(اینه ونیز)برابر نوم ورته کیږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به یې   همغه سیومتري وبولو٠

٤ ـ له $a = b$ او $b = c$ => (لاس ته راځی) $a = c$(ترانزیتیوTransitivity)

ترانزیتیو ګورو، چی یو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، ځکه چی دا ګڼونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا وړل کیږي٠

٥ – له $a < b$ او$b < c$ => (لاس ته راځی) یا $a < c$ یا $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

وړاندیز : که چیری دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به وي، خو له شميرپوهنی پرته مانا باندی يې هم پوهيدنه ښه او اړيينه ده٠

ب : د زياتون (جمع) .Addition n بنسټيز قوانين

که چيرې له طبيعي اعدادو څخه يو ، دوه يا څو ګڼونه يو په بل زيات شي، نو يو پيدايښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه(عمليه) «زياتون يت جمعه » بولو، ځکه، چی ګڼونه يو په بل زياتيږي٠

پيژند: د همغه ډول شيانو يا يو څه يو په بل زياتيدلو ته زياتون (جمع) وايو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزيات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی يا

۱۰ + ۱۸ = ۲۸

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ يو پر بل زياتيږي، نو له دې امله يې «زياتېدونی» (ما تراوسه زياتووني بللي، خو فکر کوم،چې زياتيدوني يې ښه نومه ونه ده) بولې، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کيږي ٠ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وايه ٠ + زياتوننخښه ده او = برابروننخښه (مساوات علامه) بولو

دجمعې يا زياتون بنسټيز قوانين

۱ - د دوه طبيعي اعدادو a او b لپاره تل يو زياتون (جمع) a + b شته دی

۲ - يواځنوالی : له a' = a او b' = b څخه لاس ته راځي: a'+b' = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAWکموتاتيو- يا بدلون قانون دی:a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوشياتيو - سره ګډېدنې قانون. لرو (a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – يا همغږيزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library

له a <b څخه لاس ته راځي a+c < b+c

يادونه : په a+b=c کې a اوb زياتېدوني a+b زياتون او c زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه : په زياتون کې لاندی زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپيلی توکی: په N° کی يو توکی شته، چی که د هرپيدايښتي توکی سره په زياتون يا جمعه کی ور زيات شي همغه توکي ورکوي۰ دا توکی صفر دی: a+0=a

ناپيلی توکی کړی شو نالوريز وبولو ،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولی يا د زياتون ارزښت همغه پاتيږي، همداسې ناړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې وبولی۰

پ : د کمون (تفريق)Subtraction بنسټيز قوانين

پيژند:د پيدايښتي ګڼونوa او b لپاره، چې a>b وي، يواځی يو x شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: a - b = x

که x= a -b شته وي، نو ټيک يواځني شته دي(موخه x دی)

نومه ونې: b کميدونی يا مفروق (تراوسه مې کمونی بللی) a ترې کمونی يا مفروق منه a +b کمون او x کمون- يا تفريق ارزښت بلل کيږي يا بولو :

موږ پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونخښی ليکو، چی ساده يې ونوموو:

20 – 10 = 10

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کی موږ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه یې ۱۰ ده، نو له دی امله یې داسی نوموو:

تر مخ یادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، ځکه، چی ترې کمیږي(ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کموونی« یا کمیدونی(ع۰ مفروق) دا بل لس یې «کمون ارزښت» یا د کمون لاس ته راوړنه(لنډ: لاس ته راوړنه یا کمون) (ع ۰ حاصل تفریق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

ت : د ځل (ضرب) Multiplication بنسټیز قوانین:

۱ - د دوه پیدایښتي ګڼونو a او b لپاره د پیدایښتي ګڼونو په ډیری کې تل یو ځل a.b شته دی. د a.b لپاره داسې هم لیکو ab په پورته کې a او b ځلووني (ضربیونه) او ab=x « ځل ارزښت » یا ځل(حاصل ضرب) دی۰

وايي چی ضرب وهلو ته وايي او د جمع (که جمعي) لنډه طریقه، چی۰۰۰۰وي یا د زیاتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پیژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راویستلي وي۰

که ووایو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کیلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

لیکو: ۱۲۰۰ = ۸ × ۱۵۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کیلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضربیونو څخه به هم ځلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له $a = a'$ او $b = b'$ څخه لاس ته راځي $a'b' = ab$ (یواځیتوب)

۳ - لرو $ab = ba$ کموتاتیو – یا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوشیاتیو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ویشونې- یا دیستریبوتیو قانون Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګښتیوالي یا یوغږیزوالي قانونMonotony

ټ – د ویش بنسټیز قانون Division

پیژند٣ ٠ ٢ :

که د دوه طبیعي عددونو a او b لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانی صفر نه وي یو طبیعي عددx شته، چی برابرون (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا b/a د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چی ماتګڼ(کسر) یې هم بولو

١ – که $a / b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي ، نو یواځنی شته دی(یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ویش ارزښت، b ویشونی یا ویشه وونی دی، ځکه چی په یوځه ویشل کیږي او a پرویشونی بلل کیږي، ځکه، چی څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم ، حاصل تقسیم ٠

ګورو چی له قاسم یا مقسوم او همداسی د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- یا پرې ویشونی ، ویشه ونی اوویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهېږ دي، خو په خواشینی به وه وایم، چی تراوسه په شمیرپوهنه کی ورسره نابلد یو ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وویشو، نو هر یوه ته درې کتابچې رسیږي٠ ګورو، چې ۱۲ په یو څه ویشلکیږي، نو ویشونی یې ښه نوم دی٠ دا ۱۲ په څلور ویشل کیږي پر ۰۰۰ ویشل کیږي، نو له دې امله څلور پر ویشونی بولو، درې یې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسیم وایه، له دې امله ورته ویش ارزښت وایو او دا کارونه یا عملیه خو ویش بلل شوی٠

۳ . ۱ . ۲ ټولګڼونه یا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبیعي عددونو a او bکمون یا تفریق (x= b-a) ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته د طبیعي عددونو ډیری یا سټ کی شته، چې وي : $a \le b$

د شمیرپوهنې نخښو باندې داسې لیکل کیږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \le b$$

انګریزي یې if and only if ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته(دا شننه یا وینه پورته د شمیرپوهنې نخښې ته ده)٠

که هغی نخښی ته وګورو، نو هم لاندې ترې څرګندیږي، له ښی لور کیڼ لاس ته راځی او په څټ(برعکس) له کیڼ لور ښی لاس ته راځی٠ یا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځی او په څټ٠

ټولګڼونه یا تام اعداد هم د انسانانو د اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي ، یا منځ ته راوړل شوي٠که چیرې سپین د خړ ۱۰۰ افغانیپوروړی وي او سپین ورته اتیا افغانۍ ورکړي، نو سپین بیا هم شل افغانی پوروړی پاتیږي، دا په دی ما، چې ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ ګورو، چی ۲۰ – یو پیداینتي ګڼ یا طبیعي عدد نه دی٠یا 20- = 100 – 80

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترېکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه يې طبيعي عدد نه دی۰ اوس يوه د اعدادو بلې ډيری پيژند ته اړ کيږو، چی هغه د ټولګڼونوډيری ده او دا د طبيعي عددونو او د طبيعي عددونو کمي(منفي) او صفر سره يوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي(په ډيری کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګڼونو ډيری ده او داسې يی ليکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots \}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پيداينتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو يا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پيداينتي ګڼونو مخنخښه په کموننخښه يا منفي نخښه باندې سنبالووياني (کيدی شي زموږ هيوادوال د څټ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زياتی يا کمی ښايي د ګڼ کيڼ لور ته ليکل کيږي، چې دا ما مخنخښه ليکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شميرقوانين په Z کې هم باور لري

د ټولګڼونوډيری

$$Z = \{ \ldots. -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots. \}$$

د مخه مو شميرقوانين، چې د پيداينتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګڼونو لپاره هم باور لري

د کمون يا تفريق بنسټقوانين (پسی يا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګڼونو يا تام اعدادو a او b لپاره يو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چیa+x=b برابرون باوري دی

د ويش تيوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجز یې لپاره خورا ګټور دی باور لري

الف) یو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦) ویشونی دی، که د اخر ځیفر یا کور (له اخره(موخه تری ښی لور دی) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنستیزو ځیفرونو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦ ۰۰۰ویشونی وي) په دوه ویشونی ګڼ جوړه (جفت) نومیږي او بل ډول یی ناجوړه(طاق) بلل کیږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهیدلی شو

ب) یو ګڼ په ٥ (٢٥ ، ١٢٥ ، ٦٢٥ ، ۰۰) ویشونی دی، که د اخر(له ښي لور) بنستیز ځیفر (د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنستیز ځیفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ (٢٥، ١٢٥ ، ٦٢٥ ۰۰۰) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وایې او موږ یې شاید لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ ولیکم، خو بیا دې هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دی ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي۰

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنستیز ه ګڼونخښو(ځیفرونو) زیاتون پوهیږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونیول شي۰

بیلګۀ : د 126 پروت زیاتون یا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت) یو ګڼ په 11 ویشونی دی که د هغه ګڼ الترنیري(نخښه بدلونکی) پروت زیاتون۰ پر 11 ویشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

الترنیري پروت زیاتون، چې پروت کمون هم ورته وایی له بنستیزو ځیفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زیاتون څخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ،۰۰۰ زیاتون کمون پوهیږ.و ، بی له دې، چی ځاي ارزښت یې په پام کی ونیول شي یا په بل ډول، که د ناجوړه کور زیاتون څخه د جوړه د زیاتون کم کړو۰

بیلګه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ویشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چی الترنیري زیاتون یانی ۱۱ = ٤ – ۱۵ یې په ۱۱ ویشونی دی۰

ټ) یو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که (د ګڼ له اخر څخه جړړشوي) د درېګوني ګڼونو زیاتون پر ۳۷ وېشونی وي.

بیلګه:

37|(448+352+216+20)⇔ 37|1036 ځکه چې 37 |20216352448

ث) یو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ویشوړ دی، که د هغه (د ګڼ له لخ څخه جوړ) درېګونی الترنیري زیاتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشونی وي.

بیلګې : 7|(604-37)⇔ 7 | 567 ځکه چې 7 | 37604

13| (889-293+709-96) ⇔ 13|1209 ځکه ، چې 13 | 9679293889

ج) یو ګڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر څخه جړشوی) دوهګونی الترنیري زیاتون په ۱۰۱ وېشونی وي.

بیلګه:

101|(69-06+63-03+79)⇔ 101|202 ځکه چې 101|7930630669

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : که پیداښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت يې هر ګڼ وي او که پېداښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ویشي بې له پاتي یانې ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دی.

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ټ) خوراغټ ګډ پرویشونی او خورا کوچنی ګډ زیاتځله

یا بزرګترین قاسم مشترک و کوچکترین مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرلیک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي يې په لومړنیو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنیوګڼونو ځله وونو هر یوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانیسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان(په خپل ځای کې دې وکتل شي) یا جګګڼ بې ټیټ یا کم وي . یانې

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ یانې ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي یانې د دواړو ګڼونو پروېشونی

دی او خورا غټ پروېشونی هم دی. یانې ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پروېشونی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ : ۵۲ د یورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دی.

داسې ګڼ ، خوراغټ ګډ پروېشونی، بولو (لنډ ونه يې : غ ګ و)

هغه ګڼ، چې د دوه یا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته خورا ,,

غټ ګډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ ګ و)   وایو. یا

(بزرګترین عامل (مقسوم علیه) مشترک)Greatest commom divisor(g c d)

اوس بیا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله وونې، له هر څخه یو چې په جګ توان وي

یانې خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان   رابېلوو او بیا یې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ یانې ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زیاتځله دی (یانې ګډ په دواړو

وېشل کیږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دی. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زیاتځله(څو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (یانې ګډ) زیاتځله (ګډ څو واره) دی

لنډ یې : خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډونه یې: خ ګ ځ)   یا
(کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالاضعاف Least common multiple(l.c.m.)
الاقل)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران هيوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر يا بيخي پوهوړ او ساده وي.

وړپسې داسې مخ ته ځو:

دا چې موږ په پيدايښت يا طبيعي ګڼونو کې له شميرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پيژند ورکوو:

پيژند(تعريف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې ټولګڼونه وي۰ وايو چې « ګڼ a ګڼ bويشي» (او يا هم a د bپرويشونې دئ او يا همa د b ځو برابره (زياتځله) دئ) که يو ټولګڼ u شته يا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره ليکوa|b (وايو، چې ګڼ aګڼ b ويشي ، خو اړيين يا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼ ورسره وويل شي۰

که a د bپرويشونی نه وي، نو د دې لپاره ليکوa|/b(دا نخښه /| دې د نه ويشونی لپاره ومنل شي)

بيا ليکو، چې : پيدايښتي ګڼونه، چې په ۲ ويشل کيږي جوړه (جفت) ګڼونه بلل کيږي او که نه نو ناجوړه (طاق) ګڼونه بلل کيږي۰ د صفر ګڼ د پيدايښتي ګڼونو په ډيری کې يو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې يا اوبيونې د دې ويشکلمی لپاره يو څو ساده شميرقاعدې را يوځای کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کيږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه يا زړه پورې ټولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

(۱) ± 1 او $\pm a$ ويش (دا په نامه « ساده» پرويشوني دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۲) د ۱ پرويشونى ۱ او ۱ - دي

(۳) تل باور لري، چې 0 | a او a | 0 يوائى په هغه حالت کې باور لري، چې a = 0 وي

(٤) له a|b او b|c <= a|c

(٥) له a|b لاس ته راځي: ac|bc ٠که c |= 0 وي ، نو د دې په څېټ هم باوري

دي٠ دا په دې مانا چې، که ac|bc وي، نوa|b هم باور لري٠د ګڼونو

ليکدود له مخې، که نړيوالجال ته پورته شو داسې ليکو، که نه دا پورته بسيا

کوي: $c \neq 0, a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$

(٦) لهa|b او c|d څخه لاس ته راځي او په څېټ ac| bd لنده ليکنه يې(که نج ته پورته شوه): $a \mid b, c \mid d \Leftrightarrow ac \mid bd$

(۷) له a | b او b| a لاس ته راځي $a = \pm b$

(۸) له a |b اوa|c څخه لاس ته راځي a|(bx+cy) د ټولو ټولګڼونو x او y لپار

(۹) ټيک هلته a|b کله چې وي|b| | |a|،

(۱۰) که a | b او b = 0 نه وي نو باوري دي - | b| < a < |b|

حل (اوبې) : (۱) له a1 = (-a)(-1) = a لاس ته راځي

(۲) له a0 = 0 لرو a | 0 . که وي a | 0 , نو يو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چې وي 0u = a

او له کومې چې لاس ته راځي a = 0 .

(۳) ساده دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۴) که a | b او b | c , نو تېولګڼونه u او v د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دې لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس $a | c$.

(۵) که a|b ، پس یو تېولګڼ u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$ سره، د کوم څخه چې لاس ته راځي $ac | bc$. د $c \neq 0$ لپاره دا اخرنتخیر په شټ کېدی هم شي.

(۶) د a|b , c|d او (۵) څخه لاس ته راځي چې ac|bc او bc|bd ، د (۴) له مخې $ac | bd$.

(۷) د a | b او b | a څخه د تېولګڼونو u او v موجودیت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره. برسیره پر دې لاس ته راځي $a(uv) = a$, پس $a=0$ یا $u=v=\pm1$. په لمړي حالت کې د a | b له امله $b = 0$, پس $a = b$. په دوم حالت کې $a = \pm b$ دی.

(۸) د تېولګڼونو u , v لپاره دي $au = b$ او $av = c$ ، نو له دې $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځي، پس $a | (bx+cy)$ د ټولو تېولګڼونو x او y لپاره.

(۹) وي دې a|b . له a | b ، a| | a| او |b| | b څخه او د (۴) څخه څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چې |b| | |a| . په څټ: که |b| | |a| باورلری، نو د |b| | |a| ، |a| | |b| ، a | |a| او b| |b| څخه په ورته ډول لاس ته راځي a | b .

(۱۰) دی a | b ، پس د (۹) هم |b| | |a| . که $b \neq 0$ وي ، پس یو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چې $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

که b|a د تېولګڼونو a,b لپاره د $b \neq 0$ سره، نو یو یواځنی معلوم ګڼ q شته (د a او همداسې د b «کومپلیمنټ پرویشونی» بلل کیږي)، چې لرو $a = bq$.

په تېولیزه توګه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۳ ۰ ۲ (د ويش الګوريتم): a اوb دې تولګنونه وي۰ د $b \neq 0$ سره ۰ نو يوائځني ټاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شميرلکيدونکي تولګنونه q اوr (چې د a پرb ويش

څخه لاس ته راځي او «ويش» په همدې ډول « پاتی بلل کيږي، شته دی،د کومو لپاره چې باور لري: $a = bq + r \ \wedge \ |0| \le r < b$

هر يو تولګڼ کم له کمه ساده پرويشونی لري يعنی ± 1 او پخپله د دې تولګڼ زياتيز(مثبت) او کميز(منفي)۰ دې پرويشؤنو ته «سادۀ پرويشونی» وايو۰

پيژند ۳ ۰ ب :

هر يو تولګڼ، چې يوائځی او يوائځي ساده پرويشونی ولري موږ ورته لومړنی ګنونه وايو او دا لومړنی يا پريم ګنونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پريم يا لومړی ګڼ د پيدايښتي ګنونوتوکی دی۰

هريو تولګڼ، چې لومړنی ګڼ نه وي د لومړنيو ګنونو په ځلونو(ځله وونو)(ضريبونو) توته يا تجزيه کيدی شي۰

بيلګی :

1 - $240 = 24 \,.\, 10 = 3 \,.\, 8 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2^4 \cdot 3 \,.\, 5$

2- $2310 = 2 \,.\, 1155 = 2 \,.\, 3 \,.\, 385 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 77 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11$

$3750 = 25 \,.\, 15 \,.\, 10 = 5 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^4$

که پورته بيلګو ته په ځير شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګنونو کی ګڼ ۲ د دواړو پر ويشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګنونو پرويشونی دی يانی $2.3 = 6$ برسيره پردې ګڼ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګنونه ويشي او شايد په دې ګنونو کی يو خورا غټ ګډ پرويشونی هم وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته درېواړو بيلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څیر خوندي دي يانې دا ګڼونه ويش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګڼونو غ۰ګ۰پ دئ

پيژند ۳ ۰ پ :

a اوb دې ټولګڼونه وي او d دې يو مثبت يا زياتونى ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2) t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a اوb خورا غټ ګډ پرويشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کيږي d لپاره داسی ليکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرويشونی(لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کيږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a اوb پروېش پردي بلل کيږي يانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر ووېشل شي.

يادونه : په زياتو ادبياتو کې لنډونه په درېتورو کيږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرويشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

يادونه: ما د خورا غټ ګډ پرويشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړانديز لري، نو زه يې ضرور په پام کی په پوره خوښی نيسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبياتو کي بزرګترين قاسم مشترک او کوچکتريب مضرب مشترک وايي او ذوالاضعاف الاقل يې هم بولي۰

يادونه : که چيرېd او *d دواړه دa اوb غ ګ پ وي، نو له پورته پيژند څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی $d^* \mid d$ او $d \mid d^*$ ، نو د $d \geq 0$, d^* له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله به وښايي ، چې داسې غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ ۰ ۳ :

په خوښه ټولګټونوa اوb لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو ټولګټونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل(اوبې): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون (په پام کی دې وي چې د (a , b) تعریف په a او b کی سیومتریك دی) له امله اجازه لرو چی $b \neq 0$ ونیسو.

موږ اوس رکورسيف (rekursiv (دا په دې مانا چی د مخه غړي څخه وروستی یعني وریسی غړی لاس ته راوړلکیږي)

ټولګټونه......,r_{-1}, r_0, r_1, r_2 او .... q_1, q_2 په لاندې ډول تعريفوو : وي دې , $r_{-1} = a$

$r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \neq 0$ لپاره ټولګټونه r_i , q_i داسی تعینوو چی $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $o \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چی له جملی (۱ . ۳) څخه ممکن کیدی شي . باید یو نه منفی ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چی لرو $r_n \neq 0$ مګر $r_{n+1} = 0$, چی بی له دې بیا یوه نه پای د طبعي ګڼونو لویدونکی یا کمیدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چی ناشونی(ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شیما ته لاربشودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

....

....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا مساوات د شکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسی) لاس ته راځي:

$$r_n | r_{n-1} , r_n | r_{n-2} , \dots r_n | b , r_n | a$$

دا په دې مانا چی r_n د a او b یو غ گ و دی. t دې د a او b یو بل غ گ و وي، نو په دې حالت کی که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسی لرو

$$t | r_0 , t | r_1 , t | r_2 , \dots , t | r_{n-1} , t | r_n$$

دا په دې مانا چی $|r|$ د a او b غ گ و دی.

هر د دې گڼونو r_i د ($-1 \leq i \leq n$) سره، په ځانگړي ډول r_n او ددې سره (a , b) یو د a او b لاینې کمبینیشن دی ، په لاندې ډول $au + bv$, چی u او v ټولگڼونه دي.

د $r_{-1} = a$

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د یوه i لپاره د $1 \leq i \leq n$ سره، که یو د a او b یو لاینې کمبینشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پیداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د یوې داسی r_i د ځای په ځای کولو له لارې هم ، چی په دې ډول د ایندکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. (پای)

یادونه : د غ گ پ د ښوونې متود ، چی پورته او په لاندې بیلگه کې راوړل شي د اویکلید الگوریتم"Euklid Algorithmus„ د یوې گڼیزې دندې یا کارونی (عملیې) شیماتیکي اوبیونې(حل) متود په نامه یادیږي، نو له دې سرهx او y هم له a څخه

$d = ax + by$ اکسپلیځیتExplizit (لاتین: څرگند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي٠

بیلگه:

غوښتنه $d = (2124 , 1764)$ ٠ د اویکلید الگوریتم کارونی له لارې لرو:

$$2124 = 1 . 1764 + 360$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دی

د دې لپاره ، چېd لهx او y سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) . 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه دa اوb لپاره لاندې مهمه پيژند نخښه يا نخښونه لاس ته راځي

يادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکاريږي، چې ګرانو لوستونکو ته يې بی له اوبيونې

وړاندې کړم، دا جملې په ختمه کې د ګڼونوتيوري دنده ده، چې په ګڼونتيوري کې بيا د ښووني سره ښوول کيږي۰

جمله۳ ۰ ۹ :

a اوb دې ټولګڼونه وي. د a اوb يو ګډ پرويشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دی کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a اوb ټولګڼونو سره انځور کړاي شو۰ په ځانګړي ډول a اوb هلته او هلته ويشپردي دي، که ټولګڼونه x اوy شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + by = 1$$

اوبيونه : د شرايطو ضرورت سم د لاسه له ۳ ې ۶ څخه لاس ته راځي. دا چي شرايط پوره كيږدونكي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې كې روړو، ګڼونتيږي پورې اړه لر او دلته يې نه ښايو.

جمله : ۱۰ . ۳

a او b دې ټولګڼونه وي۰ د a او b هر ګډ پرويشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b يو ګډ پرويشونی هلته اوهلته غ ګ پ دئ چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

ليما۳ ۰ ۱۱(جمله ګئ)(اويكليد): په خوښه ټولګڼونو aاو b او c لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعريف۲ ت : $a_1 , a_2 , ... a_n$ دې ټولګڼونه وي $(n \geq 1)$, او d دې يو نه منفي ټولګڼ وي د كوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d \mid a_i$ د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره

ب : له $t \mid a_i$ څخه د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره لاس ته راځي $t \mid d$.

نو d د $a_1,...., a_n$ غ ګ و بلل كيږي او د d لپاره هم داسې ليكو $(a_1 , ... , a_n)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a_n , ... , a_1 لپاره د داسي غ ګ و یواځتوب په ۳ . ۵ کی کتل کیدی شي او د موجودیت لپاره یی لرو :

جمله ۳ . ۱۳ : د خوښي تولګنونو a_n , ... , a_1 لپاره ($n \geq 1$) غ ګ و موجود او d د a_n , ... , a_1 خطي (لایتي) کمبینیشن دی دا په دې مانا چی

$$d = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

د مناسبو تولګنونو x_n , ... , x_1 لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$(a_1 , \dots , a_n) = ((a_1 ,\dots, a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولګنونو a_n , ... , a_1 د ($n \geq 1$) لپاره. سړی کړی شي چی د $a_1,\dots,a_n$ غ ګ و پل په پل د اویکلید الګوریتموس له لارې پیدا کړي، چی دلته یی د اوبی یا حل‌ځخه تیریږو.

د اوبی یا حل لپاره یی د n په لور د پوره ایندکشن څخه کار اخستل کیږي چې په ۸ –امه برخه کې څیړل شوی دی.

بیلګې:

۱ - ګنونه 240 او3750 غ ګ پ 30 = 2.3.5 لري

۲ – لرو 408 او748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس غ ګ پ دی: 17 . 2<2> = (408,748) یا دا لاندې که ن ج پورته شول

$(408,748) = 2^2.17 = 68$

٣ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ 6 = (30.66.114) دی، ځکه، چې
30 = 2.3.5

او 66 = 2.3.11 او 114 = 2.3.19 دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرویشونی نه لري دا موږ پرویشپردی بولو، ځکه، چې دي:

65 = 5.13 /\ 54 = 2.3.3.3

خورا کوچنی ګډ زیاتځلی(کوچکترین مضرب مشترک)

موږ په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زیاتځله (لنډ: ک ګ ز) کلیمې په ځیرنه پیل کو٠ دا کلمه و غ ګ پ یوه دوه بیزه یا دوه ګونی یا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي ټولیز پیژند ورکوو

تعریف ١ . ت : $a_1 ,....., a_n$ دې $(n \geq 2)$ ټولګڼونه وي، او v دې یو داسی نه منفی ټولګڼ وي، د کوم لپاره چې باور لري:

الف – $a_i | v$ د n , ... ,, $i = 1$ لپاره

ب – له $a_i | w$ څخه د n , ... , $i = 1$ لپاره لاس ته راځي $v | w$.

نو v د $a_1 , ... , a_n$ کوچنی ګډ زیاتځله(لنډ : ك ګ ځ) بلل کیږي او داسې یې لیکو:

$$v = [a_1 , ... , a_n]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (د دوه ګڼونو لپاره)

a او b دې تولګنونه وي او v دې یو داسې نه کمیز یا نه منفي تولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

(۱) $v|a$ او$v|b$

(۲) له $a|w$ او $b|w$ څخه لاس ته راځی $v | w$

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کیږي او په لاندې توګه یې لیکو

$$v = [a,b]$$

جمله :

په خوښه تولګڼونو $a,b,c,\dots,n$ لپاره ک ګ ز شته دی او دا یواځنی دئ

$$[a,b,c,\dots,n]$$

یادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونولاس ته راوړو:

دتولګنونو ($n \geq 3$) $a_1 , \dots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\dots,a_n] = [[a_1 ,\dots,a_{n-1}], a_n]$

او هم $|a_1a_2| = [a_1 , a_2] (a_1 , a_2)$

لاس ته راوړنې (داهم په همدې مانا مګر د جملې په څیر دی): د په خوښه تولګڼونو a , b , c لپاره باور لري: له $a | c , b | c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab | c$

د ګڼتیوري بنسټیزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژنده :

یو تولګڼ $n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کیږي، که له ساده پرویشونv بل پرویشونی ونه لري۰

لومړي ګڼونه لاندې غوه خویونه لري.:

لیما (لکه کوچنی جمله): که p یولمړی ګڼ وي او $p \mid a_1 \dots a_n$ د تولګڼونو $a_1, \dots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه یوه i د $1 \leq i \leq n$ سره.
حل (اوبی): حل یی د ایندوکشن له لارې صورت نیسی، چی ددې لپاره باید ۸ - امه برخه کتل شوي وي.
د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او لیما دې $n - 1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بیا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځی چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مخته تیرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \dots a_{n-1}$ وي ، نو داسې دی $p \mid a_i$ د یو i لپاره چې $1 \leq i \leq n-1$ وي د ایندکشن د نیونې په بنسټ.

د لومړنیو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتیوري بنسټیزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه (د ګڼونتیوري بنسټیزه جمله):

هر یو پیداینتي (طبیعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تیب پورې، په یوائځني او یوائځني (یویوائځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په یوائځی یو ډول لیکل کیدی شي او بس۰ کیدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضریبونه همغه دي)) ډول د لومړنیو ګڼونو ځل په ځیر لیکل کیدی شي۰

اوبی : ښوونه د n په لور ایندکشن له لارې مخ ته بیایو (برخه ۸ دې ودې کتل شي)
د $n = 1$ لپاره باور لري، که، لکه معمول ، 1 د طبعي ګڼونو د تش(خالي) ځل په ځیر تعریف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library

شوي وي. موږ اوس ټول د n پروېشوني $t > 1$ په نظر کي نيسو. کم له کمه يو داسي ګڼ شته لکه n . که p د دې پروېشونو کوچنی پروېشوني وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بيا p يو پروېشوني q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چي q د n پروېشوني وي، نو دا به د p تعريف رد کړي. دا چي $n / p < n$ د ايندونکشن نيوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د څل په ځير ليکل کيدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2..p_r = p'_1p'_2...p'_s$ د n دوه ډوله د لمړيو ګڼونو د څل په ځيرليکنه .
له $p_1 | p'_1...p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 | p'_i$ د يو i د $1 \leq i \leq s$ سره . د نمرې بدلولو له لارې دې وي $p_1 | p'_1$. داچي بيا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2...p_r = p'_2....p'_s$ ، له کومو چي د ايدکشن له نيوني لرو $r - 1 = s - 1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتيب بدلون) هم $p_i = p'_i$ له $2 \leq i \leq r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټيزي جملی د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

جمله : هر طبعی ګڼ n په ټيك يو ډول په لاندې فورم انځوريدلی شي
$n = \prod_p p^{\nu_p}$ (لپاره p د پای ډيرو ν_p يواځي د $\nu_p = 0$ ، $\nu_p \geq 0$). (ν ښيونه ښتل کيږي)
چيرته چي p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګيدونکي لړۍ پرلپسې کې ځغلي.

يادونه: د عملي شميرني لپاره په هغو ګڼونو چي جګ يې صفر وي تيريدل کيدی شي، لکه : $n = 28$, $n = 2^2.7$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره
لاس ته راوړني : $(a,b) = 1$ او $(a, bc) = 1$ ، نو هم $(a, bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی یا حل : نیولی دې وي چې $(a , bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد $(a,b)= (a,c) = 1$ سره تضاد دی.

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګنونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو a | b هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګنونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \le \beta_p$

لاس ته راوړنې : وي دې a اوb له 0 مختلف ګنونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورتوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b) =\prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)} , [a,b] =\prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګنونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$

او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ ځخه سم د لاسه له دوو ځخه زیاتو ټولګنونوباندې غ ګ و او ک ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو ځو په لمړیو ګنونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګنونه موجود دې که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینبه نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورونونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)} \ , \ [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو تولګڼونوباندې غ ګ و او ک ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دې که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلې ځواب دی چې له هغه ریښه نیسي:

جمله: ناپاي ډیر لومړني ګڼونه شته.

حل(اوبې) : موږ جمله ناسیده یا ناسمه ښایو (۸ –امه برخه دې وکتل شي) او نیسو چې پایډیر لمړی ګڼونه $p_1 , p_2 , p_3 , ..., p_r$ موجود دې. ګڼ $N = p_1p_2...p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په یوه لمړي ګڼ p ویشونکی دی. د نیوني له مخې لرو $p = p_i$ د $1 \le i \le r$ سره . د $P|N$ او $p \mid p_1p_2....p_r$ له امله لاس ته راځي $p \mid 1$.کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله باید ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د میلاد څخه پخوا د « اریتوتنس غلبیل» متود ځرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دغه متود له لارې په لاندې توګه ځرګند وو

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~
~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~
37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~
~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ 57 ~~58~~ 59 ~~60~~ 61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~
~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ 71 ~~72~~ 73 ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~
~~78~~ 79 ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ 83 ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ 89 ~~90~~ ~~91~~
~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ 97 ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

۳ . ۱ . ۲ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

(لاتين: عاقلانه يا هوښيار اعداد يا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبياتو کې داسی ګڼونه او ايراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه يا ديږي، کله يې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چی دا همداسې يانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک يې هوښيار ګڼونه بولی هم خوښه يی او يا مات ګڼونه ، خو دلته راځيو Ratio nهوښيار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی٠

يادونه : که / ولرو يانې که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چېa په b ويشل کيږي٠ که ولرو≠ نود نابرابروننخښه ده٠ دا په دې مانا، چی b له 0 سره برابره نه ده٠ د دوه ګڼونود a او b ويش x = b / a د ټولګڼونو په ډيری کې تل هلته شته دی، چې a د b ټولګڼيز څو ځله وي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره، چې بيا هم ويشa : b (دلته هم b پرa ويشل کيږي) کيدونی شي» سره له دې، چې ويش تل په ټولګڼونوکی پيژند نه لري يا تعريف نه دی يا صورت نه نيسي« بايد د ټولګڼونو ډيری ماتګڼونو(کسر) ډيری‌ته پراخه شي، چی د لومړي ځل لپاره افاده يا وېينه b/a سومبوليک مانا لري، د نوو ګڼونو په ځير نيسو او په ټولګڼونو يې ور زياتوو، نو هغۀ ګڼونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګڼونه وايو ۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په ځير ورکړ شوی دی

cb / ca هلته باور لري، چې $c \neq 0$ دټولګڼ اوa $|b$ د ماتګڼ په ځير ورکړ شوي وي

د راشنلګڼونو ډيری، چې په Q سره ښايو د ټولګڼونو ماتګڼو b/a چې $a \neq 0$ اوa او b د ټولګڼونو له ډيری وي، د ټولګڼونوپراخوالی دی او ټول د مخه تير بنسټيز قوانين په کې باور لري او د ويش بنسټيز قانون ته داسې پراخيدلی شي

ټ : د ويش(تقسيم) بنسټيز قانون(دوام)

۲ - د دوه راشنل ګڼونوa ، $a \neq 0$ او b لپاره يواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون يا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګڼونه هم د ورځنيو اړتياو پر بنسټ منځ ته راغلی

بيلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وويشو، نو د هر تن نيم من غن, راسيږي، چې دا نيم يې

راشنلګڼ دی، ياني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ يا $\frac{1}{2}$

دا بايد په ګوته کړو، چې راشنل ګڼونه د پای يا ناپای لسميز ګڼ په ځير ليکل کيدی شي

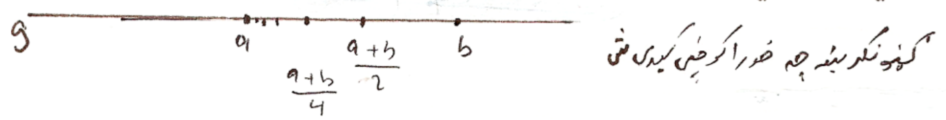
(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ٤ - رییل ګڼونه(Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په رېښتوني شته یا موجود)

د ریشنلګڼ په بنسټ هغه ورځنی تیوریکی اړتیاوي چی د شمیرعملیو بی بندیزه (نامحدود) په کار اچولو یا استعمال ته موجود وي حل یا اوبی شوي او همدارنګه عملي اړتیاوي چی اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوي وي.

د ریشنلګڼ له لارې کیدی شي چی د کرښی اوږدوالی تیك ورکړ شي یا په همدې مانا : په هرڅومره وړوکی ګڼونکرښه انتروال کی هم ناپای زیات ګڼونه، چی په ټکو یا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بیا په یوه کرښه کی هر ټکی د ریشنلګڼ په ذریعه نه شي ښودل کیدی یا په بل عبارت د کرښی هر ټکی د ریشنلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چی د «ایریشنلګڼونو»په نامه یادیږي، کیدی شي د یوه پریودیکي(periodische) (د ګڼونو کړی نه شلیږي) ناپای لسیزمات له لارې وښوول شي.
د بیلګي په توګه د مربع د نیمي (قطر) x اندازه چی د مربع یو اړخ ۱ وي نه شي کیدی چي په ریشنلګڼ وښوول شي. د پیتاګوراس د جملی په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$, پس $x = \sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رییلګڼ کلیمه یوه ژوره کلیمه ده چې د پوهیدلو لپاره یې «پولی» (لیمس lim) ته اړتیا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

دېر اینتروالبندیدل چې په همغه یوه ټکی راځرخي مساوي(ورته) ارزښته (Äquivalent لاتین :مساوي ارزښته) لیدل کیږي

رییلګڼېږی R چې په ریشنلګڼېږي د ایریشنلګڼېږي ورزیاتول دي چې له ۲ . ۱ . ۱ تر ۲ . ۱ . ۳ برخې پورې ټول بستزقوانین په کی باور لري. د رییلګڼ له لارې دکرښې ټول ټکي په بر کی نیول کیدی شي. په دې ډول رییلګنونه ټولی د شمیرلو او اندازه کولو اړتیاوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د رییلګڼ حل یا اوبی نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتیا پیښېږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

یا دا لاندې په لنډه توګه:

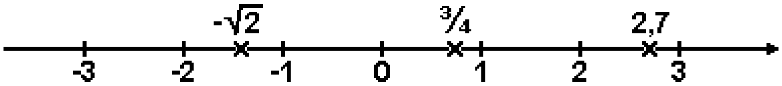
موړ ګڼونه یا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګڼونه نه دي یانی که موړ د ۲ ګڼ ریښه(جذر) ونیسو، نو داسی یو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسمیزه توګه پاي ته نه شي رسیدی یانی پریودیکی (تل بیرته راګرځیدونی یا پسی نور هم پراخیدونی) دي٠ داسی ګڼونو ته ایراشنل ګڼونه وایو٠

تل بیرته راګرځیدنیز (periodi(cal تل بیرته راګرځیدوني ,Period د ګڼونو ځنځیر نه شلیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایراشنل – یا نانسبي عددونه یاګڼونهIrational numbers

د راشنل او ایراشنل ګڼونوټولنی ته رییل ګڼونه وایو(دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیری پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) . ۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیداینتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي یانې ریل ګڼونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابیلشوی(له نورو -) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د رییل ګڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیرو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په رییلګڼونو کی څلور بنسټیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (وییني) سره شمیرنه (نوکان اینوول)۰ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا ځلووني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه۰

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندي (مخرج المشترک) جوړول۰ د داسی ماتلاندی(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نومونې: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)

د زیاتون او کمون بنستیزو قوانینو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a \, , \quad a - b = a + (-b),$$

$$(a + b + c \ldots - c - d - \ldots) + (e + f + \ldots - g - h - \ldots) = a + b + \ldots - c - d - \ldots + e + f + \ldots - g - h - \ldots$$

دا دا مانا لري، چې که چیرې د نوکانو دباندې زیاتوننخښه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ویستلو کې ګڼې خپله مخنخښه نه بدلوي۰ که د نوکانو د باندی کموننخښه (منفي نخښه) وي، نو د ګڼونو له نوکانو ایستلو په حال کی د نوکانو دننه نخښی بدلیږي۰ یانی کموننخښه زیاتوننخښه او زیاتوننخښه کموننخښه کیږي۰ بیلګه یې لاندې ګورو

$$(a + b + \ldots - c - d - \ldots) - (e + f + \ldots - g - h - ..) = a + b + \ldots - c - d - \ldots .. - e - f - \ldots \ldots + g + h + \ldots$$

په همدې ترتیب کیدی شي نوکان هم ځاي پرځای شي۰

دلته باید مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چې په ګڼکرښه د صفر څخه د یوه رییلګڼ واټن په ګوته کوي،

د کوم لپاره چی لیکو :

مطلق عدد یا - ګڼ یا بې اړیکو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زیاتیزه او کمیزه نخښه یا مثبت او منفي نه لیکل کیږي یا یون(واحد) هم ورسره نه وي، دا تیک او تیک یو ګڼ ښایج او بس۰

$$|a| = a \; ; \; a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a| = 0 ; a = 0

| a| = -a ; < 0

ياني که a زياتيزه يا مثبت وي،نوa پخپله ليکواو که a کميزه يا منفي وي، نو-a ليکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 ليکو

۳ . ۲ . ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخښی قوانين باور لري:

(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , (-a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab

که چيرته ډير نوکبندونه راگرځيدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی

بيلګه:

(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac – ad + bc –bd)(e-f-g)

= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-) bdf+bdg

د ځانګړي حالت په توګه د بينوم پيژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې تيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيږي :

بيلګه ۱ . ۳ :

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2 .$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2.$$

$$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2\ v)(4u - 2\ v)$$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ويش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د $a = 0$ لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ويش ناشونی دی

په ويش کی نوکبندول د زياتون، کمون او ځل په څير ساده نه کيږي۰ په ويش کی د زياتون په ډول ليکل شوی هر توکی په ماتلاندې ويشل کيږي:

بيلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\ abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

يا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې لاس ته راوړنې(نتیجې) ته سرې د ګډو ځلوونو یا فاکتورونو یا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسیدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(a - 2b + 4c)$$

له دې ځایه کیدی شي، چې د بولینوم وېش بیل شي

بیلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \text{ Rest } 5c \text{ باقي} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \text{ لپاره } ab \neq 0,$$

د یوه زیاتو یا چمعې وېش په یوه چمعه، کیدی شي د بینوم جکلې له لارې صورت ونیسي

بیلګه ۳ . ۶ : $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b$ لپاره $a \neq -b.$

بیلګه ۳ . ۷ : $(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$ لپاره $a \neq -b.$

بیلګه ۳ . ۸ : $\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax$ لپاره $ax \neq by,$

دلته هم وېش د پاتې یا باقي سره شونی دی.

بیلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$:

باقي یا پاتې b^2

له دې لاس ته راځی او په ښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2}{a-b} + \frac{b^2}{a-b} = a-b+\frac{b^2}{a-b} \quad a \neq b,$$

بیلګه ۱ . ۱۰

$(16u^2 - v^2) : (4u + \sqrt{2}v) = 4u - \sqrt{2}v$ Rest v^2

$$\frac{16u^2 - v^2}{4u+\sqrt{2}v} = \frac{16u^2 - 2v^2 + v^2}{4u+\sqrt{2}v} = \frac{16u^2 - 2v^2}{4u+\sqrt{2}v} + \frac{v^2}{4u+\sqrt{2}v}$$

$$= 4u - \sqrt{2}v + \frac{v^2}{4u+\sqrt{2}v}$$

د $4u \neq -\sqrt{2}v$ لپاره

فورمال ور د دوه پولینومونو ویش دی (برخه ۱۲ دي انډول(پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0} = P_n(x) : Q_m(x),$$

که د ماتباندي پولینوم درجه د ماتلاندي پولینوم درجی لوي یا مساوي وي($n \geq m$).

مونږ نیسوچی: $Q_m(x) \neq 0$ او $a_n \neq 0, b_m \neq 0$.

د دواړو ویشو« توټه ویشو» (پارځیالویش(Partialdivision)) دا دی چی دا

د $P_n(x) : Q_n(x)$ ویش په لاندي ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \text{Polynom } 1 + \frac{\text{Polynom } 2}{Q_m(x)},$$

چیرته چی د پولینوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجی څخه کوچنی ده.

دي هدف ته په لاندي ډول رسیږو

۱ – سړی یواځی د جګ نظم غړي $a_n x^n : b_m x^m$ ویشي او له دي سره یوه

غلطي F(x) کوي:

$$Q_{n(x)}: Q_m(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + F(x) \qquad *$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ - سړی (*) په ماتلاندې پولینوم $Q_m(x)$ ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چې د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل پولینوم $P_n(x)$ له درجې n څخه کم له کمه په یوکوچنی وي . د ګڼونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چې $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ - که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ - او ۲ - تړیه ویش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعمالیږي، د لاندنی نتیجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چیرته چې د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجې کوچنی وي.

د تړیه ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلګه ۲ . ۱۱ . لمړی دې د تړیه ویش ۱ او۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلګه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$P_3(x) \quad : Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2 Q_1(x) = 2x^2(3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 2x^2 \quad + F(x)$ $6x^3 - 4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) - (a_3 / b_1) x^2 Q(x) =$	$9x^2 - 3x + 1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ : د تیرې ویش بیلګه ۱ . ۱۱ د (F (x غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو چی د لیکنی شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) = (9x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 3x + G(x)$$

$$3x . Q_1(x) = (9x^2 - 6x)$$

یاباقي $\quad$ پاتي $= 3x+1$

$$G(x) = (3x+1) : (3x-2)$$

له دې لاندې نتیجه لاس ته راځي :

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 2x^2 + 3x + G(x)$$

$$G(x) = (3x+1) : (ex-2) = 11 + H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x-2$$

پاتی = $\quad$ یاباقي = 3

$$H(x) = 3 : (3x-2)$$

پس باور لري

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تول توته ويش كيدى شي په لاندي ډول مخ ته يوړل شي .

(1) (4) (7) (۱۰)

$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$

(2) $\underline{6x^3-4x^2}$

(3) $-9x^2-3x+1$

(5) $\underline{9x^2-6x}$

(6) $3x+1$

(8) $\underline{3x-2}$

(9) 3

دلته (i) د پرلپسى پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

(1) (4) (7) (10)

$(18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1):(3x^2 + x - 1) = 6x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x^2 + x - 1}$

(2) $\underline{18x^4 + 6x^3 - 6x^2}$

(3) $9x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

(5) $\underline{9x^3 + 3x^2 - 3x}$

(6) $3x^2 + x + 1$

(8) $\underline{3x^2 + x - 1}$

(9) 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۲ . ٤ ماتشميرنه (کسرشميرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د تولګڼونو m,n څخه د ريشنلګڼونو انځورونو لپاره تعريف شوې٠ کيدی شي، چې دا کلمهa/b ته، چې a او b رييل ګڼونه دي، وغزول شي٠

بايد په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بيلګي په توګه:

ويش(a/(b-c تيک هلته مفهوم لري، چې b≠c وي٠ ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښايي

لکه a : b او يا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم بايد b |=0 وي.

په اخر کې بايد په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ کيدی شي او هم دواړه٠ دا بايد دلته هم په پام کې وي، چې هيڅ يو ماتلاندې ګڼ بايد صفر نه وي يانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور يو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کيدی دا موږ د ماتو مات (کسرالکسر) بولو٠

بيلګې:

$$a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 \quad ,$$

$$(a/b) : c = (a/b) / c \quad b|=0, c|= 0$$

$$(a/b): (c/d) = (a/b) / (c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0$$

يا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c},b\neq 0,c\neq 0,...,\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},b\neq 0,c\neq 0,d\neq 0$$

په ځو واره ماتګې کې باید اصلي ماتکرښه څرګنده پيژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټيکوالی مخه نيول شوي وي٠ په ټوليزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}\neq\frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هريو ماتګې b|=0, a / b په يوه ګڼ c |= 0 پراخيدی او همداسې لنډيدی شي

يانې ماتلاندې او ماتباندې په يوه ګڼ c ځليدی يا ويشل کيدی شي او دا کړنلار په اصلي ګڼ کې تغير نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c},b\neq 0,c\neq 0$$

د ماتګې لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګې ساده کړي.

د بيلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3},\frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c};a\neq 0,y\neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یواځنی فکتور یا څلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګې په توګه لاندې ماتګې

(c) ketabton.com: The Digital Library

(a+c):b+c) چې $b \neq -c$ وي نه شي لنډيدی دا (a+c) : (b+c) = a:b

باور لري،چې b |= 0, c = 0 \/ -c |= a, a = b

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اړيين دی، چې ډير ماتګنونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، ځکه چې يواځې هغۀ مات يو په بل زياتيدی يا يو له بل کميدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه : $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$

که چيرې پرڅښ يا برعکس ماتګنونهa / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زياتوو او يا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې بايد راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو څخه دی۰ د بيلګي په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل بايد ماتګنونو ګڼلو کې ماتلاندې سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بيلګه باندې ښايو

بيلګه: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي، چې اصلي ماتلاندې)ا۰م۰ل (وټاکل شي

ا ۰ م ۰ ل ۰ 97200 =2.3.5.6.15.36 =

کیدی شي، چی ا۰م۰ل۰ د لومړنیو ګڼونو ځل په ځیر هم ولیکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3٠. 3.٠2٠36 = 2

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړکښ یا لوړ جګګښ یا لوړ طاقت لومړي ځلووني رانیول کیږي۰ چې ګڼل خورا ساده کوي۰

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=$$

$$\frac{90-60+36-30+12-5}{180}=\frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار ځنګه د ماتو په ټولیزه افاده استعمالیدی شي لاندې بیلګه یی ښایي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بیلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې يواځې د لاندې لپاره موخه ور دی $a\neq 0 \wedge b\neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره يانې

$$a.b(ab)(a^2b).(ab^2) = a^3.b^3$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

a = a

b = b

ab = a b

a² . b = a² b

ab² = a b²

دا ۱۰م۰ل۰ په لاندې توګه دی = a² b²

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ ۰ ۱٦ : د وییني یا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a\neq 0, a\neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

a^2 - 1 = (a-1)(a+1)

a^2-4 = (a-2) (a+2)

$(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)$

دا پورته لاس ته راوړنه ا۰م۰ل۰- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مات ماتباندې صفر دی‌په دې ډول په پورته پيل کې ورکړ شوې افاده يا وينه د صفر پيچلې ليکلو بيلګه ده او بس۰

د ځل او ويش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, b\neq \wedge d\neq \Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}; b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0 \Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بيلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بيلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}}=\frac{\dfrac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\dfrac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1,\forall\,|a|\neq|b|$$

یادونه: په پورته لیکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم باید راغلي وی۰ دلته اړیین د ګڼونو شمیرقوانین دي او د ګڼونو پیژندل۰ د ګڼؤنو اړیکې د خوندیونې له لارې

$N\subset Z\subset Q\subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمیر قوانین، چې هغه زیاتون ، کمون ، څل ، ویش دئ او د ویش په بنسټ ماتشمیرنه۰ دا باید په همغه ساده ډول زده کړای شي۰

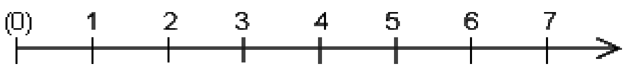
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړیین د ګڼونو شمیرنقوانین په لاندې توګه رالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهیدنه بسیا کوي۰

ګڼونډیرئ (لنډه ټولګه)

پیدایینتي – یا طبیعي ګڼونډیرئ

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پیدایینتي ګڼونو انځورونه

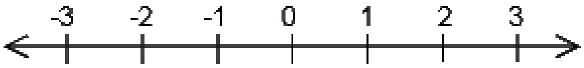


(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګڼونو ډيرى

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

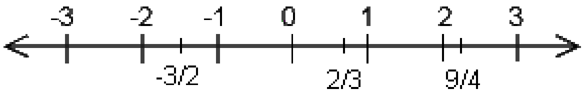
د ټولګڼونو ډيرئ انځورونه په يوه کرښه



د راشنلګڼونو ډيرئ

$$Q = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \mid Z \wedge q \neq 0 \}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسميز يا پريوديکی ګڼ په څير ليکل کيدئ شي

د ماتو سره شميرنه

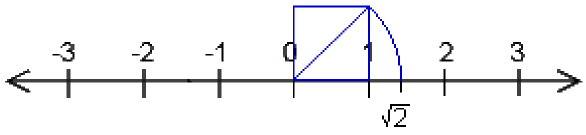
د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زيات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بيا يې هم ترمنځ نور ګڼونه يا ځايونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دی او دې ګڼونو ته مو ايراشنل ګڼونه وويل ٠ لکه چې يو راشنلګڼ نه دئ

راشنل او ايراشنلګڼونه رييل ګڼونه جوړوي

د رييل ګڼونوډيرئ يا حقيقي اعدادو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رییلګڼونو ډیری د ګڼونکرښی تولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکرښه کې روښانه ده



په رییلګڼونوکي بی له بندیزونو شمیرل کړی شو، خو په ماتلاندې کي باید صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونولپاره باور لري

شمیرډولونه لومړی پوړی

Addition:زیاتون یا جمعه

زیاتوونی +زیاتونی = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون $a + b = b + a$

د زیاتون اسوڅیاتیو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زیاتون ته د یوه بی اغیزه یا ناپیلی توکی شتون $a + 0 = a$

مخامخ – یا په څټ ګن یا برعکس عدد $a + (-a) = 0$

Subtraktion:کمون

د زیاتون په څټ کارونه یا عملیه ، ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شميرډولونه:

دويمه پوړۍ

ضرب يا ځل: فاکتور (ځله ووني ضريب) · فاکتور(ځله ووني) ځل
د زياتون تکرار، بيلګه. $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$

د ضرب يا ځل کموتايتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب يا ځل اسوښياتيو قانون $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

دستريبوتيو قانون $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

و ضرب ته د يوه ناپيلي توکي شتون(بي اغيزه توکی يې که وبولو هم بده به نه وي)

$a \cdot 1 = a$

په څټ ارزښت يا برعکس قيمت $a \cdot (1/a) = 1$

يو ضرب ټيک هلته صفر دئ، چې د صرب يو ضريب صفر وي $a \cdot 0 = 0$

ويش:
ويشوني : پرويشوني = ويش (لوستل يې له ښي وکيڼ لورته)

ويش د ضرب يا ځل په څټ کارونه ده) $a : b = c$

$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = b:a$

د بېلګې په توګه z.B.: $4 \cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ويش پيژند نه لري يا تعريف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ تمرينونه

۱ – د اعدادو يا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ يا سټ کې د عدد a او عدد bلپاره د شميرلو څلور قاعدې يا لارې باور لري؟

يادونه: دلته دې ترې کمونی يا مفروق منه او وېشونش يا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونی يا مفروق او پروېشونی يا مقسوم عليه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او يو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو يا ګڼونو او څخه تفرسق، ضر ب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتيجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ يادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ييز سيستم کې لاندې ګڼونه يا اعداد انځور کړی!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – لاندې رښتوني يا راشنل اعداد د کوټيو کې اچوني يا کوټی ونې له لارې په نږدې ۵ ځايونږ تيک پيدا کړی.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زياتيزو او څليزو (د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړی

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بينوم فرولونه

۳ . ۱ – د بينوم فرمولونه وکاروی يا استعمال کړی او د شونتيا سره سم يې ساده کړی

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې وینې یا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکمیلوني له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضریبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې وینې یا افادې په ضریبونو ټوټه کړئ او تر شوونتیا پورې یې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$
d) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$
c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان $(n=1,2,3,\ldots)$ له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
c) $(1 - 2n)^3$
d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرينونو کې دا ا رزښتونه له شميره وباسئ، کوم چې $a,b,\ldots$ يې نه شي نيولی يا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$
c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$
c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشميرنه يا کسرشميرنه

۶ . ۱ – لاندې کسرونه صورت او م خرج يعني د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنيو ضريبونو يا ځلوونو له لارې لنډ کړی

a) $\frac{6\ 732}{20\ 196}$
b) $\frac{2\ 730}{5\ 005}$
c) $\frac{20\ 520}{2\ 280}$
d) $\frac{69\ 069}{138\ 138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا کوچنی ګډ زاتځلی (ذ الاضعافالاقل) پيدا کړی

په لاندې کې und د او په معنا دی

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نوميزو يا برابرمخرج کسرونو شميرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7} - \frac{1-6}{7} + 2\frac{1}{7} - 7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5} - \frac{4-5}{5} - 5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26} + \frac{5-3}{13} + 3\frac{33}{39} - 0 \cdot \frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a} - \frac{1-a}{a}$
c) $\frac{(a-b)^2}{ab} - \frac{1-2ab}{ab} - \frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنوميزو کسرونو جمعه او تفريق، په مخرج يا ماتلاندې کې ضريبونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نوميزو ماتونو(کسرونو) جمعه او تفريق(زياتون او کمون)، جمعه مخرج يا ماتلاندې کې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره يو په بل پسې ورکړشوي ارزښت ځای په ځای کړئ‌او دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(کسرونه) سره يوځای کړئ! بيا په ټوليزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړئ او هغه ارزښتونه لرې کړي، چې د a د اخستلو يا نيولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$	د $a=1,2,3$ سره
b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$	د $a=3,4,5$ سره
c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$	د $a=2,3,4$ سره
d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$	د $a=2,3,4$ سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$

c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0{,}25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو یا کسرونو ضربونه(یا څلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېینو یا افادو برعکس یا په څټ ارزښتونه پیدا کړی.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.7.4. a) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1}{\dfrac{a^2+b}{b}-\dfrac{a+b^2}{a}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{a+1}{a}}{\dfrac{a-1}{a}-\dfrac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)-\dfrac{1}{ab}}{\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{b}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}+\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}+\dfrac{1}{2b}}+\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}-\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}-\dfrac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\dfrac{1}{1-ab}}{1-\dfrac{1}{1-ab}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a-b}}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه يا كسرونه، كه ممكن وي، ساده كړئ (كه غواړئ د مخكني شكل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.8.2. a) $\dfrac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\dfrac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\dfrac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\dfrac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\dfrac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\dfrac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\dfrac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\dfrac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0{,}4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\dfrac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\dfrac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\dfrac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\dfrac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\dfrac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\dfrac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\dfrac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\dfrac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\dfrac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\dfrac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\dfrac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (1-) سره شمیرنه

الف- ورکړشوی دې وي/ a(b-c) /c . a=-1ځای په ځای کړئ او داسې لاس ترې راغلي کسر یا مات لپاره مختلف لیکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج (ماتباندې او ماتلاندې) کې (1-) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر یا مات $(b^2 - a^2)$ /(-a-b) د (1-)سره پراخ کړئ او ساده یې کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج یا ماتلاندې کې (1-) له نوکانو راباسئ او دا وبینه یا افاده ساده کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ۰ توان (پوتنځ) او ريښه (جذر) (Potenz , Wurzel Root)

په دې برخه کې د توان او جذر يا ريښې قوانين ترڅيړنې لاندې نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې يا استعمال چټکتيا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو۰ دا مشوره کيږي، چې ريښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - يا جګعدد يې نسبي يا راشنل وي۰ د دې فورمال ټيک کره د ګڼلو قوانينو په ځنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو) هم ژور فکر وشي۰

د ريښې پيژند د خلاف يا پر څټ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند (ريښه ويستونی يعنی هغه ګڼ، چې ريښه يی وېستلکيږي يا نيول کيږي،د ريښی نخښې لاندی ګڼ او هم د ريښی ارزښت نامنفي اعداد (ناکميز ګڼونه) وي۰ د توان زړه پورې ريل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دی يا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نيونه يا فرضيه شوي وي۰

٤ ۰ ١ توان (پوتنځPotenz) په ټولګڼيز يا تام عدد په جګ يل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ٤ ۰ ۱:

د يوه په خوښه ريل ګڼ توان لاندې موږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پوهيږو۰ د دې لپاره ليکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ $n = 1,2,3,\ldots$

اکسپوننت(جګګړ، لنډ: جګ) اوb د پوتنځ يا توان ارزښت بلل کيږي۰

د بيلګي په توګه

$$a = a\ ,\ a^2 = a\ .\ a\ ,\quad a^3 = a.a.a$$

(4,1) د $n = 0$ لپاره کره ټاکل کيږي $a^\circ = 1$ د $a \mid= 0$ سره

د پيژند يا تعريف پر بنسټ (اود څه بنديزونو په ځلورديوالی کې، چې لاندې شوي) ښوول کيدی شي، چې د خوښی يا زړه پورې رييلګڼونو $a,b \in R$ او $m,n \in N^*$ نامنفی ټولګڼونو اکسپوننت يا جګګړ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته د توان اړيکې د ټولګنيز مثبت جګړ يا اکسپوننت لپاره باور لري، کيدئ شي، چې ټولګڼونو ته وغزول شي، که چيرې پيژند ورکړو يا تعريف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n = 1, 2, 3, ..., ..a \neq 0, ...(4,7)$$

دا پورته د توان قوانين د ټولګنيز جګ(اکسپوننت) لپاره بې بنديزونو يوائې د نه ورکيدونکو رييل بنسټونو ياني د $a \neq 0$ او $b \neq 0$ لپاره باور ي دي . په (4,5) کې بيا بنديز $n \geq m$ اړيين نه دی.

د توان قوانين کيدئ شي په ښه بدلونکو افادو يا وييئو وکارول- يا استعمال شي.

بيلګه 4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2} = (4abx^{-2}y)^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

بيلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3} = \frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

بيلګه 4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}} =$$
$$= \frac{a^5(3-a) + a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}} =$$
$$= \frac{3a^5 - a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - 2a^5 - a^3}{a^{m+1}} = \frac{a^3-1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوتنځ زياتون او کمون کې بايد پام وي، چې يوازې د برابر پوتنځ ګڼونه يو له بل سره زياتيدی او يو له بل کميدی شي٠

بيلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بيلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بيا ګوته نيسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخښې کې دې توپير وشي٠ پوتنځ له مثبت - يا زياتونمخنخښې سره تل مثبت يا زياتيز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترځ کې، چې پوتنځ د منفي - يا کميز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زياتيز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - يا کمون ارزښت لري٠

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ..., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ٠ ٢ – ريښه او توان له ريشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پيژند ٤ ٠ ٢

د يوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ريښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره لیکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, ...(4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0...............................(4,9)$$

دلته a رادیکاند Radikand ، یا ګڼ، چې رېښه (جذر) یې نیولکیږي(موږ دا

رېښه نیووني یا رېښه ویستونی بولو) او n درېښې جګ(اکسپوننت) اوb د

رېښې ارزښت یا رېښه ارزښت بلل کیږي۰

باید پردې ټینګار وشي، چې رېښه یوازې د نامنفی رادیکاند یا رېښه ویستوني (رېښه نیوني) $a \geq 0$ راوستل کیږي یا نیول کیږي او پخپله په لاندې توګه یو نامنفي - یا ناکمیز ارزښت لري یانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کوني لپاره لاندې یادونې شوي دي:

۱ – د جوړه $n = 2,4,6,...$ لپاره د $a<0$ سره رېښه b په ریېلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي یا ناکمیز یانې زیاتیز ګڼ دی۰

۲ – د جوړه او مثبت - یا زیاتیز برابرون $b^n = a$

په ختّه په رېښتوني دوه ریېل اوبیوني یاحلونه لري د بیلګي په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ياني n = 2 او a = 4 اوبيونې

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي٠ د دې لپاره، چې د راديکاند د شميرلو کارونې يواځنۍ سرته ورسولی شو، بايد د يوې اوبيونې لپاره پريکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . n= 1 , 3 , 5 او a≥ 0 لپاره

$$b^n = a$$

تل يواځني زياتيز(مثبت) اوبی يا حل لري ياني b≥ 0

٤ – د ناجوړه n او کيمز يا منفي a لپاره $b^n = a$

تل يواځني يو منفی اوبی يا حل لري٠ يانې b < 0 د بيلګي په توګه دا $b^3 = -8$ يواځې

اوبی b = -2 لري.

په هر صورت بايد د جوړه...n=2,4,6 ګڼونو لپاره a≥ 0,b≥ 0 وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به يا ريښه شته نه وي او يا به يواځنی اوبی نه لري، يانې څو اوبی به شته وي

د ناجوړه يا طاقو,...n = 1,3,5 لپاره کيدی شي، چې له دواړو غوښتنو تير شو٠ دلته به يواځې تاوان يا زيان دا وي، چې د تولو ممکن حالتونو لپاره به بيل بيل د ريښې د قوانينو غوره کولو ته اړ کيږو٠ له بلې خوا به ريښی د قوانينو ترتيبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ايښول شوي بنديزونه nقوانينو لپاره ستونځمن وي٠ له دې امله د ناجوړه ريښو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننت غوره کوو او د يوائځني يو اوبی لپاره 2- د 8- = b^3 او نه $-2=\sqrt[3]{-8}$

بلکه $-\sqrt[3]{8}$=-2- ليکو۰ په دې اړوند او د يادو شوو نيونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2}=a,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,10)$$

څلوری ريښه يا مربع ريښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقيقي اعدادو يا - ګڼونو a لپاره تعريف شوي۰ د نامثبت يا نازياتيز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بيا د (4,10) اوبی منفي يا متيز وي، کوم، چې نيونه $b \geq 0$ نفي کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د (10 , 4) بنول شويو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي يا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2, \sqrt{4}=\sqrt{(-2)^2}=-2$$

ياني د 2- = 2 سره۰

د (10 , 4) ټيک داسې ليکل کيدی شي:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\{a, a\geq 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,11)$$

$$=\{-a \quad , a \leq 0 \qquad\qquad (4,11)$$

د ريښې يا جذر له پيژند (9 , 4) , (8 , 4) سره سم کيدی شي، چې لاندې باوري د ريښې قوانين وليکل شي د....$n = 1,2,3$ او $a , b \geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,12)$$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}, b>0\ldots\ldots(4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a}=\sqrt[n.m]{a^{n+m}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته د (4,15),(414),(,413).(4.12) ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهېدنه نه رامخ ته کوي ۰ دلته پيژندل کيږي، چې د رېښې قوانين د پوتنځقوانينو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي۰ په رښتيا چې دا د پوتنځقوانينو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ريشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعريف شي يا يې لاندې پيژند ورکړ شي۰

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m ....(4,16)$$

د $a \geq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1 , 2 , 3 4 \ldots$ لپاره

د بيلګې په توګه (١٦ ، ٤) په لاندې ډول ليکل کيږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړيکې (4,16) کيدی شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چيرته، چې (4,17) په ټينګه - يا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0....................(4,17)$$

بې له بنديزونو د خوښې ځګو n او m لپاره د پوتنځقوانين (4, 2) تر (4,6) باور لري، خو يواځې هلته، چې نه ورکيدونو بنسټونو يانې $a>0, b>0$ نيونه شوې وي۰

د رېښې شميرلو لپاره بايد اساساً د(4,16) له مخې ريشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتيا لرو، چې د پوتنځ او رېښې سره شميرلو د قوانينو استعمال نيونې تل و ازمايلی شو۰ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفيتوب کمونوالی يا نامنفيوالی يا مثبتتوب(مثبتوالی يا زياتونوالی) پريږدو، چې لاندې ناسم پاي کيدډول وښايو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{-a} = (-a)^{1/2} = (-a)^{2/4} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{a^2} = a^{2/4} = a^{1/2} = \sqrt{a}$$

برابرون یوازې د دې ساده حالت0 = a لپاره شته دی یا باور لري، د 0=|a یا $a \neq 0$ لپاره a-او یا a منفي دي دا په دې مانا، چې a یا-a پیژند نه لري یا تعریف نه دی۰

د توان قوانین د توان سره شمیرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بیلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بیلګو کې دا تراوسه د شمیر بنسټیز قوانین ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کیدی شي۰ شمیرنه یې لږ وخت نیسي، که غواړئ پخپله یې یو ځل وشمیرئ۰

بیلګه ٤ ۰ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{6}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2,2361$$

بیلګه ٤ ۰ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}} : \frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}} = \{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\} : \{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\} =$$

$$= a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})} = a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}} = \frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بیلګه ٤ ۰ ٨

$$8.\sqrt[3]{343} - 4.\sqrt[3]{125} + 5\sqrt[3]{8} - 5\sqrt[3]{729}$$

$$= 8.\sqrt[3]{7^3} - 4\sqrt[3]{5^3} + 5.\sqrt[3]{2^3} - 5.\sqrt[3]{3^6} = 8.7 - 4.5 + 5.2 - 5.9 = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ٤ ۰ ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بيلګه ٤ ۰ ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a|\geq|b|$ لپاره

د مختلفو شميرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې ريښې له منځه يوسو (د ماتلاندې ريشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې يوه ريښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور يا ځلوونې په څيررامنخ ته شي، نو دا د وظيفې لپاره يوازې اړيين ده چې $m < n$ ($m , n > 0$) او $m,n\in Z$ په پام کې راوړو

کارونه يا عمليه په لاندې ډول اجرا کيږي($N^*|= 0$, $a > 0$)

$$Z\Big/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},..........(4,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ٤ ، ١١

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورې- يا مربع ريښې زياتون يا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بينوم فرمول استعمال سره له $a > 0$ او $b > 0$،چې $a \neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},\ldots(4,19)$$

بيلګه ٤ ، ١٢

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بيلګه ٤ ، ١٣

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۴ . ۳ توان(پوتنځ) د حقيقي – يا رييل جګ (اکسپوننت) سره

دلته دا په ګوته کوو يا دې دا ويل شوي وي، چې د توان ټول قوانين له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقيقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بنديزه ټيک د مثبت بنسټ لپاره. يعنې a,b>0 ، برسيره پردې دې بايد توان $a^{\alpha}; a > 0$ د ناريښتوني يا ايراسنل عدد α لپاره تعريف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که α يو ايراشنل – يا ريښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انتروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\propto = \{a_{n;} a'_{n}\}$. دلته $a_{n;} a'_{n}$ هوښيار يا راشنل اعداد دي.

بيا نو

$$\beta = \{a^{a_n}; a^{a'_n}\} \qquad (4,20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غړي يې (۴،۲) لاندې تعريف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپير، چې

$$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$$
$$2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$$
$$2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$$
$$2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415}$$
$$2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143}$$
$$\vdots$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $\sqrt[10000]{2^{1412} < 2^{\sqrt{2}} < \sqrt[10000]{2^{14143}}}$

٤ ، ۳ تولګه : د a>0, b>0 رييل او $m,n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n \neq 0)$ ييلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته موضوع تر دې ځایه بسیا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړیین وو، هغه به بیا په ګډه ورزیاتوو

۴ . ۵ . تمرینونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفریق یا زیاتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څیر یې ولیکئ

a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$ d) $-(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$

b) $(3a + 2b)x^4 - x^4(2b - 3a) + x^4(3a + 2b)$

c) $4(a - b)^2 + 2(b - a)^2 - 3(a - b)^2$

d) $18(a - 1)^3 - 3(1 - a)^3 - 15(a - 1)^3 + 4(1 - a)^3 + 3(1 - a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زياتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاريتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشميرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګڼ يا جګعدد سره، د کميزو يا منفي اکسپوننتونو سره شميرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\dfrac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\dfrac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\dfrac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\dfrac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\dfrac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\dfrac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\dfrac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\dfrac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\dfrac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \dfrac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\dfrac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \dfrac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\dfrac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\dfrac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \dfrac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\dfrac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرليطو لاندې کيدی شي لاندې عددونه د يوه مربع – يا څلوری ريښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ - د ريښو جمعه او تفريق(زياتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\dfrac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

b) $\dfrac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\dfrac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

d) $\dfrac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\dfrac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د ريښو يا جذرونو ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}:\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$ c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او ريښې ريښه وېستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

'.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$ d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

'.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$ c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}}:\frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – لاندې ماتونه يا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج رېښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ ۰ لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترڅیړنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوې، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوې وي څیړو ۰

۵ ۰ ۱ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم تر څیړنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څیړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وي ۰د لوګاریتم $c = \log_b a$ پیژند لپاره د یوه زیاتیز - یا مثبت عدد a یوه زیاتیز - یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوبنه لپاره c

$$b^c = a \,; a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی٠ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي٠ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ٥ ٠ ١:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي٠ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, ...(5,2)$$

(5,1) او (٢ ٠ ٥) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو٠ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ٥ ٠ ١

٥ ٠ ١ الف : له $2^x = 16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

٥ ٠ ١ ٠ ٢ الف: د $2 = \log_x 36$ سره یو ارزښت لري x²=36، نو لرو x=6

ب : د $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ سره یو ارزښت لري، $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو $x = 2$

۵ . ۱ . ۳ الف : د $x = \log_5 125$ سره، يوارزښت لري، $5^x = 125 = 5^3$

نو $x = 3$

ب: د $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره يو ارزښت لري، نو لرو $x = 4$

۳ . ۱ ٤ الف د $5 = \log_3 x$ $3^5 = x$ سره يو ارزښت لري، نو $x = 243$

ب : د $-5 = \log_2 x$ $2^{-5} = x$ سره يو ارزښت لري، نو لرو $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ . ۱ . ۵ الف $2 = \log_x(-6)$ تعريف نه دی يا پيژند نه لري.

ب : $x = \log_{-5} 125$ پيژند نه لري يا تعريف نه دی

پ: $\log_1 x$ پيژند يا تعريف نه دی

له (5,1) او (5,2) څخه لاس ته راځي

$$a = b^{\log a}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,3)$$
$$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,4)$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکیږي

$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ...(5,5)$$

د lga لوګاریم ته لسیز لوګاریتم وايي او lna ته پیدایښتي یا طبیعي لوګاریتم وايي(e وروسته څیړو) زیات وخت د لشمیز لوګاریتم لپره داسې هم لیکو:

$$c= \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ باید وکارول شي۰

۵ ۰ ۲ د لوګاریتم قوانین

د لوګاریتم د پیژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کیدی شي د پوتنځ د قوانینو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاریتم قوانین رابیل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاریتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زیاتیز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ...(5,7)$$

$$\log\frac{x}{y} = \log x - loy, ...(5,8)$$

$$\log x^a = a\log x, a \in R, ...(5,9)$$

$$\log\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log, n = 1,2,..., ...(5,10$$

د پوتنځ قوانینو له مخې د دې فرمولونو راوستل یو د وړاندیز وړ د لوګاریتم ژورې څیړنې لپاره تمیرن ښايي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b(x.y)=\log_b x+\log_b y, \qquad (5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) څخه لرو

$$c_1=\log\ x, c_2=\log_b y, c=\log_b(x+y), \qquad (5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1}=x, b^{c_2}=y, b^c=x.y, \qquad (5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c=x.y=b^{c_1}.b^{c_2}=b, \Rightarrow c=c_1+c_2, \qquad (5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې څخه د لوګاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه ښت۰

بیلګه ۵ ۰ ۲

$$\log\frac{2\sqrt{a+b}\,a^3b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$

$$=\log 2+\frac{1}{2}\log(a+b)+3\log a+2\log b-\frac{1}{3}\log c-2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ ۰ ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کینې اړخ کې لوګاریتم ځای لري، چې د ټولو a,b,c تعریف دئ او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دې a+b>0 (د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې c > 0 (د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ (د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)

د کینې اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د a = 2 . b = -1 , c = 1 لپاره تعریف دئ۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا څیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چې Log بې ځایه دئ ۰ د دې لپاره، چې د څیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b\neq 0$ پر ځای په ټینګه یا کره b>0, وغوښتل شي ۰

په بیلګه ۵ ۰ ۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

a+b>0, a-b>0

نو بیا a²-b² = (a+b)(a-b)> 0 او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، bلپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شي a > - b , a > b له امله هم و|a >|b ته راغونډ شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته دې هم ګوته نیولې وي، چې لوګاریتم په یوه بنسټ b یوه بل لوګاریتم یوه په خوښه بل
بنسټd ته د شمیراوړون د شمیرنې اړول کیدی شي $(b > 0, b \neq 1, d > 0, d \neq 1, a > 0)$

د(٥،٣) له مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاریتم نیول و بنسټd ته لرو:

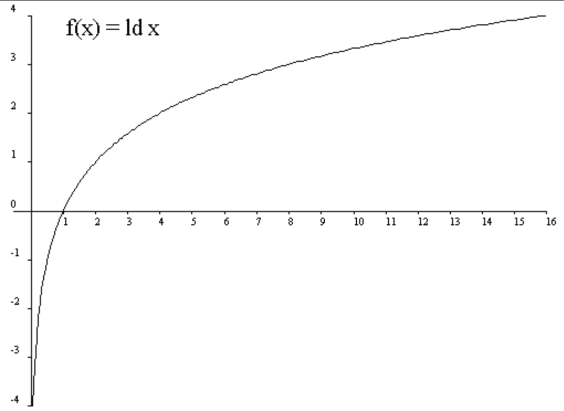
د $$\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), ...(5,15)$$

لسیز لوګاریتم اړول په پیدایښتي یا طبیعي لوګاریتم او په څټ لپاره لیکو b=10, d = e
همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); …………………(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$$\lg a = (\lg e)(\ln a), ...(5,16)$$
$$\ln a(\ln 10)(\lg a) = 2,30429 \lg a, ...(5,17)$$

	د لوګاریتم فنکشن یا بلواک او دیاګرام یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د یوه ځل لوګاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښې لوګاریتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاریتم یو په بل بدلیدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نخښهٔ وروسته بینارځایونه ó او لسمیزسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

	binär	dezimal
2^{-1}	0,1	0,5
2^{-2}	0,01	0,25
2^{-3}	0,001	0,125
2^{-4}	0,0001	0,062.5
2^{-5}	0,0000.1	0,031.25
2^{-6}	0,0000.01	0,015.625
2^{-7}	0,0000.001	0,007.812.5
2^{-8}	0,0000.0001	0,003.906.25
2^{-9}	0,0000.0000.1	0,001.953.125

۵ ۰ ۳ ټولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېر بلواک دی

$x = \log_b n \iff b^x = n$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$

$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$

$\log(x.y) = lox + \log y, \log \frac{x}{y} = lodx - \log y,$

$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} \frac{1}{n} \log x, n = 1,2,3,....$

$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$

$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259 \lg a$

۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوګاريتم تعرف وکاروئ يا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0{,}04$ d) $10^x = 0{,}0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاريتم قوانينو استعمال دلوګاريتم
قوانيناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a + n\lg(a+b) + n\lg(a-b)$

c) $\lg a - \frac{1}{2}\lg b + \frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاریتم بنستیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

3.1. a) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

b) $x = 2 \cdot 10^{2\lg 2}$

c) $x = 3 \cdot 10^{-2\lg 3}$

d) $x = \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$

b) $x = \sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

c) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

d) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x = \ln\frac{7{,}63}{\sqrt{e^3}}$

b) $x = \ln\frac{0{,}23}{2e^2}$

c) $x = \left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

d) $x = \left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ۰ ګونومتري (کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چې د کونجکچ چټکتیاته (ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په څیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چې د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ۰ زه به کوښښ وکړم چې ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په څیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

٦ ۰ ١ بنسټیزه هندسه

٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی(خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا تیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو دولونو استعمال شي، ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره له دې هم هڅه کیږي چې ټکی او کرښه لیدوړ وګرځول شي لکه څنګه چې په ۴ . ۱ - امه برخه کی پیښ شوي. دلته کرښي په g ښوول شوي او غشی یی ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پرېښول کیږي یعني نه انځوریږي، که دا مو و ناریښتیاو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کیدی شي د دوه کرښو غوځځاي په ځیر ونیوله شي) ځیرې په غور وګورئ

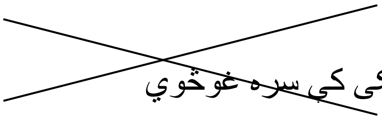
وړانګه ray A

کرښه g

(stright line

بند کرښه یا ټوټه کرښه Line segment

A B



دوه کرښې په ټکی کې سره غوځوي

د بیلګي په توګه لاندې ویناوې باور یا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې یوه کرښه تاکل کیږي(پورته ځیره وګورئ)، چې دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي یا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرګي او په یوه هواره کی پرتی کرښی یو بل تیك په یوه ټکي کی سره غوځوي (پورته ځیرو کې کتل کیږي)

یوه وړانګه s_1 له یوې لور په یوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او یوه پایکرښه له دوه ټکو A او B بنده یا راګیر کرښه ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

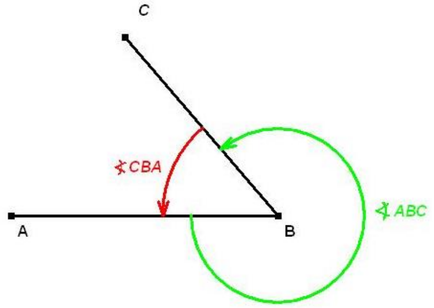
---

٦ . ١ . ٢ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه s_1 د خپل پیلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي s_2 (ځیره ۴ . ۲الف) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، s_1 او s_2 پښې او په همدې ډول د S کونج α (الفا) ککره بلل کیږي.

که څرخون د ساعت نخښي په څټ یا مخامخ وي نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسې کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یې منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کې سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

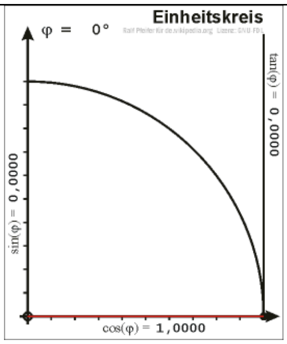


کیدی شي چې یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a^\circ \qquad (6.1)$$

په داسې حال کې چې ولاړکونج، کوم چې یو په بل ولاړې کرښې $g_1 \wedge g_2$ (او ته دې پام وي) یې جوړوي، له 90° سره مساوي وښایو(لاندې ځیره ، که نورېځیرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چې کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چې کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b \qquad (6.2)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته یونګردۍ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردۍ لینده په وړانګه(شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بي نومه ګڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګڼلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردۍ) r = 1 (کی انځوروړ دی، چیرته چې دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي (څیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د °360 کونج د یوونګردۍ چاپیری) محیط(په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass (درجکچ (او)ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^{\circ}=\frac{180^{\circ}}{\pi}b=57,296^{\circ}b, b=\frac{\pi}{180^{\circ}}a^{\circ}=0,017453a,.....(4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦۰ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که څیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي۰.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه ښه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقي او ثانیي نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاري، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي۰

بیلګه ۶. ۱ :

کونج “a = 47°12'36 دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دڅیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقي او ثانیي دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12’=720“

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس په ټولیزه توګه 720’+36“ = 756“ له دې لاس ته راځی

1’=(1/3600)° (<=)

له دې وروسته په همدې توګه 756.(1/3600)°=0,21°

له دې لاس ته راځي : a=47°12’36“=47,21°

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د(٦ . ٣) پسی باور لري b=0.017453.47,21=0,826

دلته ځیرې راځي، خو د دې ځیرو په ځاي به موږ په پورته ځیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي۰

بیلګه ٦ . ٢ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګڼیز سیستم(ځاي ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخی لرو

a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701° د 0,701° اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

0,701° = 0,701.60' = 42,06',   0,06' = 0,06.60=3,6“

پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6''$

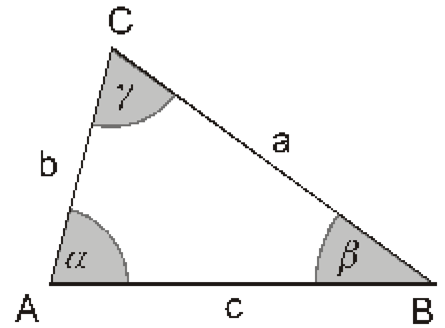
(c) ketabton.com: The Digital Library

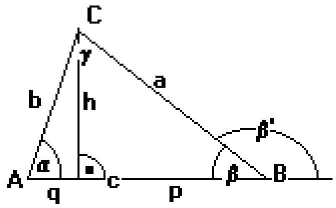
دا پورته داسی لوستل کیږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقیقي او ۶ ، ۳ ثانیي

۳ . ۱ . ٦ دریګوډی

یادونه: موږ دلته بیا د نومونو(نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیږو. هغه هواره چی له کرښو راګیر وي دلته له دريږ کرښو یا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه یا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي یا۰۰۰ ګوټې او یا ۰۰۰ګوډي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبي نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته یو کونج چي له دباندې ورته کتل کیږي او د یوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاریږي. موږ په ورځنۍ یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی ګوډ دی. که یو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وییلی. که څوك په یوه ګوټه کی ناست وي نو وایي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا ګوډ نه وایي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .

په ټولیزه توګه په یوه سطحه یا هواره کی له پرتو کرښو g2 , g2 , g1 څخه یو مثلث یا دریګوډی جوړیږي، چی ګوډونه یی C . B . A او اړخونه یی c. b. a ، کونجونه یی α, β, γ دي (د مثلث دننه کونجونه یا زا ویې او دباندې ګوډونه دي، چې موږ یې په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ څیرې دې وکتل شي





(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کیږي

- په دریګوډي کې د کونجونو زیاتون 180° درجې دی یا π دی
- یو دباندنی کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زیاتون سره مساوي ده، له دې امله د یوه دریګوډي د دباندنیو کوجونو زیاتون 360° یا 2π دی۰
- د یوه دریګوډي د اړخونو نیمي په یوه ټکي کې یو بل سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دریګوډي » دروندټکی یا دثقل مرکز « دی. اړخنیمي یو بل په تناسب د۱ : ۲ پرې کوي یا په پښتو:

د اړخونو ځاننیونه یې۱ :۲ ده) په ځیره کې وګورئ) د یوه دریګوډي منځولاړې

یو بل په یوه داسې ټکي کې سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپیر ګردي) هغه ګردئ یا دایره چې دریګوډی په خپل دننه کې نیسي یا بهتره، د دریګوډي خوندیګردی(منځټکی دی)۰

د یوه دریګوډی کونجنیمي یو بل په یوه ټکي کی سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کی د دننه ګردی) ګردئ چې د دریګوډي

په دننه کی ده یا ګردئ یا دایره کې خوندي دریګوډی (منځټکی دئ) لاندې کې بې ځیره شته) د یوه دریګوډي جګې یا د ارتفاع کرښې په یوه ټکی کی سره غوڅوي.) ځیرې ټولې لاندې کتل کیږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې ځیرې اړه لري، چې تکرار راځی، خو پروا نه لري۰

د جګیو غوڅټکی Orthocenter **<u>Höhenschnittpunkt</u>** (H),

<u>Umkreismittelpunkt</u> (*U*) circumcenter ·د دباندنی- یا په راتاو گردی منځټکی

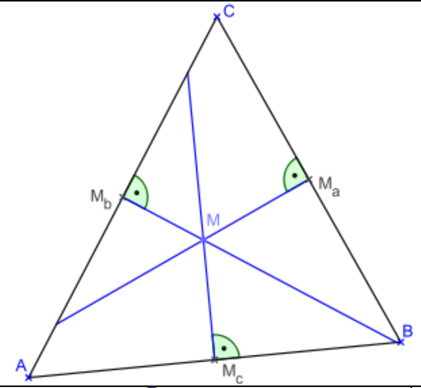
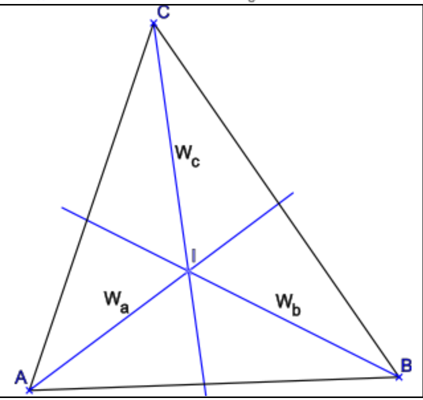
<u>Seitensymmetralen</u>), seid symetry ·د اړخسیومتریو غوڅټکی

<u>Inkreismittelpunkt</u> (*I*) den inscribed circle, incircle ·د دننه گردی منځټکی

<u>Winkelsymmetralen</u> r · د کونجسیومتري

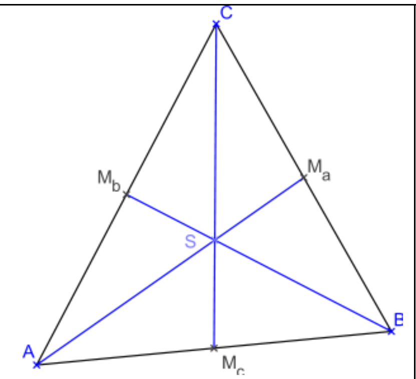
<u>Schwerpunkt</u> (*S*) r centroid · دروندټکی

<u>Seitenhalbierenden</u>) median ·اړخنیمی

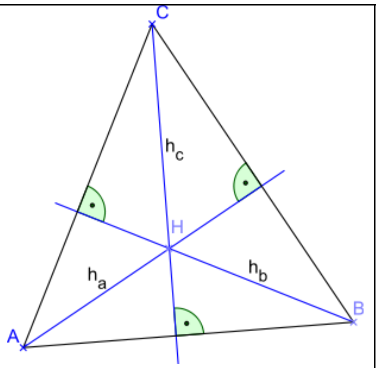
<table>
<tr><td>
</td><td>مخامخ خیره کې مثلث یاد دریکوډي په منځ عمود یا - ولاړې کرښې بنایي</td></tr>
<tr><td>
</td><td>دامخامخ مثلث هغه کرښې بنایي، چې کونج نیموي او موږ يې کونجنیمی (ناصف الزاویه) بولو (په پورته خیره په نیم اړخ ولاړې کرښې دي)</td></tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

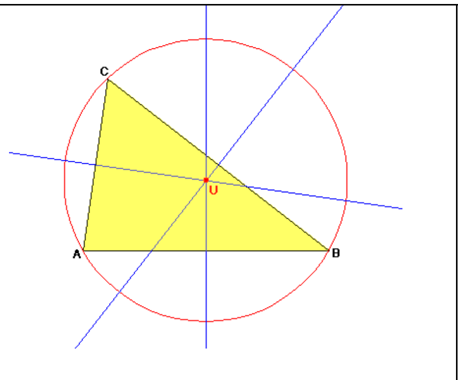
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له کونج څخه اړخ نیموي٠ موږ یې اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو٠

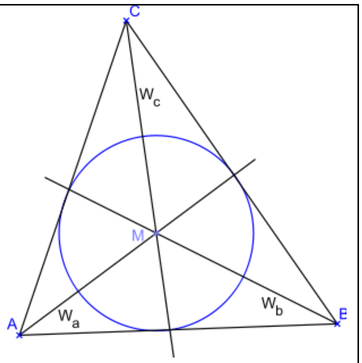


لاندې څېره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له کونج په اړخ ولاړې دي٠ دا د اړخ جګوالی په ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللي دي٠



په پورته څېره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی یې د خوندې ګردی یا دننه ګردی منځټکی هم دی

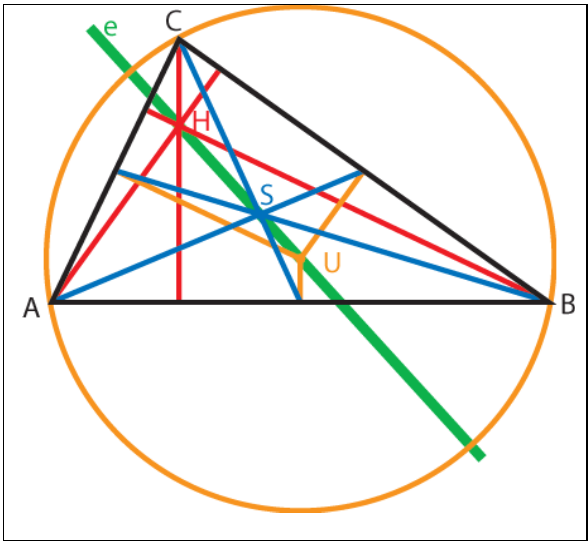




په پورته کينه ځيره کې د اړخ په نيمه ولاړې کرښې دي، چې غوڅتکی يې د په راتاو ګردی يا چاپېرګردی منځتکی دی۰

دا په يو ډول درې کرښې هرې درې يې په يوه ټکی کې سره غوڅوي۰

که د يوې درېګوډی   د منځولاړو په غوڅتکي يوه ګردی داسی ووهل شي، چې د ګردی کږه درېګوډۍ له يوه ګوډ څخه تيره شي، نو دا ګردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تيرېږي۰ که درېګوډی تيره کونجيزه وي، نو د ګردی منځتکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجيزه وي، نو کونج د ګردی په هيپوتينوز ې يا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجيزه وي، نو منځتکی له درېګوډی دباندې پروت دی۰



که درېګوډی ABC وي ، S دروندټکی، U د چاپيريالګردی منځپکی ، او H د جګيو غوڅپکی وي، نو کرښه په لاندې ځانښيونه يا تناسب پراته دي :دا په لاندې ځيره کې کتل کيږي ۰

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

۶ . ۱ . ۴   برابرارزښتوالی او ورته والی يا مشابهت Congruence and Similarity

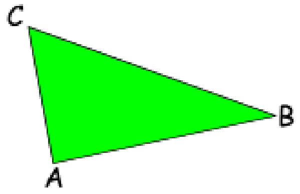
دوه دريګوډي   ABC   او   A'B'C' يو بل سره کونګروانيڅ يا برابر پټووني دي

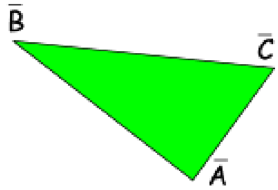
ياني براربارزښته دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ABC ≡ A'B'C'

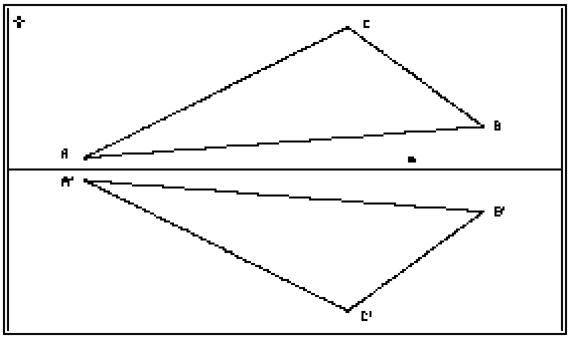
(4.4) که وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي(وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هندارونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې ځیر)





که دریګوډي سره کونګروانېخ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي توټو (اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

په ښت یی هم باور لري S اړخ او W کونج په ګوته کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

جملې: دريکوډي ټيك هلته کونګروا‌اينغ دي چې یو بل سره مساوي شي په

۱ - دري اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - یوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي WSW,

د دې جملو په څټ هم باور لري، دا په دې مانا چې که دريګوډي په کونګروا‌اينغ جملو کی ورکړشوو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونګروا‌اينغ دي. د کونګروا‌اينځ جملو په بنسټ کیدی شي په ځانګړي توکه دريګوډيجوړښت سرته ورسول شي، کوم چې د کونګروا‌اينغ جملو کارونی په ښير لیدل کیدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چې په همغو یا اړوند درې کونجونو کی یو بل سره برابر وي او د همغو یا اړوند اړخونو تر منځ یی تناسب یا ځاننیونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګروا‌اينغ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دريګوډي ټيك هلته یو بل ته ورته دي که یو دبل سره برابر وي، په :

۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نیونی یا تناسب کی

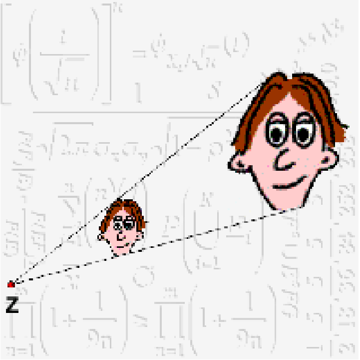
۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب یا ځاننیونه کی

۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

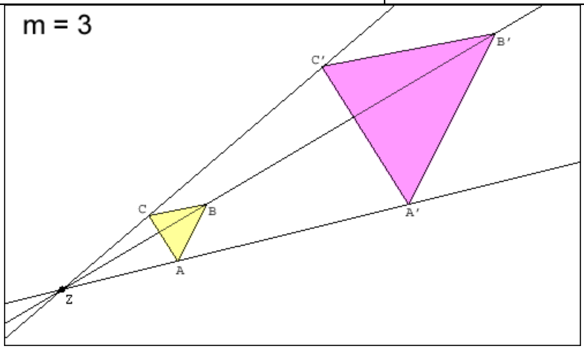
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مخامخ ښيرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په یوه کرښه وتړی او د یوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښي سره غبګه کرښه وباسی، نو دوه ورته درېګودي لاس ته راځي

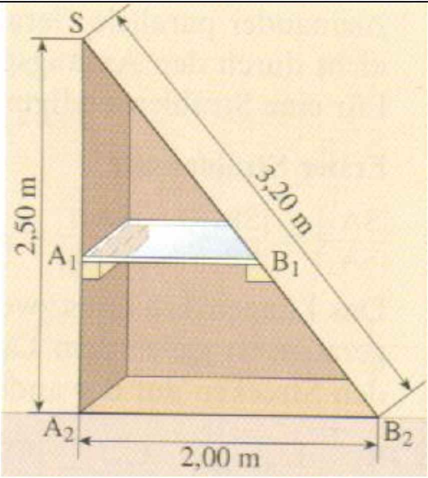


په لاندې ښيره کې کښل شوي دريګودي ورته دي، دا په دې مانا چي باور لري:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

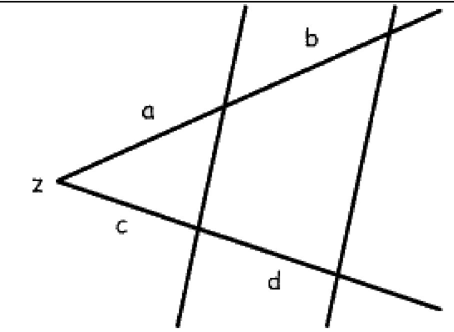
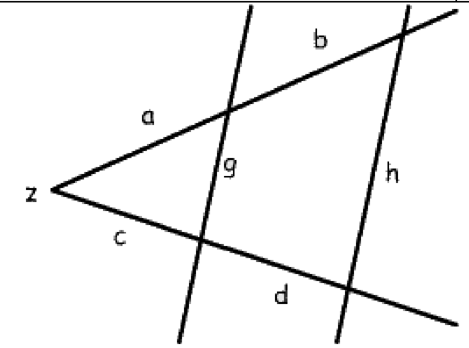


د ورته جملو سره خپلواني جملی د وړانګو جملی دي:

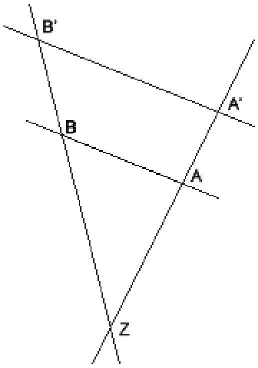


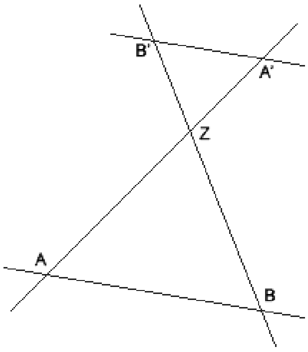
په دې پورته ښيره کې درېګودي يو بل ته ورته دي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې لومړۍ جمله: دوه له یوه ټکی وتلي وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې یې لاندې اړیکی سره لري۰ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)}$	
د وړانګې دویمه جمله: که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکی لري، دا ته والي له جملو ده۰ ټکی چې څنګهدي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو $\frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)}$ $\frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)}$	

یا دالاندې، چې هرڅه یې روښانه دي





(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

(دا لاندې د ليکنې له لارې روښانه شوې څيره دې ګران لوستونکي وکاږي)

که درې په يوه ټکي کې پريکيدونکې کرښې g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی(کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بيلګي په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څيرې څخه لاندې اړيکي لاس ته راځي:

OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2 . 1

دا په دې ماناچې په وړانګو پرتې ورته برخې په مساوي تناسب يا ځاننيوںی سره پرتی دي:

A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2 . 2

دا په دې مانا چې: په وړانګو پرتې ورته برخې په مساوي تناسب يا ځاننيونی پرتی دي لکه اړونده، د ککرې اندازه شوې برخې چې په وړانګه پرتی دي.

A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3 ۳ -

دا په دې مانا چې: په غبرګو پرتی کرښې په همغه برخوکې يو له بل سره په مساوي تناسب يا ځاننيونی پرتی دي

د وړانګو جملې هم باور لري، که د دوه غبرګو په څير رامنځ ته شي يا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کې دې وړانګې د کرښو په ځاي بدلې يا وليکل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c او همداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوډی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څیړنې لاندې نیسو

$a > c$ - 1

موږ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونج‌الف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردبلینده کاږو د a

په کچه چی د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوڅوي)

څیره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

$a < c$ - 2

دلته درې امکاناته شته دی(د دې درې امکاناتو څیره وکاږی)

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه هغوټکو کې پرې کوي،
په کومو کی چی اوبی یواځنی نه دی٠

۲ . ۲ : ګردبلینده د α ازاده پښه لمسوي٠

۲ . ۳ : ګردبلینده د α اندازه پښه نه غوڅوي .

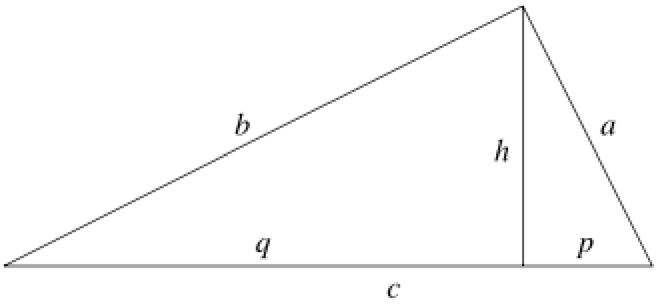
$a = c$ (۳

ګردبلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کې پرې
کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$
نیونه په دریم کونګرواینځ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ ۰ ۵ .ولاړکونجیز دریګوډی مثلث قایم الزاویه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلفو دریکوډیو څخه موږ په لاندې برخه کې ولاړ کونجیز دریګوډی ترځیړنی لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ
هوپوتینوزې)Hypotinuse (بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت (Katheten (بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریګوډي ته روځنی یا ورسره بلدې یا مروجی په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له څیرې ۴ . ۱۳ څخه واخلئ



په ولاړکونجیز دریګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړیکی باور لري چی دلته یی بی له اوبی)ښوونی(راوړو:

یادونه : په ولاړګوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نوموونو یانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پیتاګوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتینوزې مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکاتیتو(د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع)) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د کاتیت مربع هواریزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددې کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

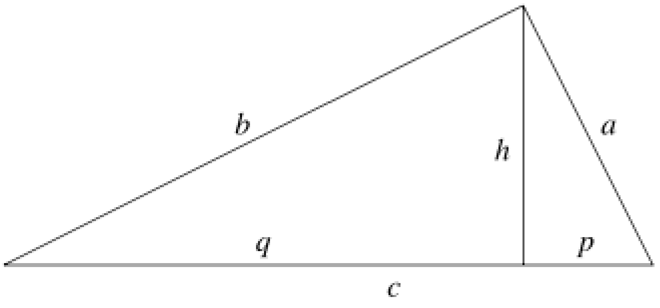
$$a^2 = p.c \, , \, b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتیزې په جګي مربع هواریزمساوي ده د هیپوتینوزې (لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q \, . \, p \qquad (6.\,7)$$

یا په لاندې کې لنډ بیا ورکړ شوي



لنډ: (ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پیتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اویکلید د کاتیتونو(پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

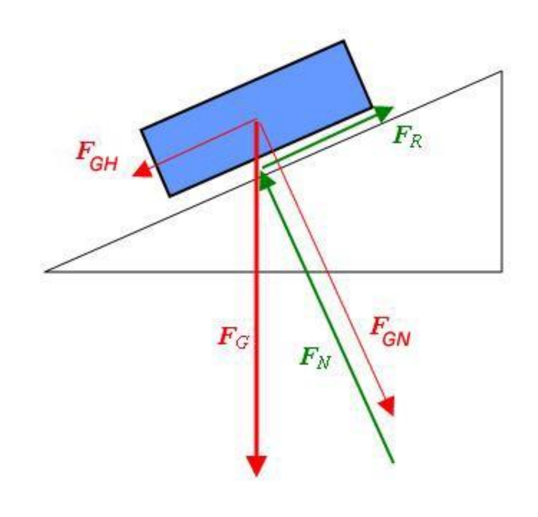
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اویکلید جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بيلګه ۴ . ۴ : (ځيره نه ده کبنل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکج فکر وکړي٠ دا يوه فزيکي دنده هم ده(ځېره وکبنل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د يوه بدن د وزن G تجزيه ځرګندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزيك له مخی هغه ټکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي (KSP =)چی په يوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په يوه کبنته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نيغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه FN)تجزيه کيږي. د بنوولو ده چی، دريګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دريګوډي سره ورته دی



يادونه: په ليکنه کې زور يا توان د لاندې ځېرې سره داسې بدلو:شين تنيا د مستطيل شکل G دی

$$F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$$

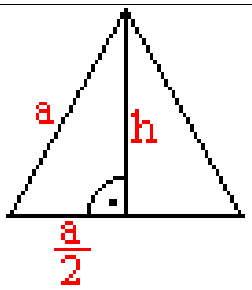
ګوډونه : له پورته ګوډ A کبنته بنی لور ته ګوډ C کبنته کيڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج α ، په ګوډ B کونج β

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې G||AC څغلي، نو FH او G یو کونج α جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه دریګوډي په دې برسیره په ولاړکونج کې یو بل ته ورته دي٠

یادونه : داسې بیلګې، چې څیره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې څیرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي٠ زما زړه نه شي، چې له لیکلو یې تیر شم٠

بیلګه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کې دې (لاندې څیره) جګی و شمیرل شي .د ٦ . ۴ (له مخی لرو) جګی په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نیمی هم دی، دا په دې درېګوډي کې وکارِی)



$$h^2 = a^2 - (a/2)^2$$

$$h^2 = a^2 - a^2/4$$

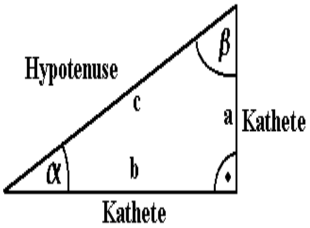
$$h^2 = (3/4)a^2$$

$$h = (\sqrt{3}/2)a$$

٦ . ۲ په ولاړکونجیز دریګوډي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چی یوه ولاړکونجیز دریګوډي کي جوړیږي(لاندې څیره). که د کونج α مخامخ اړخ یا -کاتیت a gegkathete د مخامخ اړخ په څیر وښایو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دریګوډي کی لاندې اړخځانئیوني منځ ته راځي یا جوړیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$ $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$ $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$

د وړانګو جملو له امله دا اړيکي يا تناسب يوائي د كونج په واك كی دی. كه په پام كی ونيول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړيکی ليكلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې ليدل كيږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پيداكولو لپاره دوه ګنجدولونه پوره دي يا بسيا كوي. .ورپسي يا ددې په تعقيب پيژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}; ....(6,10)$$

برسيره پردې د پيتاګوراس د جملی په پام كی نيولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; ....(6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}; ....(6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳.۰٦ په یوونګردئ کی د کونج فنکشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یوائحي د لیدیدونکو (Konkrete اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یوائحي یا په ځانګړې توګه د $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (0 < \alpha < 90°)$ لپاره تعریف دي. که د α خپلواك واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چی په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی) څیرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو د یوون ګردي باندې مخ نخښی په واك کی کرښو ته لاربنودوي .د لته ټولی کرښی) د لته به له کرښو ځمورږ مطلب پای کرښی وي(، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی کرښي او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ (د په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha = \overline{QP}, \cos\alpha = \overline{OP}, \tan\alpha = \overline{AD}, \cot\alpha = \overline{BE}; \qquad (6,13)$$

د کونج α لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د کواوردیناتسیستم څلورمه کی پروت دئ(لاندې څیره له کیڼ و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکې کارول شي توري ساده اینوول کیږي۰ په څیرو کې شنې کرښې د ساین دي او سرې کرښې کوساین دئ او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه کیږي، چې د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم اینوولی شو)، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریګوډي کی تر څیرنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج α په لینده اندازه کی د ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دئ، چیرته چی په زیات څرخون له 2 څخه لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو) ۱۳ . ۴ (څخه لاس ته راځي، چی ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود :°360) 2 (periode (تل تکراریدونکی ، بیرته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځیدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پریود(180°) لري .

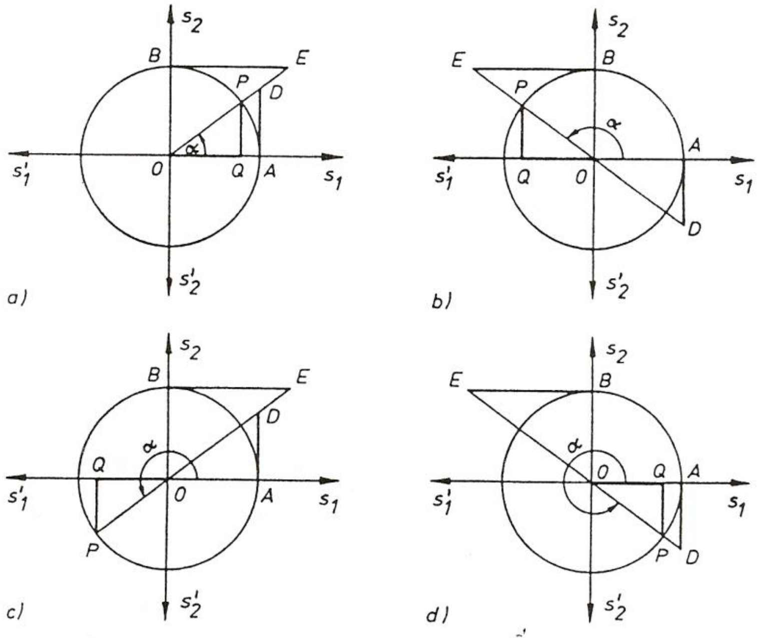


Bild 4.17 ځیره

پس لرو

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha;......................(6.14)$$
پـه
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

ټولیزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha;......................(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو ټولګڼونو $k = ..-3,-2,-1,0,1 ,2 , 3....$ لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخښه

	لومړۍ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$	دریمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$	څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
cotx	+	-	+	-

برسیره پر دې لاندې اړیکی باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \;,\quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \;,\quad \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha \qquad (4.16)$$
$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \;,\quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \;,$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \;,\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \;,\quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پیداکوو . دا چي α په درجې اندازه ورکړ شوي ده، نو اومشالتریا سویچ (بدون) دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library

جبشميري اړونه ده، پۀ غوښتل شوي فنکشن کی) په « DEG » سموو او بيا
لاندې ورکوني کوو.
په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

1. $\sin \alpha = a$, 2. $\cos \alpha = a$,
3. $\tan \alpha = a$, 4. $\cot \alpha = a$

دلته تمرينونه ۱ او ۲يواځي هلته موخه ور يا هدفمند ي، چې باور ولري $-1 \leq a \leq 1$

او په تمرين ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.
یو «بنستيزوبی یا بنستیز حل»α_0 د هر تمرين د جبشميرني سره په لاندې ډول یا
همداسی تکموترتیب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چیα_0 په درجه اندازه یا لیتده
اندازه اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو)

1. [a] [F] [sin]   2. [a] [F] [cos]
3 [a] [F] [tan]   4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په ځتې فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بیاد α_0 هر بنستيزحل په درجه یا لیتده کچ څرګندیږي.
د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنستيزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33,367013° = -0,58236,$
2. $\alpha_0 = 123,36701° \quad = 2,1531606,$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3.\ \alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$$
$$4.\ \alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

$$1.\ \sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$$
$$2.\ \cos\alpha = \cos(-\alpha)$$

او په ورته توګه،، فرعي یا ځنګیز حل یا اوبی،،

$$1.\ \beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$$
$$2.\ \beta_0 = -\alpha_0$$

لاس ته راشي

د لیدیدونکي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چی :

$$1.\ \beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$$
$$2.\ \beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$$

د α ټول حلونه د (۱۵ . ۴) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

$$1.\ \text{und}\ 2.\quad \alpha = \alpha_0 + k\cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$$
$$\alpha = \beta_0 + k\cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$$
$$3.\ \text{und}\ 4.\quad \alpha = \alpha_0 + k\cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$$

بیلګه ۴ . ۹ : لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودې شمیرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۱۰ : په بیلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لويې دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن 700 N وي (دلته N د Newton لپاره دی چې وزن پرې اندازه کیږي) او مائلی هواري مایلکونج $\beta = 28°$ وی؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G\cdot\sin\beta = 700\ \text{N}\cdot\sin 28° = 700\ \text{N}\cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ \text{N}.$$

$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G\cdot\cos\beta = 700\ \text{N}\cdot\cos 28° = 700\ \text{N}\cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ \text{N}.$$

۴. ٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په ټولیز یا عمومي دریګوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جمله‌د څیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

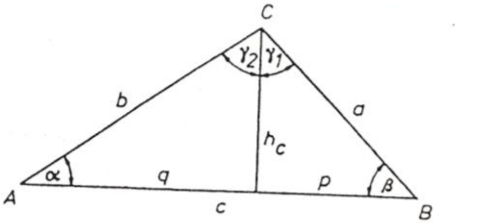


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{4.17}$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز دریګوډی کښل کیږي(پورته او لاندې څیرې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د ځیرې ۴ . ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$
\begin{aligned}
h_c^2 &= b^2 - q^2 \\
h_c^2 &= a^2 - p^2 \\
\hline
a^2 &= b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q, \\
a^2 &= b^2 + (c - q)^2 - q^2, \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b \cos \alpha,
\end{aligned}
$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$ لرو او همداسې:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.
\end{aligned}
\qquad (4.18)
$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دئ .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره ځیره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوې، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسی په ABCدریګوډي کی، F1 = c, F2 = a اوss - 180° = ss' معلوم دي، α

او R = b لټوونکی یا غوښتونکی لویي دي؟

د کوساین جملی (۱۸ . ۶) څخه لرو

b² = a² + c² - 2ac cosss

همداسی یا⇔

R² = F1² + F2² - 2F1F2 cos(180° - ss')

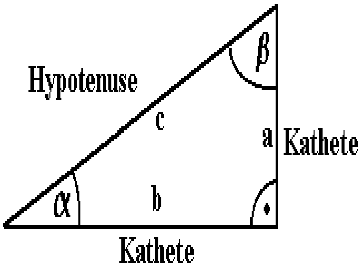
او د ساین له جملی (۱۷ .۶) لاس ته راځي

له کومو چی α تاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو۰

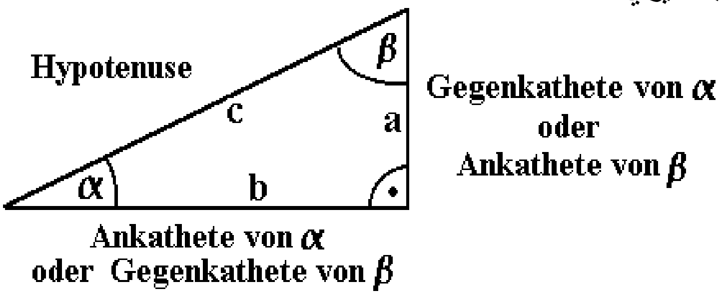
۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو۰

	مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډۍ ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څنډ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي۰



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي۰ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي۰ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیرۍ ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ۰

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

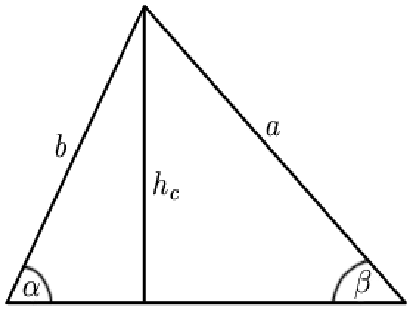
$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : (دا ځیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)



$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

په h_c پسې یې اوبی کوو

$$h_c = b\cdot\sin\alpha$$

د برابراینوني له لارې لاس ته راځي

$$a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha$$

که په $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ وویشو، نو د غوښتني لومړی برخه کې لاس ته

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

راځي

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیداینتي توګه جګی h_a او یا h_b لاس ته راکوي

د کاروني بیلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$a = 5,4\,\mathrm{cm}$ ، $b = 3,8\,\mathrm{cm}$ ، $\alpha = 73°$

دا نورې لویې دې په درېګوډي کی پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\mathrm{cm}\cdot\sin 73^\circ}{5{,}4\,\mathrm{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونیوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، یاني

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي٠

او نو ګاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\mathrm{cm}\cdot\sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\mathrm{cm}}$$

دکوساین جمله

په تریګونومتري کې کوساینجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړیکې ښایي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ۰ ۹) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپيتاګوراس جملې له مخې لرو:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

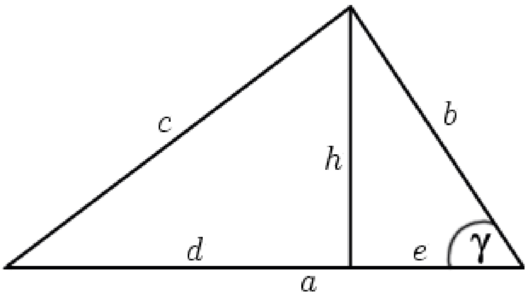
د کوساين جمله استعماليدی شي، که په يوه دريګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) يا

- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه يې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم يې پيداکولی شو

ښوونه :



د دريګوډي په کيڼ لور د پيتاګوراس قضيه استعمالوو، چې د c^2 لپاره يوه شميرافاده يا – ويينه پيداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو يا کاتيتو اوږدوالی څلوری يا مربع بايد پيدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنې اړخ لپاره د پیتاګوراس قضیې استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

(د بینوم فرمول)

د پیتاګوراس جملې له مخې د کیڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیداشوي شمیرویینې یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b} \left(\frac{ankathet}{Hypotenuse}\right)$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځای په ځای کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بیلګه:

یو درېګوډیABC ، چې اړخونه یې خرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9 \text{ cm}$ ،

$b = 2{,}8 \text{ cm}$

$c = 3{,}5 \text{ cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج β لويوالی غواړو پيداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\mathrm{cm})^2 + (3{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}8\,\mathrm{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پيژند ورکو يا داسې تعريفوو

$$\sin A = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{opp}}$$

Common formularکډ وډ فرمولونه

Pythagorean identitiesد پيتاګوراس کتمتوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیاتون او کمون کتمتوالی Sum and difference identities

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

دوه برابره کونج کې ګتمتوالي Double-angle identities

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

د نیم کونج ګتمتوالی Half-angle identities

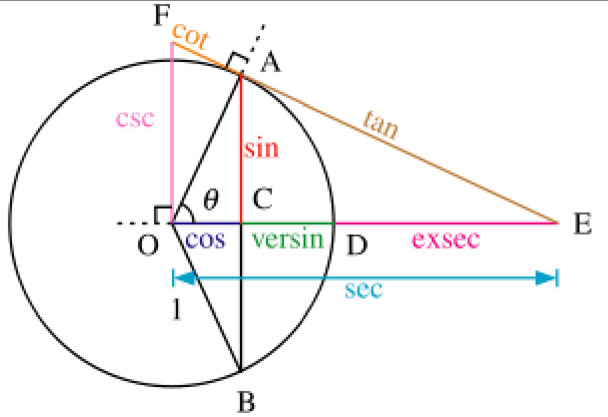
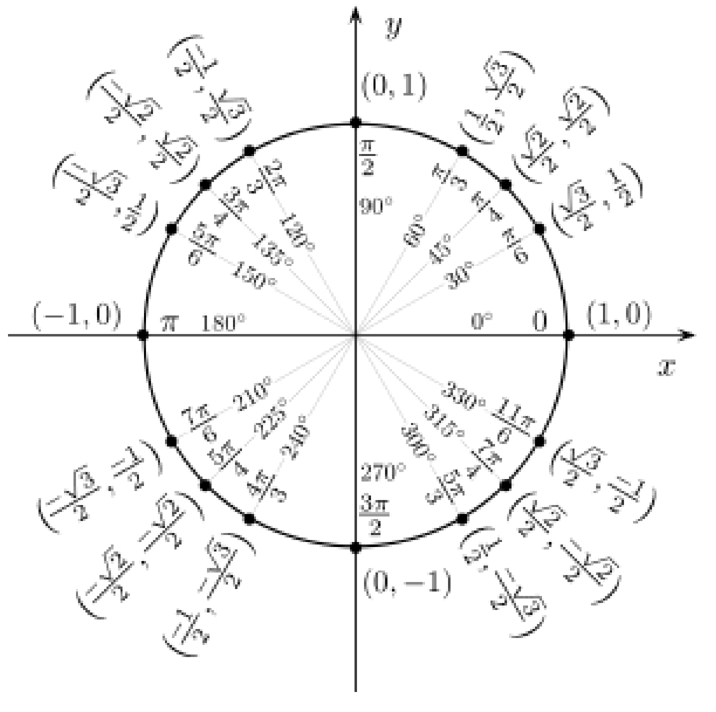
$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د تريګونومتريکي کټمتوالي ليست List of trigonometric identities

	نوره ژوره څيرنه دلته نه کړو، دې ته ګوته نيسو، چې په لاندې څيره کې تريګونومتريکي فنکشنونه روښانه دي
	د يوه کونج θ ټول تريګونومتريکي فنکشنونه په O باندې د يوې يونګردی ترم له لارې ورکول کيدی شي (يونګردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښنه شوي) مخامخ: يوونګردی(يووالي يا واحد ګردی) The unit circle

(c) ketabton.com: The Digital Library

Notationليکنبڼه

دا لاندې ليکنبڼه يا - ډول د ټولو تريګونومتريکي – يا مثلثاتي فنکشنونو ساين، کوساين ، تانجنت ، کوتانجنت ، سيکانت، کوسيکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې يواځې ساين او کوساين ليکل شوي دي

arcsin(x) کيدی شي$\sin^{-1}(x)$ وليکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره بايد بدل نه شي

Definitionsپيژند:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بيرته راګرځيدنه ، سيومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

په يوون(يووالي-) ګردی يا دايره کې ساده ليدل کيږي:

Periodicity تل بيرته راګرځيدنه

ساين ، کوساين ، سيکانت، کوسيکانت تل بيرته راګرځيدنه 2π ده(پوره ګردی) (تکرار دی)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبيرته راګرځيدنه π لري(نيمګردی يا نيمدايره) :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

Symmetry سیومتري

د تریګونومتریکي فنکشنونو لپاره سیومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x$, $x \to \pi/2 - x$ ،یا $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x), & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\
\cos(-x) &= \cos(x), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\
\tan(-x) &= -\tan(x), & \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cot(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x) \\
\cot(-x) &= -\cot(x), & \cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \tan(x), & \cot(\pi - x) &= -\cot(x) \\
\sec(-x) &= \sec(x), & \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \csc(x), & \sec(\pi - x) &= -\sec(x) \\
\csc(-x) &= -\csc(x), & \csc\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sec(x), & \csc(\pi - x) &= \csc(x)
\end{aligned}$$

بدلون : د $\pi/2$ او π بدلون دی

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\
\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\
\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x) \\
\cot\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x), & \cot(x + \pi) &= \cot(x) \\
\sec\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\csc(x), & \sec(x + \pi) &= -\sec(x) \\
\csc\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sec(x), & \csc(x + \pi) &= -\csc(x)
\end{aligned}$$

د پیتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پیتاګوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج د زیاتون او کمون کټمټوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زیاتوننخښې په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کې

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کیڼ لور " + " وي، نو په ښې لور"-" راځې او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کیږدو د پیتاګوراس یا موفریي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \;\; = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \;\; = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

د نیمکونج فرمول Half-angle formular

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ریښي لاندې ماتباندې او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پیتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

نو لرو:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

د ځل و زیاتون ته کټمټوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

د زیاتون- و- ځل ته کټمټوالی (برابرون) Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کیږدو نو لرو

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم درېګوډي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیمګردی یا نیمدایره $\text{if } x+y+z=\pi = \text{half circle},$ =که

او نو یا $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x . \tan y . \tan z$

$$\text{and } \sin(2x)+\sin(2y)+\sin(2z)=4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$$

تریګونومتریکي په څټوالی Trigonometric conversions

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخې اړیکی لري۰ داسې اړیکی د په څټ اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندګی وکړي ، او arcψ دې د ψ په څټ وي، داسې چې $\psi(\text{arc}\psi(x)) = x$ ۰ نو $\varphi(\text{arc}\psi(x))$ کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم x په څیر ووېلی شي یا افاده شي۰

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پو هیدی شو

cot	sec	csc	Tan	cos	sin	φ \ ψ
$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	x	**sin**
$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\sqrt{1-x^2}$	**Cos**
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	**Tan**
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**sec**
x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	**cot**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

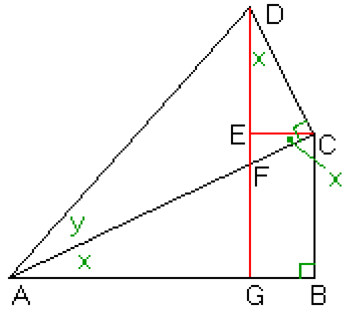
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلایي نسبت φ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جیومتریکي غوښتنه (ثبوت) Geometric proofs



sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)

په مخامخ څیره کي کونج x د ولاړکونجیز درېکوډي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوډیز درېکوډي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندي ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC.   کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$=\frac{DG}{AD}$$

$$=\frac{EG+DE}{AD}$$

$$=\frac{BC+DE}{AD}$$

$$=\frac{BC}{AD}+\frac{DE}{AD}$$

$$=\frac{BC}{AD}\cdot\frac{AC}{AC}+\frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD}$$

$$=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}+\frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AD}$$

$$=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y).$$

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Using the above figure:د پورته څیرې څخه کار اخلو

$$\cos(x+y)$$

$$=\frac{AG}{AD}$$

$$=\frac{AB-GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

د $\sin(x - y)$ او $\cos(x - y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x - y)$ او $\sin(x - y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کیږي، که د $\cos(x + y)$ او $\sin(x - y)$ لپاره فرمولونه وپیژنو

$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$

که په فمرول $\sin(x + y)$ کې د y په ځاي -y کیږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو

$$\cos(x + (-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته) د زیاتون)جمع(تیوریم(، له کومو یی چې دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولټولګه) کتاب چې فرمولونه په کې راټول وي(کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x\pm y)=\sin x.\cos y\pm\cos x.\sin a;.......................(6,19)$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x.\cos y\mp\sin x.\sin y;........................(6,20)$$

$$\sin 2x=2\sin x.\cos x;\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;...................(6,21)$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x.\tan y};....................(6.22)$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};..........................(6,23)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};.............................(6,24)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

مونږ له څیرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته ځو، او ځاي په ځاي کوو ، $\gamma_1 = x$, $\gamma_2 = y$ نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 . \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$

$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته ګوته ونیسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلګه ۴ . ۱۳ – لاندې وییني یا افادې دې ساده شي

$$a)\ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له کوم چې $y = \sqrt{2}\ \sin\alpha$ لاس ته راځي

$$b)\ y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi)$$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x + \pi) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \text{ ist.}$$

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - (\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \le \alpha \le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنستیزه هندسه یا ځمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړئ شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1. a) $15°$	b) $225°$	c) $105°$	d) $277{,}5°$
1.1.2. a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3. a) $4{,}24°$	b) $70{,}9°$	c) $31°\ 17'\ 20''$	d) $228{,}1923°$
1.1.4. a) 5,19	b) 0,22	c) 2,31	d) 1

۱ . ۲ – یو درېګوټی له $a = 4{,}5$ cm , $b = 12{,}2$ cm او $c = 11{,}7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا درېګوټی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسې یې ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی(یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې درېګوټی جوړ کړی

a) $a = 11{,}7$ cm , $b = 9{,}2$ cm , $\gamma = 43{,}5°$

b) $c = 16{,}1$ cm , $\alpha = 84{,}6°$ $\beta = 51{,}9°$

وښایئ چې ولې دواړه درېګوټي ورته دي!

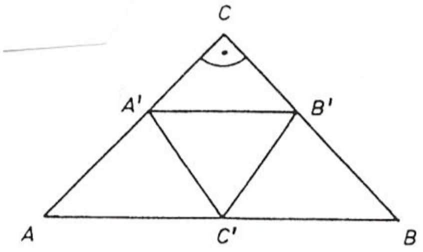


Bild 4.20 ځیره

۱ . ۴ – یو مساوي پښیز، ولاړکونجیز درېګوټي ABC ته یو مساوي اړخیز درېګوټی A'B'C' داسې په دننه کې ورکړ شوی چې $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (ځیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

ورکړی $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د خیرې ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع اړخونه وشمیری

الف) له کانتو څخه

ب) له هیپوتینوزپېرخو څخه

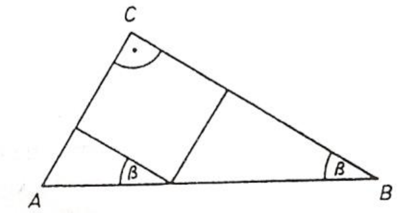


Bild 4.21

۲ . د جیشمیرنی سره د ارزښتونوټاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړئ:

a) α = 47,15° , b) α = -390° , c) α = 7,784 , d) α = 13,195

۲ . ۲ – کونج ß دې د sinß = a , cos ß = a , tan ß = a , cot ß = a څخه د

a) a = 0,8290 , b) a = -0,2907 , c) a = -2,145, d) a = 0,8660

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کی دې د الفا په ځای بیتا ولیکل شي !!!)

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز (γ = 90°) دریګوډي کې معلوم دي

الف) a = 3 cm , b = 4 cm ، ب) a = 5 cm , c = 12 cm

کوم ارزښتونه sin α , cos α , tan α , cot α لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې (γ = 90°) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیری ، لاندې لوبي موږ ته معلومي دي:

a) a = 50cm , b) a = 40cm , c) b = 70 cm , d) c = 65 cm

b= 78,1 cm α = 43°36' α = 18°55' ß = 59° 29'

۳ . ۳ – وشمیری ! A , h_c او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه (ß = α, a = b):

a) a = 66cm , b) c = 22,4 cm , c) a = 38,9 cm , d) c = 30,3 cm

c = 130 cm α = 47,8°, γ = 33,3° γ = 48,2°

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) درې قوې دې د زوريا قوت $F_1 = 167{,}5N$, $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه يو دريګوډی جوړوي. د دې دريګوډي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوي دي؟

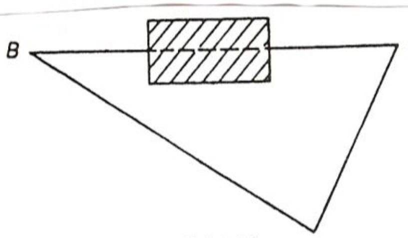


Bild 4.23 ځاکره

پ) دوه ټکي A او B چې يوه کور يې مخه پټه کړې وي، يو له بل څومره لرې دي، که $\overline{BC} = 75{,}25\ m$, $\overline{AC} = 51{,}75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'\ 45''$ وي (شيره ۴ . ۲۳)

ت) د دوه يخ هاکي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ يو د مخالف ټيم لوبغاړی G ولاړ دی. S_1 په داسې ډول توپ و S_2 ته وهي چې توپ په يوه ديوال ولږيږي.
(شيره ۴ ، ۲۳ وګورئ).
د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لريوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له ديوال $a_1 = 2{,}5m$ همداسې $a_2 = 6{,}5\ m$ وي او توپ د يوه دې ديوال سره په يوه کونج $\propto = 42°$ ولږيږي.؟

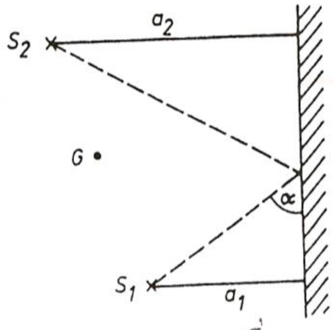


Bild 4.24 ځاکره

۵ . د تريګونومتريکي يا دربګوډيزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشميري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشميرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښایی:

5.2.1. a) $1 + \tan^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$ b) $1 + \cot^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$

c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1+\tan^2 \alpha} = 1$ d) $1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ b) $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

c) $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\cot \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$ d) $\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2\dfrac{\alpha}{2} \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2\dfrac{\alpha}{2} \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ d) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

5.2.5. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$

b) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$

c) $\sin \alpha + \sin (\alpha + \dfrac{2\pi}{3}) + \sin (\alpha + \dfrac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6,5\pi + \alpha) = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$i^2 = -1$ (7 , 4)

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a.i}, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a.i}$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)z= i یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د تولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې ډول د څلورې پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2/4$$

لاس ته راځی یالرو=>

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x + p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیونې یا حلونه منځ ته راوړي۰

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{p}{2}=a\in R,\sqrt{q-p^2/4}=b\in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبيونې يا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2}=a\pm bi;a,b\in R$$

د دې فورم يا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتين: پوره کوونکي - يا پوره کيدونکي-) بلل کيږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 =-1;\ a,b\in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډيرئ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z}=a-bi,.................................(7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي٠ لنډ کنجوګيري کمپلکس ګڼ يا اوښتی ګڼ

$$|\,z\,|=\sqrt{a^2+b^2},..............................(5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنګه ايماجينار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رييل او ايماجينار برخه کې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1+b_1i=a_2+b_2i\Leftrightarrow a_1=a_2,b_1=b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ تل په پام کې لرو، چې $i^2 = -1$ اینښول شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سرې د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې: $i^2 = -1$

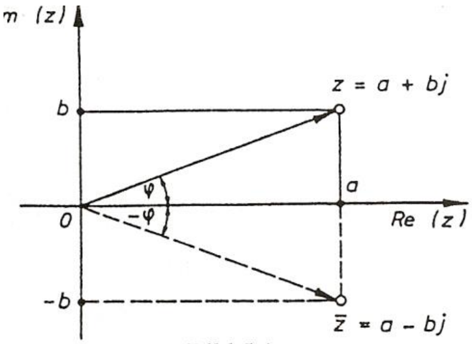


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطځې ریبلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته يېایماجینار برخه وایې لکه څنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوريږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځني وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2),.......(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(z2-) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

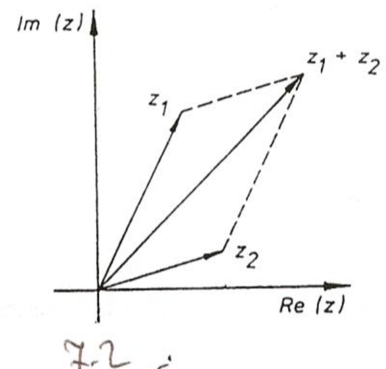


Bild 5.2 7.2 څېره

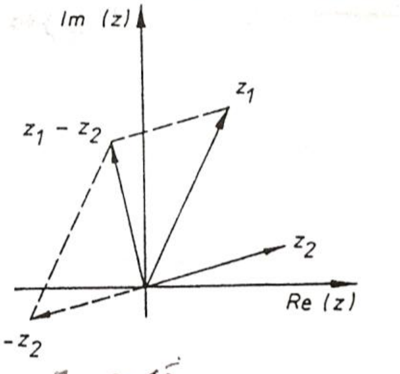
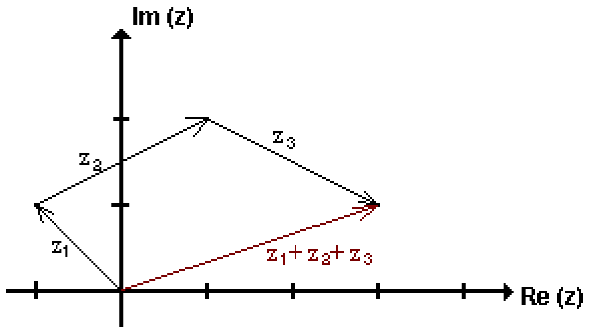


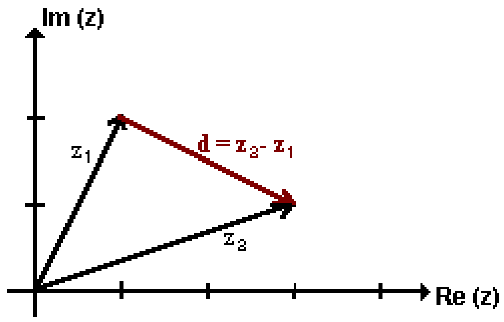
Bild 5.3 7 څېره

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا لاندې:



په پورته او لاندې څیرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي۰



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي۰

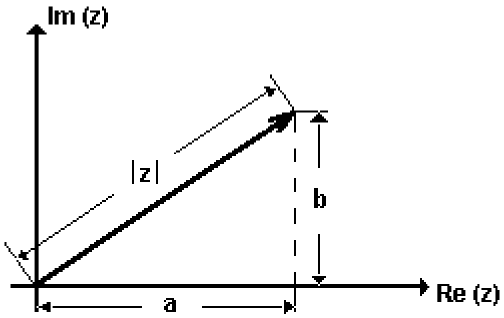
دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس(فئثاغورث) د جملي

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي۰ مخامخ څیره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په درې ګوډي کې د اړخونو ځانښیونه یا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اینوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2$$
$$= a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2(-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \qquad (7,20)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي٠ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z_2} = \bar{z}_1.\bar{z}_2 \quad , \quad |z_1 . z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ٧ ٠ ٢

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2$

او (١٥ ، ٧) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7,22)$$

٧ ٠ ٣ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right) = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوهمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ : د $Z1$ او $Z2$ لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3} i)$ d) $z = -1 - i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22+5i)+(2+i)$ b) $(3+2i)-(5+2i)$

c) $(1+2i)-(1+2i)$ d) $i-(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-2i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x+y\,i)(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63\ +\ 16i}{4\ +\ 3i}$

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د ګڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته رااچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي. په جملو کېد دې ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه تړنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د رښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی یا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځی. د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ ۰ ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه (ثبوت) کې سرې له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې رښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي.

دا وینا B هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه رښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)(د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیاارزښت په جدول کې) له یوې رښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ ــم جدول).

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې ربنتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی$3x \geq 3$: د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د 3x زیاتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \geq 3x+6.$$

بیلگه:

د یوه ناټیک اوبیونې یا حل کارونه (متود)

د ښوونې دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

لاس ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه ربنتیا دي۰ مگر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو$a \geq 0, b \geq 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له ربنتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی(سیده ښوونه) او په ناسداړه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو گټوره به وي، چې په لاندې توگه تر څیړنې لاندې ونیول شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٨ ٠ ٢ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده٠ وینا یعنې نفیې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده٠ (د ثبوت د

رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده٠

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفیې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورې یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځی

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورې وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کینه لور د څلورې ۰ مربع په بڼه لیکل کیدی شي او هیڅکله له صفر څخه نه شي کوچنی کیدی۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتیا دی یا غلط دی، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتیا دی یانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتیا دی ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ رېښه یا جذر $\sqrt{2}$ ایرشنل دی

اوبیونه یا حل : د غوښتنې نفیې ده، چې : د ۲ رېښه $\sqrt{2}$ ریشنل ګڼ دی (د ریشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو باید بیا دوه ټولریشنل ګڼونه q, p, د $q \neq 0$ سره شته وي، چې دا باوري شي:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

له دې پورته برابرون سره p^2 یو جوړه((جفت) ګڼ دی۰ نو له دې امله p هم یو جوړه ګڼ دی، ځکه چې یواځې د جوړه ګڼ مربع یا څلورې جوړه کیدی شي $p=2p'$ له مربع یا څلورئ کولو او پر ځاې اینوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p'^2$$ ،

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم يو ځلوری يا مربع ګڼ دی٠ په دې پسې لرو p او q پر ۲ ويشونی دی، يانې پرويشپردی نه دی٠ که پرويشپردي ټول ګڼونه p او q له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کيدی، چې شته يا موجود وي٠

۸ ٠ ۳ د پوره ايندکشن له لارې ښوونه

د پوره ايندکشن ثبوت يا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کيږي، چې د يوه ټاکلي ګڼ n0 (صفر بايد لږ د ن د پښی لاندې وليکل شي) څخه د ټولو پيدايښتي ګڼونو لپاره باوري کيدی شي٠ يانې دلته نوينه داده، چې يوه وينا د لپاره که باور ولري، نو دا بيا د ټولو پيدايښت ګڼونو لپاره باور ي کيدی شي٠

بيلګه ۱ :

د ټولو $0 \geq n$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي يا له صفر بسره برابر دي يعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بيلګه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري 1+3+5+… 2n+1)= n²

د پوره ايندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ايندکشن پرينځيپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که يوه وينا دn= n0 يا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په پښه کې‌ليکل شوی) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وينا د يوه په خوښه پيدايښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوريوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وينا د ټولو پيدايښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ريښتونې ده ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې په ترتيب د ايندکشن ښوونه په دوه پلونو يا قدمونو سرته رسيږي

۱ - د ايندکشن پيل

ښوول کيږي، چې دا وينا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د ايندکشن پل

اوس بايد يو ايمپليکيشن يا لاس ته راوړنه وښوول شي۰ له دې امله د ايندکشن پل يا له برخه پلونو جوړ دی

۲ الف: د ايندکشن نيونه :

نيول کيږي، چې وينا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نيونه په V فرمولبند کيږي

يادونه V د نيونې لپاره ځاي پرځاي کيږي يا راوړل کيږي۰

۲ ب – د ايندکشن غوښتنه:

غوښتل کيږي، چې دا وينا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو۰ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي ليکو

۲ ج – د ايندکشن ښوونه :

ښوول کيږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: $A \Rightarrow B$

بيلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^0 = 1 > 0$

۲ ۰ ۱ ۰ V ته :

$2^k > k$

و ۲ ۰ ۲ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2^{k+1} > k+1$

٢ ٠ ٣ له $B <= V$: له $2^k > k$ او $1 < 2$ څخه د زیاتون له امله لاس ته راځي :

$2+2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بیلګه ٢ :

١ ٠ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1° = 1$

و ٢ ٠ ١ V ته: $1+3+5++...+(2k-1) = k^2$

و ٢ ٠ ٢ B ته:

و ٢ ٠ ٣ $B <= V$ ته: له نیونې څخه د زیاتوون 2k+1 زیاتونې او له دې د ښي خوا د یوه بینومځلوری(-مربع) په څیر انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښی خوا انځورونې څخه د بینوم څلوری(-مربع) لاس ته راځی :

$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

یادونه : د V او B پر ځاي کړی شو، چې نیونه او غوښتنه ولیکو، یانې موږ درې څه لرو، چې نیونه غوښتنه او ښوونه ده٠ په هغه ورسره بلد ډول یې ښوونه د یوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی یا اوبیونه بللی(اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي یا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم یو، لکه ملګوبی، خړوبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شمیرپوهنې سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، کۀ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بیا د ترنې په ډول ورسره مل کړو٠ ستاسو وړاندیزونو ته هم سترګی په لار یم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښایي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تیرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښایي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل کړی دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dfrac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}.$

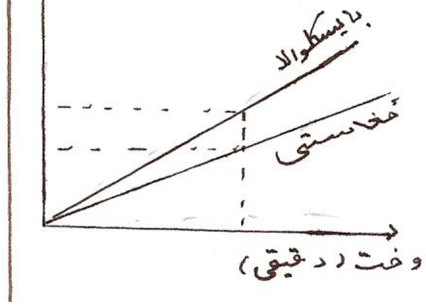
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ ۰ کرښیز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پیل بیلګه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چی په ګراف کی کښل شوی دی(که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړۍ کی ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلو متره په ګړۍ کي ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې ياديږي، په همغه نامه نه يادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون يا مساوات په نامه وبولو .
وخت) په دقيقه (په t ښايو لار) کيلومتر(په s ښايو د لارانځورونی ځخه په ګراف کی څرګنديږي چی بايسکلځغلوونکی له ۶۰ دقيقو وروسته ۱۵ کيلو متره ځغليدلي يعني 15km /hاو پلی ۱۰ کيلو متره يعني 10km/h
غواړود هرځه لمړی وښايو چی هر يو له يونيم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بيا دويمي پوښتني ته ځواب ورکوو.
بايسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 kmځغليدلی وي او پلی به 2.10km=20kmځغليدلی وي بايسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km
15.tkm=لار وهلي وي. دلته وخت t خپلواك اوړيدونی يا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړيدونی يا ناپيژندونکی يعني د t په واك کی دئ. دا کليمي به بيا د فنکشن او څيرونو په برخو کی پوره تر څيړني لاندې ونيول شي. د بايسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r يې ښايو برابرون داسی ليکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بايسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بايکلځغلولو وخت دی طبعآ زياتيز يا مثبت دئ ورته دپلي چی په lيي ښايو وهلي لار هم تاکل کيږي،يعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پيل ټکي له 1,5 ساعته يو له بل څومره لرې دي. وهل شوې لار :

د بايسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$

د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقيب له 1,5 ساعته وروسته دواړه يو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاينيز- يا کرښيز مساوات :

د کرښيز مساوات فرمول د يوې اوښتونې يا مجهولې x سره داسی دئ

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقيقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبيونه (حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقيقي اعداد وښوول شي چی که په پورته (۱ . ۹) برابرون يا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرايط پوره کړي. د حقيقي اعداد و بنسټيز قانون (۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کېدی شي چې د حقيقي عددد مساوات دواړه خواوي په يوه عدد سره ځل يا ضرب کړو. بی له دې چې مساوات زخمي شي. داچی ويش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو ليکل کيږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; ....(9,2)$$ ....

دا د (۱ . ۹) يواځنی ممکن حل دی٠که په ځټ يا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه يو د بل توپيروو

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بيا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا يو مخامخوالی يا تضاد يا نوره هم ښه په ځتوالی تشکيلوي ، نو په دې حالت کی حقيقي عدد x شته نه دی چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بيا برابرون (۱ . ۹) لاندې شکل نيسي

0.x = 0

دا برابرون بيا د ټولو رييلګڼونو xلپاره پوره (ډك) دی. يا برابرون پوره کوي.

دا بيا داسی هم ليکل کيږي : (په خوښه bel) = xپس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره يواځنی ټاکلې اوبيونه (۹ .۲) لريد A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبيونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر رييلګڼ x اوبيونه يا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د يوې اووښتونې يا مجهولی سره د رييل برابرونونو د ګڼلو ټوله تيورې خوندي ده .

يو لاينيز برابرون (مساوات) (يو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاينيزو برابرونونو ترمونو زياتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سړی په دواړو خواو د لاينيزو ترمونو د هدف په لور زياتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بيرته رااړوي، دا د II . 2 بنسټيز قانون له مخی يو ورته فورمبدلون يا بڼه بدلون دی)(د اوبي يا حل ډيری تغير نه دی خوړلی) د بيلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کيدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زيات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کيڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی لیکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم یا بڼه یو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x = \frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کیدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د a1 |=0 په حالت کی په a1 وویشل شي:

$$x = \frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بیلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b-ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي.

ددې لپاره چی د ماتلاندې څخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرون ترتیبیږي او راټولیګی، xله نوکانو څخه راوځي

$$a^2bx + a^3x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د $a \neq 0$ له امله کیدی شي په a^2 وویشل شي (a+b)x=2b

دا د لاینیز برابرونونو بنستیزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که ($a + b \neq 0, (a \neq -b)$ وي ، نو(x = 2b /(a + b

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوګونی یا یواځنی اوبیونه یا حل دی
که(a = -b) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبیون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زیاتي اوبیونې یا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د نیونی یا فرضیي له امله چی باید $b \neq 0$ وي، موجود نه دی.
پام:
په دې هکله زیاتي بیلګی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب یا ځله وونې په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی یا متحولې ولري، همغهسی شمیرل کیږي، لکه په ریبلعددونو کې۰
دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چیرې اړیینې وې او یا ګرانو لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلګي به هم راوړم او که چیرې کوم د شمیرپوهنې مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅیږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي څښتن غوښتل۰ زه دومره یادونه کوم، چې په دې هکله زما د شمیرپوهنې بنستیز کتاب کې زیاتې بیلګي راوړل شوي، خو نه پوهیږي، چې دا کتاب به چا ته ورسیږي او که نه

بیلګه 9 . ۲ :
برابرون $(x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c =1$ یواځې
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دی.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې)
سره ځل کوو: $6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x) =6abc$
ورپسی نور، په لاندې ډول، د څرګندو شمیرلارو یا - قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$
$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$
$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بیرته د لاینې مساوات (۹ . ۱) بنسټیزه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات یواځنی حل دی.
د $6bc+3a-2ab = 0$ لپاره د $0x = 0$ له امله هر ریبل کنې x اوبیونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab = 0$ لپاره x په خوښه
دلته د ځیرل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول یی لاینیزوالی یا لاینیزتوب پیژندل کیږي، په څنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرینځیپ) کی کربنیز یا لاینیز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مګر په لاینیز مساوات یا برابرونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چی د ناپیژندونکو ضریبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زیات وخت په x هم شرطونه ایښول کیږي.
ددې لپاره لاندې کی درې ساده بیلګي راوړو:

بیلګه ۹ . ۳ :
برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$
د لومړي حل لپاره څلوری برابرړن یا مربع مساوات دی، ځکه چی څلوری(مربع) غړي لري. د یو له بل څلولو یا ضربولو وروسته څلوری غړي له منځه ځي. یو لاینې مساوات د یوې ځانګړي سره سره پاتي کیږي:

$$24x^2 - 32x - 27x + 36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x + 3x - x^2 - 9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x - a) / (x - b) = 1$ یواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بیا لرو: $2x - a = x - b \Rightarrow x = a - b$
د $x \neq b$ له امله باید باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a - b$ لري او پرته له دې ($a = 2b$) حل نه لري.

بیلګه ۹ . ۵ :
مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$
یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري . $x = a + b - c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځي هلته حل دی، کله چی $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځي د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې ($a + b = c$) حل یا اوبیونه نه لري

بیلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څیړنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې ټيك د $abc \neq 0$ لپاره يو هدف لري، بايد د اصلي مات لاندې پيدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تکرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$

$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$................ = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دئ

که برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوکانو يو له بل ځلولو راټول، ترتيبونه او ويشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونو يا ضريبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نيونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکيږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2,\ abc \neq 0$$

د دې وظيفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅيړل چې مات لاندې يي له ځلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅيرو چي مات لاندې يي له زياتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په ځلوونو ټوټه کيدلي يا تجزيه کيدلی شي .

بيلګه ۹ . ۷ :

برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2 - b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx - b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2 - b^2} - 1$$

ټيك د دې نيونو سره صدق کوي $ab \neq 0$, $|x| \neq 1/a^2$. :

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پیداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 -1)$$

$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$

$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$

$$a^2bx - b = b. (a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندی)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي(، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$

$$2a^2bx-a^2+a^2b^2x-b^2 = a^4b^2x^2+a^2b^2x+2ab^2x-3b^2-a^4b^2x^2-b^2$$

$$.............2a^2bx-2ab^2x = a^2-b^2$$

$$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

$$..................................x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $0 \neq ab$ لپاره(دا د نیونو له لارې تل پوره دی)که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بی له هغو چی په بنسټیزو نیونو کی له نیونو د باندې ساتل شوي وي) یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د xمطلقه ارزښت د کېونو $a = b$ د په څېټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی .د x لپاره نیول شوې نیونی د حل ورکولو کی باید په پام کی نیول شوي وي دا په دې مانا چي باید تل پوره وي:

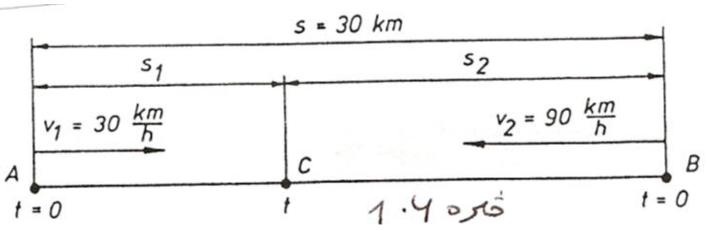
$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بیلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډې تمځایونه Aاو B یو له بل km30 لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکتیا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوزيږي. د Bڅخه يو تيز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به يو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزيکي لويې يو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځانليوني لپاره ځيره ځېره وکاږئ



پوښتنه » چيرته « د دواړو ګاډو د يوځايوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کيدی شي د A څخه و C ته لريوالي(د بار کاډي لارs1) يا د Bلريوالي وC څخه(د تيزګاډي D لار s2) سره وشميرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو يوځايوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دئ کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانيدو تر يوځايکيدو وټاکو. دلته درې اوړېدوني يا مجهولی مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نيونی سره مناسب لاندې اړيکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t\ \ , v_2 = s_2 / t\ \ ,\ \ s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو مارونې يا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\ t\ \ , s_2 = 90\ t\ \ , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی يونونه(واحدونه) پريښوول کيږي. او پريکړه کوو چی لار په کيلو متر او وخت په ساعت ښايو)!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو يا مساواتو سره چی حل به يی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چی دا مساوات په يوې مجهولی مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کيدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که وليکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي .s2 = 30 - x دا په لمړنيو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30\text{-}x) / 90$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاینیز ټاکنبرابرون یا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x\ ,\ 4x = 30 \quad x = 7{,}5$$

نو لرو

$$s_1 = 7{,}5\ km\ ,\ s_2 = 22{,}5\ km\ ,\ t = (7{,}5 / 30)h = 1h/4 = 15\ min$$

که ولیکو $s2 = x$ ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي یا بهیر نیسي:

$$s_1 = 30 - x\ ,\ t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$$

$$3(30 - x) = x$$

$$90 = 4x$$

$$x = 22{,}5$$

$$s_2 = 22{,}5km\ ,\ s_1 = 7{,}5\ km\ ,\ t = (22{,}4/90)h = 1h/4 = 15\ min$$

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتونې یا ناپیژندونی په څیر وټاکو، نو بار لري یا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90\ x = 30$

$$20x = 30$$

$$x = 30 / 120 = 1/ 4\ ,\ t = (1 /4)h = 15\ min$$

$$s1 = 30t = 30 /4\ km = 7{,}5km$$

$$s2 = 90\ t = 22{,}5\ km$$

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د $0{,}25\ h = 15\ min$ حرکت وروسته په $7{,}5\ km$ لریوالی یو بل سره مخامخ کیږي

بیلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

یواځې هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځې د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بیلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څیړنه

$$\frac{b^3c^2x - \dfrac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \dfrac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \dfrac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندي پیدا کولو لپاره د مات لاندي ك.گ.خ. تکرار شي.

$$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 . a . b^4 . c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 . 3^2 . 5 . a^3 . b . c$$

$$5400\, a^2b^2c^2 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . a^2b^2c^2$$

اصلي ماتلاندي لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 . 5^3 . a^3b . c^3 = 64.243.124 . a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل خلولو راتول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندي لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندي یې له ځلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅیړو چې مات لاندي یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په ځلونو توټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي: $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$.

اصلي مات لاندي(ا م ل) په لاندي ډول پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاتدی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چې یو یا څو غړي د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کې بندیږي) ، لندونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) &= a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)\\ 2a^2bx-a^2+a^2b^2x-b^2 &= a^4b^2x^2+a^2b^2x+2ab^2x-3b^2-a^4b^2x^2+b^2\\ 2a^2bx-2ab^2x &= a^2-b^2\\ 2ab(a-b)x &= (a+b)(a-b)\\ x &= \frac{a+b}{2ab} \end{aligned}$$

د $b \neq a$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنستیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي(یعني په مساوات کې ځای ورته نه وي). په دې حالت کې د x مطلقه ارزښت د کنونو $a = b$ د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

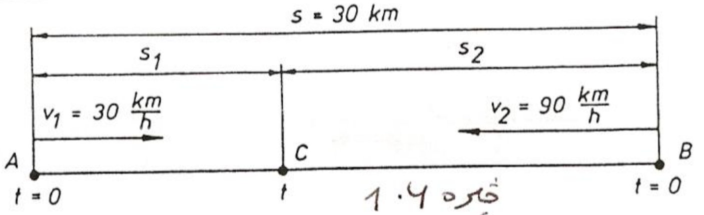
د x لپاره نیول شوې نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. دB څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t اوv سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



څیره ۶ . ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزګاډي D لار s_2) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو s_1 , s_2 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوری ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \;, s_2 = 90\,t \;, s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه پرینښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا درې مجهولې s_2 , s_1 او t دی د درې مساواتو سره چې حل به یې په ۶ الف او یا همداسې په برخه ۱۱ کې ورکړشوې وې، مګر دا دومره ساده دې چې د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چې دا مساوات په یوې مجهولې مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولې x په ځای کیدی شي s_2 , s_1 او t وټاکل شي. که ولیکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنیو دوه مساواتو کې ځای په ځای کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30-x) / 90$$

لاینې ټاکنمساوات د x لپاره دې، چې ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x\ ,\ 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad s_2 = 22{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{7{,}5}{30}\text{h} = \frac{1}{4}\text{h} = 15\,\text{min}.$$

نو باور لري:

که s2=x کیږدو،نو شمیرنه په لانې ډول ځغلي یا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x,\quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30-x}{30} = \frac{x}{90}\,,$$

$$3\,(30 - x) = x,$$
$$90 = 4x,$$
$$x = 22{,}5,$$

$$s_2 = 22{,}5\ \text{km},\ s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{22{,}5}{90}\ \text{h} = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\,\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څیر وټاکل شي، یعني x=t ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$
$$20\,x = 30,$$
$$x = \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\quad t = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\ \text{min}.$$
$$s_1 = 30\,t = \frac{30}{4}\ \text{km} = 7{,}5\ \text{km},$$
$$s_2 = 90\,t = 22{,}5\ \text{km}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15minخوزښت(حرکت) وروسته په 17,5kmکې يو بل سره مخامخ کيږي.

۹ . ۲ تمرينونه

۱ . ناکرښيز يا نالاينيز مساوات د يوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ aاوb نتيجه يې د ازمايئ! د مجهولو ضريبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b يې نه شي غوره کولی يا نيولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره يواځنی حل لري، حل نه لري او يا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رويه د نورو مجهولو ضريبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ ــبې له کسرونو يا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضريبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3\left(6\frac{1}{2}+x\right)-\frac{7}{3}\left(2x-\frac{19}{2}\right)-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴. ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$ b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$ ؛

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$ d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج يا مات لاندې کې يې ناتړکلي ضريبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$ d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2 x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶,۱ ـ کسرمساوات یا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ . شي تمرينونه

۱ . ۷ ۱ – که د یوه ګڼ ځلور ځله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د یوه ګڼ ځلورځله او ۴ زیاتون ددې ګڼ او ۱۴ زیاتون سره برابر وي ، نو هغه ګڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د یوه ګڼ ځلورمه برخه او پنځه ځله ۴۲ ګڼ ورکوي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۴ – که د یوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه ګڼ وویشل شي چې ۴
تربې کم شوی او ۱۱ لاس ته ترې راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟
۱ . ۷ . ۵ – د یوه ګڼ پنځه ځله او د ۳ زیاتو دوه ځله لوی دی لکه د دې ګڼ دری
ځله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟
۱ . ۷ . ۶ – د یوه ګڼ څلورځله او ۱۴ کمون نیم دومره لوی دی لکه ددې ګڼ دوه ځل
او ۸ . دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د یوه ګڼ شپږ ځله او د ۵ کمون یا توپیر چې ددې ګڼ په څلور ځله او ۵
زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نومیږي؟
۱. ۷ . ۸ – د یوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او
مات لاندې په ۸ لوی شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته
ترې راځي. دا ګڼ څه نومیږي.
۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسې په دوه ګڼونو بیل کړی یا تجزیه یا توته کړی، چې د مربع توپیر
یې ۱۲۵ شي.
۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یې ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نومیږي؟
۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسې تناسب کې دي، یا یو بل ته داسې ځانونه نیسي .
که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتی یې ۷ دي.
دواړه ګڼونه کوم دي؟
۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاینیونکي ګڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي،
نو یو دوه ځاینیونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځایګڼونو سره مګر په
څټ ترتیب سره.
۱ . ۷ . ۱۳ – یو زدکړی غواړي د یوه ګڼ څخه مربع ریښه د یو په بل کې بندولو
پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو ګڼ د ریښې په خیر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکي، چې مربع یې په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه ریښنه ټاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ریښني مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ریښنه یې غواړو پیدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – یو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړۍ ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسې حال کې چې نورو ډلې 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول 2 / غړي په بر کې نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلې څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – یو نفر په درې ورځو کې مجلې په داسې شمیر خرڅوي: په لمړۍ ورځ 1 / 9، دومه ورځ 1 / 6 او په دریمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمایي دوه کمي د ځان سره لري. هغه څومره مجلې د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – یوه میلمه د یوه زدکوونکې څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« ځما پلار چې درې میاشتې پخوا یې خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، ځما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زیات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د یوه زدکوونکي پلار څلورنیم ځله زوړ دی لکه د هغه ځوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د یو اویاکلن نیکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په یوه معما کې یو زدکوونکی د ې بل ته وایي: « که زه لما سره بټوه کې پیسو سره ۵،۲ افغانی ور زیاتي کړم ، زیاتون یې له ۵ سره ځل یا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا توپیر په 11 وویشم نو نتیجه یې ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کې څومره پیسی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسی تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوي دي،
دریم دوه ځله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي
مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اومیګا) ، په دې پروت شپانونک
۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) یوګونی مقاومتونه څومره لوي دي، ب
برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۲۰.۷ – د دوه غبرګ چالان عمومي مقاومت (ماته متأسفانه په افغانسان کی د
فزیك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چي په هدف به پوه شو) دی
a) 1000Ω , b) 2000Ω
یو مقاومت4000Ωدی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت a) $12k\Omega$, b) 300Ω وي؟

۲۱ . د دري غبرګو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت الف) $12k\Omega$
ب) 300Ω وي؟

۲۲ . په اوبو کي یو د لرګي منډه باید څومره لوي وي، چي د لمبیدو استعداد
یی ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرګي خاص وزن یا کلکوالی (د فرمول څخه
معلومیږي چی دا څه شی دی) $4\frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوډ د سونګ مواد لري.
څومره تیل او څومره بتزین په ټانك کی موجوددي که ګډونه یی وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي.
دا چی د مخه خرکړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په
سرك بیا ۲۰ ونی زیاتی کیښنول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته
څومره لویي دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵
کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی
متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کی ، دا وروسته وهونکی د پروسېرکلني وهونکی څخه یوه نیمه
دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړي
چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره
ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په
ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي.
برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو
وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ
سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ کومبيناتوريك - د بينوم جمله

کومبيناتريک څخه په شميرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې يو ګڼ ، پل ځاي بدلو
ځومره والبشابې او که څو ګنونهخپل ځاي بدل کړې دا ځنګه ليکل کيږي۰ د ځای بدلون
شميرنه ده
او د هغې ډولونه۰
په ۱۰۱۰ او ۲۰۱۰ برخو کی به د شميرپوهنی مرستندوي مواد د بينوم
جملی(۳.۱۰)
برخه(او کومبيناتوريك (۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتيت کليمي او بينوميالکوايفيځينت
(بينوم ځلوني) پيل شي .

۱۰ . ۱ فاکولتيت Die Fakultät, factorial

پيژند ۱۰ . ۱ :
د !nسومبول (ويل کيږی n « فاکولتيت «) لاندې سړی له1 تر n پورې ګڼونو ضرب
پوهيږي، يعنی $n! = 1.2....(n-2).(n-1).n$ برسيره پر دې تعريفوو: $0! = 1$

د فاکولتيت له پيژند څخه ځرګنديږي، چی $(n+1)! = n!.(n+1)$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:
په افغاني ادبیاتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتیت په ځاي فاکتوریال لیکل شوی. ما په دي کتاب کی دا د الماني کلیمه یا پښتو ، ځله وونی،، زیات کاره ولی، هیله ده چی تاسو به یی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی۰

بیلګی :

الف $n!$: د $n = 5$ لپاره په دې ډول دی: $5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$

ب : په دې ډول دی : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$

پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بینوم ځلووني یا ضریبونه

پیژند: ۱۰ . ۲

د سیمبول $\binom{n}{k}$ (وییل کیږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهیدل کیږي چی هر یو k ځله وونی یا ضریبونه یا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k}\frac{n+1-i}{i}$$

برسیره پر دې دا هم په کلکه کره کیدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ يو پيدايښتي يا طبعي ګڼ دی او د ماتلاندې او مات باندې ګڼونو ګڼون يا تعداد ښايي،په مات لاندې کي د لومړيو k پيدايښت يا طببعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رييل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور1 - n ، دريم n-2 تر k –م

فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اويلر(leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سويسي ګڼپوه، فزيکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړي ځل لپاره پيل شو، له دې امله ورته د اويلر سومبول وايي پرتله يا مقايسه برخه ۱۰ . ۳ (. که څوك ديوه

بينوم پوتنځ يا توان شميري) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سيمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چی د يوا-
ځنيو زياتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بينوم ضريب يا بينوم ځله ووني ويل کيږي.

بيلګی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{،} \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعريف نه دی ، ځکه چی 1 / 3 پيدأيښتي يا طبعي ګڼ نه دی.

د بينوم ضريبونو يا ځلونوخويونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ - د n<k ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$

که n یو طبعي ګڼ وي او له k کوچنی وي، نو صفر په ماتباندې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سرِی د !(n-k سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k ولیکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کڼې اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په څیر ولیکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون ګډ فاکتورونه چی په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ۱ افاده یا وپینه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله ووني په څير ولیکل شي، لاندې بینومیال یا بینوم ځلوونی (ضریب) تعریفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بینوم جمله

د بینوم لاندې سړی د دوه توکو (ګڼونو) زیاتون پوهیږي. یعني: x+y
د بیونم جمله موږ ته ښايي چی څنګه د یو بینوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چی پیدایښتي ګڼ n یی ایکسپوننت یا جکګڼ یا لنډ جګ وي، د زیاتون په څير پر مخ بیول کیږي. که د x + y بینوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اکسپوننت لپاره شمیرو، نو لاندې نتیجه لاس ته راوړو :

پاسکال دریګوډی

$$(x+y)^0=....................1$$
$$(x+y)=..................x+y$$
$$(x+y)^2=..............x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=............x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=.........x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5=....x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې د زیاتونونو پرمخبیولوکی یو قانونیت لیدل کیږي. د زیاتونو ګڼون(شمیر، تعداد) د بینوم د اکسپوننت څخه په یو لوي دی . ټول زیاتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په داسی ډول چې د x اوy پوتنځ زیاتون په n برابریږي او په دې ډول د x پوتنځ په کمیدلو) د y پوتنځ په زیاتیدلو دx په اکسپوننت په ترتیب پرلپسی
n , n-1, ...1 , 0
د yاکسپوننت په ترتیب 0,1 n-1,n..,دي. د بینوم پوتنځ کوایفڅینتونه داسی په
نامه پاسکال Blaise Pascal(۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه(ګڼوندریګوډی جوړوي .

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&2&&1&&&&&\\
&&&&1&&3&&3&&1&&&&\\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&&\\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&\\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&\\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}
$$

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کیڼ-ښي پرتوګڼونوزیاتون دی، چې بي له کړاو د نورو اکسپوننتویا په جګو n = 7,8, ... لپاره پرمخ بیول کیدی شي. د ډیرو لویو اکسپوننتو n لپاره بیا هم دالار له کړاو ډکه ده لیونارد اویلرLeonhard Euler د کومبیناتوریك فکرونو کی د کوایفیڅینتونو یووني یا یوونوالي یا بهتره یوونوالیز ستروکتورونه یا جوړښتونه وپیژندل. په n -م n (د بینوم جګ یا اکسپوننت (لیکه اوK- م ځای، n ...., 1 , 0 = k کی ولاړ ضریب دفورم څخه دی) له کومه امله چې په ۱۰ . ۲ برخه کی د اویلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بینوم ضریب په
څیر رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دریګوډی د اویلر سومبول استعمال په څیرولیکل شي نو لاس ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داويلر سومبول کی د فاکتور پرځاي ، چې ګڼونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ ليکل کيږي.

يادونه : ما کله a,b او کله بيا x,y ليکلي، دا په يو ډول ليکنه ښکلې ښکاريږي، خو زه کله کله داسې ستونځې لرم .

په ۱۰ . ۲ برخه کی د بينوميالکوايفيځينت لپاره ښوول شوو خويونو ۲ په بنسټ د پاسکال دريکوډي منځنی محور ته سيومتري پراته کوايفيځينته سره مساوي دي. داچی هر کو- ايفيځينت ورباندې پورته کوايفيځينتونو زياتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو) د تمرين وظيفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله) مقايسه(شي) د اويلر سيمبول په استعمال

د يوه بينوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زياتون پرمختک د يوه طبيعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول ليکلو ته اجازه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۱ (د بینوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندوکشن پیل : (n = 0)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ایندکشن نیونه : (n = k)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n$$
$$+ \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دایندکشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$
$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k$$
$$+ \binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کږې پرتې) برابر پوتنځ یا توان ځلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونخویونو د استعمال له لارې سره راټول (یوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{0} = \binom{k+1}{1}, \binom{k}{2} + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{2}, \ldots, \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = \binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوې اړیکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}, \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بینوم له جملی د یوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}(-b)^i$$

بیلګي:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

۱۰ . ۴ کومبیناتوریك:

کومبیناتوریك د یوې ډیرۍ د پای غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخي یوځاییولو په څیر راوړل شي، په یوځاییولو کی کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنګه په راښوځاییولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي د غړو تکرار راشی او یا هم نه. له دې امله د یوځاییولو یا ټولګی دري ډولونه توپیروو(Komplexion هم ورته وایي)، په نامه پرموتیشن، واریشن، کمبینیشن (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چي په لاندې برخو کی یو په بل پسی څیړل کیږي او په اخرنی جدول کی به لیدیونکی څرګند شي یا لیدوړو ښوول شي

۱۰ . ۴ . ۱۱ **پرموتیشن**Permutare
(لاتین: ..سره بدلول، دلته دا اصلآ ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پیژند ۱۰ . ۳ :
د n غړو یو پرموتیشن (ځاي بدلون)بې له تکرار داسی »یوځاي درول« دي، په کوم کی
چي n غړي په یوه د زړه پوري ترتیب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتیبونه
ټل د مختلفو پرموتیشنونو یا ځاییدلونونو په مانا ده
بیلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتیشن

الف : 2 1 دی 12 21

ب : a , m دی a m m a

۲ - د درې غړو پرموتیشنونه
الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایي ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیداینتي ده، چې د پښتو لیکسیکایي ترتیب پچه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کښ کښته لور ته بیا بیرته پورته

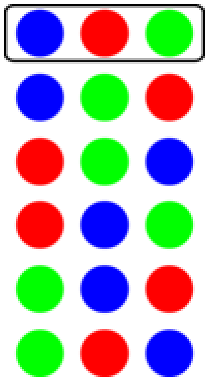
amsu	masu	samu	uams
amus	maus	saum	uasm
asmu	msau	smau	umas
asum	msua	smua	umsa
aums	muas	suam	usam
ausm	musa	suma	usma

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ (ا ت ج ک دي:دلته طبعآ له ښي وکيڼ لورته ترتيبيږي(

اتجک	تاجک	جاتک	کاتج
اتکج	تاکج	جاکت	کاجت
اجتک	تجاک	جتاک	کتاج
اجکت	تجکا	جتکا	کتجا
اکتج	تکاج	جکات	کجات
اکجت	تکجا	جکتا	کجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلګی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دي مانا چی د ليکسکا لغاتو ترتيب ته »کتِ مبِ« (ورته) دی، چی د غړو پيدايښتي لړی مخته پرته وي (په تورو، په ګڼونوکنطبعی يو په بل پسي). دبيلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دې غړو) يا تورو(جوړ شوي پرموتيشنونه) لغاتونه(maus همدا رنګه saum په دې ترتيب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ (کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ک پرموتيشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی يي تاکج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی يي جتاک ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته دريِ غونډارو لپاره نظم يا ترتيب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

كه ليكو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي ليكو :720 = !6

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتيشنونو Pn ګڼون (شمير يا تعداد) ، د n يوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $P_n = n!$

اوبنونه : د پوره ايندكشن له لارې :

دايندكشن پيل : $(n = 1): \quad P_1 = 1! = 1$

د ايدكشن نيونه : $(n = k): \quad P_k = k!$

د ايندكشن غوښتنه : $(n = k+1): \quad P_{k+1} = (k+1)!$

د ايندكشن ښوونه : k غړو ته په !k پرموتيشنونو کی د ځل په څير يو(k+1) -ام غړی راځي. دا (k+1) - ام غړی كيدی شي له لومړې تر (k+1) - ام ځاي پورې ودريږي، داسی چی د (k+1) -ام غړي ورنيولو د هر k غړو پرموتيشن k+1 پرموتيشنونه د k+1 غړو پرموتيشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\,(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بيلګه :

په څومره مختلفو لړيو پرلپسی (دا مرضوع په ۱۸ برخه كې كتلی شئ) کی لس زدكوونكی په يوه ليست کی خپل نومونه ليكلی شي ؟

اوبی يا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ •

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتيبونه، د کومو څخه چی i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کيږي،

د i = 1 , 2 , ... ,k لپاره، نو پرموتيشن د تکرار) د تکرارسره پرموتيشن(سره نوميږي . د غړو شمير په پرموتيشن کی بيا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

بيلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتيشن په کوم کی چی غړی a يو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کيږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دې ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړوa , b پرموتيشن، په کوم کی چی a دوه ځله، غړی b درې ځله رامنځ ته کيږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندې ډول دی

abbba abbab ababb aabbb
babba babab baabb
bbbaaa bbaba bbaab

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتيشن ګڼون يا تعداد $P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)}$ ، له کومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کيږي ، په لاندې ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه يا اوبيونه: که په پرموتيشن کی n = n1 + n2 + ...+ nk (دلته دې ګڼونه دn اينډکس کې ومنل شي) غړو يو له بل توپير لرودی (مختلف وي) ، نو n! پرموتيشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچی د ni غړو لپاره ni! پرموتیشنونه موجود دي، نو ni پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څیر رایو ځاي کیږي،

دا په دې مانا چی د!n شمیر په $n_i!$ باید وویشل شي (i = 1 . ..., k)

بیلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کی چی لومړی (n_1-1)- ځله او دویم (n_1-2)- ځله رامنځ ته کیږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دویم (n2 = 3) -ځله رامنځ ته شي، دی

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ وارییشن اوښتنه یا بدلیدنه Variation :

تعریف ۱۰ . ۵:

د n غړو واریشن (بدلیدنه یا اووښتنه Variation) لاتین(بدلونه اووښتنه تغیرونه یا بیا تغیرونه) و k -ام ټولګي ته(وهرې k ټوټی ته، n ≤ k) هر له k غړو یوځانکول (یوځاي درول، یوځاي لیکل) دی، کوم چی د n غړو د لړۍ پرلپسی په نظر کی نیولو سره جوړیږي..

بیلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c وارییشن و دویم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ab	ba	ca
ac	bc	cb

۲ - د څلورو غړو d , a , b , c واريیشنونه و۲ - م ټولګي ته دي:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

د څلورو غړو d , a , b , c واريیشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دې

dab	cab	bac	abc
dac	cad	bad	abd
dba	cba	bca	acb
dbc	cbd	bcd	acd
dca	cda	bda	adb
dcb	cdb	bdc	adc

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واريیشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

51	41	31	21	12
52	42	32	23	13
53	43	34	24	14
54	45	35	25	15

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو واریشنونه و n -ام ټولګي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا برابر کيږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو و k -ام ټولګي ته د واریشنونو ګڼون (تعداد) $V_k^{(k)}$ دئ :

$$V_k^{(k)} = n(n-1).(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبنونه : د مکلمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې) ایندکشن په k اړه لري، n ځاي په ځاي دئ یا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ایندکشن پیل :(k = 1)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټیك (صحیح) دئ ، ځکه چې له n غړوکیدی چې له یوه غړی جوړ واریشنونه جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : (k = k0) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت:):(k0 +1 = k)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دایندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واریيشن لپاره، په دې واریيشن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی n - k0 غړو شمیر دی .که په ترتیب یو له دې n - k0 غړو د دې k -م ټولګی واریشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې يو دk+1 ټولګي n - k0 واريشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واريشنونو $v_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واريشنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0) = \frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چيرې يود n - k0 غړو ورزيات په يو بل ځای کيښوولی وی، نو يودk+1 ټولګي واريېشن به يی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دئ. دا سړی په بيلګه ۲ (k , 2 = n = 4, k =3 (باندې ليدوړ کولی شي)

بيلګي:

۱ - د درې غړو واريېشنونو شمير و دوم ټولګي ته دی :
$$v_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

۲ - د څلور غړو واريېشنونو شمير و دوم ټولکی ته دئ:
$$v_4^{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

د څلور غړو واريېشنونو شمير ودريم ټولګي ته دئ:
$$v_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

۳ - د پنځه غړو واريېشنونو شمير ودوم ټولګي ته دئ:
$$v_5^{(2)} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

پيژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واريېشنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی يوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واريشنونه د تکرار سره نوميږي يا بلل کيږي.

بيلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واريېشنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

aa ba ca

ab bb cb

ac ba cc

۲ - څلور غړو a , d , c , b د دويم ټولګۍ واريېشنونه د تکرار سره دي:aa
ba ca da

ab bb cb db

ac bc cc dc

ad bd cd dd

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دريم ټولګي واريېشنونه دي(دا لاندې ولاړ ترتيب له كيڼ وښي لور ته دی، خو په لاندې كې په څټ شوی)

111 211 311
112 212 312
113 213 313

121 221 321

122 222 322

123 223 323

131 231 331

132 232 332

133 233 333

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام ټولګي د واریيشنونو شمیر $V_{W_n}^{(k)}$

$V_{W_n}^{(k)} = n^k$ د تکرار سره دی: $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل (k = 1) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحبح دی، ځکه چی له n غړو څخه n واریيشنونه،چی هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه (k0 = k) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه (k0+ 1 = k): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د (k0 + 1) -ام درجی واریيشنونه د nk واریيشنونو چی k0 – امه درجه واریيشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چی له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دې، چی په واریشنونو بی له تکرار شوې ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمیر $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ واریيشنونه دی.

بیلګي :

۱ - د درې غړو و دوم ټولګي ته د واریيشنونوشمیر له تکرار سره دی

$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$

۲ - د څلور غړو و دوم ټولګی ته د واریيشنونو شمیر له تکرار سره دی

$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د درې غړو و دريم ټولګي ته ض واريېشنونو شمير له تكرار سره دی

$$V_{W_3}^{(3)} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښی يوځای کيږي.

د يوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښنو شمير دئ

$$V_{W_2}^{(1)} + V_{W_2}^{(2)} + V_{W_2}^{(3)} + V_{W_2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ كمبينيشن (Kombination (لاتين: يو بل سره تړل)

تعريف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته (n > k) يو کمبنيشن هغه دئ چی هر يو له k غړو يوځاي دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نيولو سره، جوړوي.

کمبينيشن له واريېشن منځ ته راځي، که چيری نظم په پام کی ونه نيول شي.

بيلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبينيشن په لاندې ډول دئ:

ac bc

٠٠٠٠٠ ac

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبينيشن په لاندې ډل دئ

ab bc cd

٠٠٠٠٠ ac bd

٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ ad

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې څلو غړو ودریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي:

bcd abc

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي(لاندی هم باید له کینې لاندې لورته په ښی لور لیکل شوي وی)

345	234	123
	235	124
	245	125
		134
		135
		145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اوریېشنونو شمیر دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبینیشنونه له واریېشنونو په دې توپیریږي، چی ترتیب په نظر کی نه نیول کیږي، دا بیا دا مانا لري چی ټول د k غړو k! پرموتیشنونه په یو کمبینیشن کی یوه ته یوځاي کیږي

.له دې امله لرو :
$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبينشنونو شميريا ګڼون دئ

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبينيشنونو شمير دئ‌د څلورو غړو و دريم ټولګي ته د کمبينيشنونو شمير دئ

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودريم ټولګي ته د کمبينيشنونو شمير دئ

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمير دئ

الف (يو شپږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : يو څلور $C_6^{(4)} . C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تيپ عددونه د يوه ۴ عددونوګروپ څخه بوځاي کيږي، چی له ايستل شوو شپږ عددونو (۴ تيک يا صحيح) او دوه عددونه(۲ پاتی عددونه) دي .

پيژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبينيشن، په کوم چې يواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبينيشنونه د تکرار سره نوميږي.

بيلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دويم ټولګي ته د تکرار سره کمبينشنونه دي.

aa ················

bb ab ······

cc bc ac

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دويم ټولګي ته د تکرار سره کمبينيشنونه دي

aa ·······················

bb ab ················

cc bc ac ········

dd cd bd ad

۳- د درې غړو 1 , 2 , 3 و دريم ټولګي ته د تکرار سره کمبينيشنونه دي(لاندې ليکنه بايد له کينې لور پيل وی، خو دلته له ښی لور پيل شوی وکينې لور ته)

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تكرار سره د كمبينيشنونو شمير يا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونې(چې په kد پوره ايندكشن له لار ې صورت نيسی) تير شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دويم ټولګې ته د تكرار سره كمبېنيشنونه ګڼون يا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دويم ټولګې ته د تكرار سره كمبېنيشنونه ګڼون يا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دريم ټولګې ته د تكرار سره كمبېنيشنونه ګڼون يا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مكعبونو ، چې اړخونه يې د يوه تر شپږ نخښه وي . (نخښه شپږ اړخيز) ممكن مختلف اچول ، په دې مانا چې كومې سترګې سره لوېږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،واریيشن،کمبینیشن ټولګه

دااا	د په پا یوې برخی راټولونه م کی نیولو شوو غړو		د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه
	له نظم تیریدنه	نظم په پام کی نیونه	
	کمبینیشن	واریيشن	پرموتیشن
د ټول غړي یوله بل توپیر لري	د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	د n غړو واریيشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$	دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګڼون $P_n = n!$
له تکرار سره	د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$	د n غړوواریيشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)} = n^k$	د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,...n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ – لاندې فاکولتی وشمیری

الف) 7! ، ب) 3!.5! ، پ) 6! / 4!.I0!

۲ – لاندې ویشونه ساده کړی

a) (n+1)! / (n-2)!   b) (2n)! / n!   c) n! / 2n!

۳ – لاندې افادې وشمیری!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\frac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زیاتونونه وشمیری!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونی (استعمال) په بنسټ وګټی!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2 - y/3)^4$ e) $(2\ \ a+3\ \ b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده کړی!

a) $(-1+a)^2-(1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

c) $(\ \ ab-1)(-a-\ \ ab)+ab$

۷ – د بینوم په یو شکل یې بیل (تجزیه) کړی!

a) $25a^2+10\,ab+b^2$ b) $(49a^2-42a+9$

c) $169a^2-130\,ab+25b^2$ d) $2x+2.\ \ 6xy+3y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – الف) د غړو ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ پرموتیشنونه په لکسیکوگرافي نظم ولیکی!
ب) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو ځایونو کی« fahne » او« hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر» دي.

۹ – الف) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟
ب) څومره پنځۀ ځیفري ګڼونه د پنځه ځیفرونو4 ,3 ,2 ,1 ,0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟
پ) د غړو a,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ – الف) د غړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکی، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.
ب) د دې پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګڼی!

۱۱ – څومره تنظیم شوي جوړې د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ – د څلورم ټولګي څومره مختلف واریېشنونه د
الف) بې له تکرار
ب) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟

۱۳ – یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرځونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دي. څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو ځل سوری شي؟

۱۴ – له شپږ غړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دی،
الف) بې له تکرار
ب) له تکرار سره؟

۱۵ – یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ – څومره مختلفی ازمایني ممکن دي که په یوه تولید کی له هر ۲۰ یوه وازمایل شي؟

۱۷ – په موټرو ترافیك نخښي په لاندې توګه یوځای شوی : یوه د ځای نښونه ډله د
نخښي الف بی پسی څلور ګروپ یا ډله راځي، چې له څیفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ
وي. د یوې کره ټاکلی الف بی پیژندنښی یا ترافیکی نخښي ممکن دي؟

۱۸ – د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه ، د رنګونی له لارې یو له بل توپیریدی
شي ، که څلور رنګ نښوني ولرو؟

۱۹ – د منډې یوه میچ په اخرکی شپږ پاتی منډې وهونکی برخه اخلي. د منډو څومره
امکانات موجود دي؟

۲۰ – په څومره ډوله

الف) اته مختلفی مرغلرې،

ب) درې سرې، څلور شنی، یوه زرغونه مرغلره

ترتیبیدلی شي؟

۲۱ – څومره تلفونونه کیدی شي وټړل شي کی یواځې پنځه ځایزه نمره موجود وي؟
څومره تلفون ټړل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځایزې وي او په 0 پیلکیدنه یی
اجازه ونه لري؟

۲۲ – د درې شپږسترګیو (یا –اړخیزو) سره (څیره مکعب دی اومخونه له یوې تر شپږ
سترګو باندې په نخښه دي، ماته یې د پښتو نوم نه راځي او االماني یی Würfel
دی) څومره مختلفی اچونی ممکن دي، چې ټولې شپږسترګې مختلفې سترګې ګټون
وښایې؟
څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګیو سره ممکن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چی څه به تکرار وي، خو هغه لاتین متل دی، چی » تکرار د زدکړې مور ده .«
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چی n اووښتونې یا مجهولی یا ناپیژندونکی لري، وقف ده، چیرته چی m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی شي
په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر څیړنی لاندې نیول کیږي، چی د ښوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي، چی د حالتونو توپیریدنه یي اړیینه ده۰
دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی درې ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نیسي۰
یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ د برابرونونو له څيرې پوهيږو، چۀ دا يوه کرښه ورکوي، چې لاتين يا کۀ غواړئ انګريزي يې لاين نوموليٰ. د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسې منځپانګې سره يې توپير وي،نو موږ هم ورته له دې امله لاينيز وايو.

۱۱ . ۱ . لاينيز برابرون د دوه ناپيژندونکو سره

داسې يو مساوات د دوه ناپيژندونکو سرهکيدي چې په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11.1)$$

دلته کيدی شي چې ناپيژندونکی لويي x او y په خوښه رييل ګڼونه وي چې يو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. يا په بل عبارت : x او y واريابلی(اووښتونکی يا لنډ: اووښتونې) دي، برابرون (۱۱ . ۱) لاينيز فنکشن(بلواک) برابرون په ګوته کوي چې د هغي څيره په y,x کواوردينات کی ناپای کرښه ده(۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)

ځانګړی حالت : a = 0 يا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي يا په ګوته کوي چې د y - محوراو همداسې د x - محور سره غبرګه د ه .

که دا (۱ . ۱۱) برابرون د دواړو نايژندونکو يا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات يا ټاکنبرابرون ونيول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ددې مسئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهيدل غوښتونکی وي.

د (۱۱. ۱) برابرون اوبيونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x ,y) ډيری ده، چې(۱۱.۱) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱) د y په لور داسې ځوابوو.

$$y = -(a/b)\,x + c/b \qquad (11.2)$$

کيدی شي چې x په خوښه وټاکل شي اوy له (۲ . ۱۱) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چې ناپاي ډيرې اوبيونې يا حلونه لاس ته راځی يعني د اوبيونې ډيری يا اوبيډيری L په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = -(a/b)\,x + c/b \} \qquad (11.3)$$

داسې لوستل کيږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډيری ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون).

ددې لپاره لنډ ليکل کيږي: د (۱۱ . ۱) برابرون اوبی يا حل $y = -(a/b)x+c/b$ ،د خوښی x .

(c) ketabton.com: The Digital Library

طبعآ کیدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نیسو، نو د لته د برابرون (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښهy ۰

دا چي په لاندې کی مور د دریو یا ډیرو ناپیژندونکو یا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپیژندونکي د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, ...$ سره .

ددې په نخښونو سره کیدی شي چی په څرګند ډول وښایو:

لاندې برابرون د دوه ناپیژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, ...(11,4)$$

د 0 =| a لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دې مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپیژندونکو یا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کیښوول کیدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, ...(11,5)$$

په خوښه x_2

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; ....(11,6)$$

x_1

په خوښه

د 0 = b =0.x1+ 0.x2) 0 = b = a1 =a2(لپاره ناپای ډیر ځوابونه

د په خوښه

$$x_1, x_2, ...(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$$

لپاره

$$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$$

په ښتوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.

نوټ : دلته

$$\infty^i$$

دا مانا لري چې د ناپیژندونې یا مجهولی

$$x_i$$

لپاره i = 1,2.. په خوښه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاینیز برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سره

د دوه برابرونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1a_{12}x_2 = a_1$$

$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;..................(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کیدی شي چې په اووښتونو یا واریابلو x 1 اوx2کی د بلواکبرابرون یا فنکشنمساوات په ځیر ونیول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښې یو بل غوڅې کړې نو دا د مساواتو په سیستم (۸ . ۱۱) کی د کرښو یوګونی(بهتره : یوګونی، یوائځنی د بل ځه لپاره کارول شوی) اوبیونه ده یا حل دی.

که دواړه کرښې یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چې د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخې ټیك یا فقط مساوات I یا مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډیر

$$\infty^1$$

ځوابونه موجود دي.

داسي هم کیدی شي چې فورمال

$$\infty^2$$

رامنځ ته شي، که ټول

$$a_{ik} \wedge a_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څېړو. دا څېړو چې، که دا برابرون اوبیونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کیږي، چي کرښه I اوکرښه II غبرګي ځغلي مګر یو په بل نه وي پرتی.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپیژندونکو یا اووښتونو سره، کیدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - یو یواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دی (اصلي حالت)

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دی پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لري)

۳ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابره دی)

۴ - ناپاي ډیر ځوابونه موجود دي.

(ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي)

د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپیژندونکی لري، کیدی شي په اسانتیا وپیژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دی.

په سیستمونو کی چي درې یا زیاتي واریابلی یا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پیژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنکه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پیل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پیدا کړو. دلته باید دري بنسټیز د مساواتسیستم د ځواب کاردودونه)متودونه(تکرار شي:

۱ . د برابر یا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

دواړه برابرونونه د یوې نامعلومی په لور اوبی کیږي(د بیلګي په توګه د x دوه په لور(، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابرون د یوې نامعلومي سره منځ ته راځي۰

۲ - یو د بل پر ځاي کینولو متود:

برابرون یا مساوات د یوې ناپیژندونکې (د بیلګي په توګهx دوه) په لور ځواب کیږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کیږي، په دې ډول د یوې ناپیژندونې برابرون منځ ته راځي (د بیلګي په توګه دx یو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سرې یو ټاکلی څو برابره (کیدی شي چې کمیز یا منفي هم وي) د II د I برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسې چې یوه ناپیژندونی بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نیتجي سره بیا دا بله ناپیژندوني څیړي. دا د داوړو نامعلومو(ناپیژندونو) لپاره کیداي شي . دا متود دبرابرونونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چې د دیترمینانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .
دا متود په درې ځانګړو برابرونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول څلورځلوني(ځله ووني یا ضریبونه) بایدله صفر توپیر ولري یعني $a_{ik} \neq 0$ که چیرې یو $a_{ik} = 0$ د بیلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د دریګوډي جوړښت لرودی:

$$I.............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;......a_{11} \neq 0$$
$$II.....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;..........(11,9)$$

دلته نو
$a_{21} = 0$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجي څخه یي چې په I کې کښیښودل شوې وی x_1 هم معلومیدی شو. دلته دا په ګوته کوو چې د ګاوس الګوریتم په استعمال بیا برابرون د دریګوډي شکل باندې اړول کیږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :

سیستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4
II x1 - 2x2 = -5

دا سیستم یواځنی یوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړیکی نه لري

سیستم ۲

2x1 + 3x2 = 4
II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانۍ ګورو چې دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دێ . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښایی او په دې ډول د مساواتو اوبیونې ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بي ډیله څرګنده ده چې برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په څټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چې II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$

$$-(7/2)x_2 = -7$$

$$x_2 = 2;\Rightarrow$$

$$x_1 = 2-(3/2).2$$

$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځاي کینولوکاروونه (عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کی ځاي په ځاي کیږي٠

$$II':;.........x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$

$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ) د زیاتونکاروونه: x_1له منځه ځي، که (-2) ځله د II برابرون و I ته زیات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I:................2x_1+3x_2=4$$
$$(-2)II:........-2x_1+4x_2=10$$
$$I-2II:....................7x_2=14$$
$$..................................x_2=2$$

کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II څخه x1 وشمیرل شي:
$$x_1=2x_2-5=4-5=-1$$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي
x2
له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$$2.I:............4x_1+6x_2=8$$
$$3.II:............3x_1-6x_2=-15$$
$$---------------------$$
$$2.I+3.II:........7x_1.........=-7$$
$$........................x_1.............=-1$$

یادونه : په پورته کې یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته اینسول کیږي، پوهیږو، چې چیرته ټکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :
سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف (مساوي اینوولو:
I' : x1 = 2 -(3/2).x2
II': x1 = 2 -(3/2)x2
2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x
0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته
x2
په خوښه. دا په دي مانا چی
x2
هر ارزښت نيوی شي ۰ له 'I ښخه ناپای ډير ځوابونه لاس ته راځي
$x1 = 2 - (3/2)x2$ او x2 په خوښه.

ب) د بل په ځاي ايښوولومتود: $I' \quad x1 = 2-(3/2)x2$,
په II کی ايښول کيږي

$$II' \quad 4.(2-(3/2)x2) + 6x2 = 8$$
$$8-6x2+6x2 = 8$$
$$0.x2 = 0 \quad x2$$
په خوښه له 'II لاس ته راځي
$I' : x1 = 2 - 3/2\ x2$ x2 په خوښه

پ) د زياتون متود يا لار يا طريقه:
$$2.I \quad 4x1 + 6x2 = 8$$
$$II \quad 4x1 + 6x2 = 8$$
$$II - 2.I : \ 0x1 + 0x2 = 0$$
که يواځی دا مساوات په نظر کي ونيول شي ، نو x1 او x2په خوښه ټاکل کيدی شي، دا چی د x1 او x2 ترمنځ په I يا II کی ورکړ شوي اړيکي دي ، نو يواځي يوه ناپيژندونکو په خوښه ټاکل کيدی شي . ځواب داسی دی:
$$x1 = 2-(3/2)x2$$
x2په خوښه
په همدې ډول:
$$x2 = 4/3 -(2/3)x1 ,$$
دلته x1 په خوښه ټاکل کيږي

بيلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$$I': \quad x1 = 2 -(3/2)x2$$
$$II': \quad x1 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$0.x2 = 1/ 2$$

دا یو په ځېوالی یا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو رییل ګڼ x2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي لیکلو عملیه: $I': \quad x1 = 2 - (3/2)x2$,

په II کی دی په ځای شي

$$II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$$
$$8 - 6x2 + 6x2 = 10$$
$$0.x2 = 2$$

دا مخامخوالی یا په ځېوالی یا تضاد دی ، پس ځواب نه شته.

پ) د زیاتون متود:

$$2 . I \quad 4x + 6x = 8$$
$$II \quad 4x + 6x = 10$$

$$2.I - II \quad 0.x + 0.x = -2$$

په ځېوالی یا تضا د دی ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پېښتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم یا بڼه برابرونسیستم ورکړ شوی:

$$I \quad x /(a+b) +y/(a-b)$$
$$II \quad x /(a-b) +y/(a+b)$$

دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $a =| b$ او $-a =| b$ وي، یعنی $|b| =| |a|$ وي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود تړلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کیدی شي.

لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:

د I ځل له $1/(a+b)$ او II ځل له $-1/(a-b)$ څخه وروسته دا لرو:

$$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$$

$$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$$

له دې سره د y دواړه ځله ووني یاضریبونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په ځنډ) نخښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توګه مو یو برابرون د یوې ناپیژندونکی سره مخ ته پروت دی:

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له $1/(a+b)$ او IIله $-1/(a-b)$ سره ځل شي کیدی شي: چی y په ورته ډول وشمیرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومی چی څموږ د څیړنی لپاره بي مفهومه دئ.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو څیړو چی کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات) * (تر څیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

.1 a = 0 , b |= 0

مساوات)*(داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

. 2 a |= 0 , b = 0

برابرون(*)(په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په ښتوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو , $y = a - x$ دلته x په خوښه دئ

3 . $a=b=0$

دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دئ.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د $(3x-2y)(2x-3y)$ سره ځلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي x , y راپیدا کړو . موږ ځاي پر ځاي کو

$$u=1/(2x-3y)\ ,v=1/(3x-2y)$$

او لاس ته راوړو:

$$11u+18v=13 \iff 11u+18v=13$$

$$27v-2u=1 \qquad -2u+27v=1$$

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$$33u+54v=39$$

$$4u-54v=-2$$

$$37u=37$$

$$u=1 \Rightarrow v=1/9$$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$$1=1/(2x-3y) \iff 2x-3y=1$$

$$1/9=1/(3x-2y) \iff 3x-2y=9$$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $x = 5$, $y = 3$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ . ۱ . ۳ دویمه درجه دیترمیناتې او د کرامر قاعده

که په ټولیزسیستم(11.8) باندې د زیاتون متود استعمال شي، نودx2د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{12}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ (وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - _{21}.I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, ...(11,12)$$

که د ارزښتونه په (11 . 8) کی ځای په ځای شي نو تصدیقیږي، چی(11 . 12) په ریښتینی د (11, 8) ځواب دی. له (11 . 10) تر (11 . 12) سړی په واقعیت یا رښتونی کی د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي(لارښودوي.)

پیژند ۱۱ . ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه ریبلو ګڼونو $a_{ik}, (i,k = 1,2)$ د د ۲ -امه درجه دیترمینانت لاندې ، لاندینی ګڼ پوهیږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; ....(11,13)$$

د اصلي دوه کونجتړي یا دیاګونال (قطر) د توکوځل، ترې کم(منفی) د څنګ یا فرعی دوه کوجنتړي(قطر) د توکو ځل(یا) د اصلي دوه کونجتړې یا قطر د توکو ځل څخه د څنګ یا فرعي دوه کونجتړې د توکو ځل کمیږي یا منفی کیږي)

یادونه : دا اوس او وروسته دیترمینانت ښه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په دیترمینانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (11 . 13) کی د xi ځله ووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په (11 . 8) سیستم کی . د (11.13) دیترمینانت له دې امله د (11 8) (له ماڅخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدلیږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شمیرپوهنیزه ناسمي منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو (ضریبونو) دیترمینانت بلل کیږي.

که په (11. 13) کی لومړی (درز، ستن یا متِه یا ولاړه لیکه یا-کیله) د دیترمینانت ولاړه لیکه(په ځای) چی د xi ځله ووني یا ضریبونه دی د (11 . 8) برابرونسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 وليکل شي نو(په x1 اړونده) لاندې ديترمينانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{22} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه يا نمره دې) ۱۱،۱٤ (وي‌په همدې ډول که د) 11 . 13 (ديترمينانت دوهم درز بدل کړی شي، نو د x2 پورې اړوند لاندې ديترمينانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,15)$$

که له (11 . 10) تر(11 . 12) پورې له (11 . 13) تر (11 . 15) پرتله يامقايسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۱ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو يا ضريبونو ديترمينانت لپاره په (11. 13) کی

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سيستم (11 . 8) يوائځنی ټاکلی ځواب لري

$x_1 = D_1/D \ ; \ x_2 = D_2/D \qquad /11,17)$

په داسی حال چی D1 او D2 د (11 . 14) او (11 . 15) له مخی شميرل کيږي. د (11 . 10) او (11 . 11) له امله لرو

جمله ۱۱ . ۲ :
که په (۱۱ . ۱۳) کی د ځلونو ديترمينانت D لپاره باوري وي

$0 = D \qquad (11,18)$

او د کم له کمه يوې ډيترمينانتD1 يا D2 لپاره په (11 ,14) يا (11 , 15) باوري وي

$D_1 |=0 \ \vee \ D_2 |=0 \qquad (11,19)$

نو (11 . 8) سيستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون يی يو د بل سره مخامخ دي (تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :

باوري دي

$$D=D1=D2=0 \quad (11 . 20)$$

نو يو له برابرونونو I يا II زياتي دی) دواړه برابرونونه يو بل ته اړ دی يا د بل په واك کی دي(او د ۱۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعماليدلی شي يا كار ترې اخستل کيدی شي.

د ښوونبيلګو په څير دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلګي (۱۱ . ۱ . ۲ برخه) كارول شوي سيستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونكي په ديترنمنانتو ځواب كړي، كه چيرې ما دا كار سرت ونه رساوه۰.

بيلګه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-3=-7 \neq 0$$

پس يواځنی ټاكلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -8+15=7 \neq 0; D_2=\begin{vmatrix} 24 \\ 1-5 \end{vmatrix} = -10-4=-14$$

له دې امله باوري دی

$$x1=D1/D=7/-7 \, , \; x2=D2/D=-14/-7= 2 \, ,$$

بيلګه۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix} 23 \\ 46 \end{vmatrix} = 12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix} 43 \\ 86 \end{vmatrix} = 24-24=0; D_2=\begin{vmatrix} 24 \\ 48 \end{vmatrix} = 16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپاي ډېر ځوابونه موجود دي) بيلګه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بيلګه ۱۱ . ۸ :   د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D =   2   3   =12 -12 = 0

او ورپسې

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چې ځواب نه شته(د 0=| 4 = D2له شميرلوکيدی شي، چې تيرشو)

بيلګه ۱۱ . ۹ :

موږ بالاخره غواړو چي په بيلګه ۱۱ . ۴ کې ورکړ شوی مساواتسيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی   D , D1 او D2 شميرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{a^2-2ab+{}^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2} = -\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت $ab \,|= 0$:

دلته دیترمینانت $D \,|= 0$ او دا د برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x=\frac{D_1}{D}=\left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right):\left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right)=\frac{2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{4ab}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د D1 = D2 له امله)

دوم ۱ حالت a=0,b|=0 : دلته D = 0 مګر

D1 = D2 |= 0

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته D = D1 = D2 = 0

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلګه ۱۱ . ۴ کي ښوول شوي .

دوم ۳ حالت a = b = 0 :

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو وروسته دبیلا بیلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

(a-b)x+(a+b)y=a²-b²

(a+b)x+(a-b)y=a²-b²

۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤ د ګاوس الګوریتم

په ۱۱ . ۱ . ۲ . برخه کې څیړل شوو متودو ټیك په نظر نیولو سره (برابرو لیکلو- په ځاي - او د زیاتون عملیه) ، کره پوهیدلی شو چی ددې په مرسته ټولیز د برابرونسیستم (11 . 8)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه درېګوډیز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$

$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

۱ . که 0 =| a22 وي، نو لاس ته راځي:

الف) x2=a2/a22

ب) برسیره پر دې که $a_{11} \neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=

(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)

۲ . که 0 = a22 او 0 =| a2 وي نو ځواب موجود نه دئ یا نه شته

۳ . که 0= a22 او 0 = a2 وي، نو ۲- م برابرون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بیا ا. برابرون د ۱۱ . ۱ . ۱ برخی متود په مرسته ځوابولی شي.

د (11 . 8) سیستم د ځواب پرابلم په دې ډول کمیږي، چی دا سیستم په دریګوډیٔ بڼه یا – څیره واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس الګوریتم دی. یا (11 . 8) سیستم دریګوډیٔ څیره لري او یا ټول aik د صفر سره برابر نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی (11 . 8) سیستم په روځنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

$$\begin{array}{llccc} & & x1 & x2 & RS \\ \hline I & a11x1+a12x2= a1 & a11 & a12 & a1 \\ II & a21x1+a22x2= a2 & a21 & a22 & a2 \end{array}$$

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پریښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - ځله له I برابرون څخه کم شي ، نولرو

$$\begin{array}{llccc} & \ldots\ldots\ldots\ldots & x_1 & x_2 & Rs \\ \hline I & a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1 & a_{11} & a_{12} & a_1 \\ II' & 0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21} & 0 & a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21} & a_1-a_{11}.a_2/ a_{21} \end{array}$$

که II' لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

$$\begin{array}{llccc} & & x1 & x2 & RS \\ \hline I & a11x1+a12x2= a1 & a11 & a12 & a1 \\ II' & b22x2 = b2 & & b22 & b2 \end{array}$$

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که b22 |= 0 وي ، نو x2 له II' اوx1 لهI لاس ته راځي.

-که b22 = 0 , b2 |=0 وي، نو ځواب وجود نه لري.

-که b22 = b2 = 0 وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی لهI او ١١ . ١ . ١ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ١ ، ٢ ، ٣ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ١١ . ١٠ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریګوډیځیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پریږدو او له II څخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له 'II لاس ته راځي $x2 = 2$
او له I څخه لاس ته راځي. $x1 = 2 -(3/2)\ x2 = -1$

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (ځیرو. دلته د لمړی لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	10
II'=II-2.I	0	0	2

سیستم۲

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	8
II'=II-2.I	0	0	0

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په ځیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅیړل شي

دوم واریانت اول واریانت

x1 x2 RS x1 x2 RS

I 2 3 4 I 2 3 4

II 1 -2 -5 II 1 -2 -5

II'=II-(1/2).I 0 -7/2 -7 II'=II+(2/3).I 7/3 0 -7/3

2. -1 2. 2 1. 2 1 -1

ځلورم وایانت دریم واریانت

x1 x2 RS x1 x2 Rs

I 2 3 4 I 2 3 4

II 1 -2 -5 II 1 -2 -5

I'= I+(3/2).II 7/2 0 -7/2 I=I-2.II 0 7 114

2. 2 2. -1 1. -1 1. 2

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا ځلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چې د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوې، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب) له II' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

$$x2= -7 / (-7/ 2) =2$$

ت) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$$x = (1/ 2)(4 - 3.2) = -1$$

واریانت ۲ :

ا) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له II' څخه دې x1 وشمیرل شي

پ (له II' لرو: 1- = x1

ت) له I څخه لرو: x2 = 2

واریانت (امکان) ۳

ا) له II څخه دې x2 وشمیرل شي

ب) له I' څخه دې x1 وشمیرل شي

پ) له I' لرو 1- = x1

ت (له II لرو 2 = x2

واریانت (امکان) ۴

ا) له II دې x1 و شمیرل شي

ب) له I' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ (له I' لر x2 = 14 / 7 = 2

ت) له II لرو:

$x1 = -5+2.2 = -1$

ټولی څلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واریانت کی په ټولګټونو شمیرنه کیږي، »مخته وونه« یا مخوونه(برتري) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زیات برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سرهره

که څوك له دوه زیات برابرونونه د دوه اوښتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توګه باید په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه x1, x2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توګه حل نه لري. یوائې په ځانګړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څیړو او بیا د ګاوس الګوریتم له لارې.

بیلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

$$\text{a) } \begin{array}{ll} I & x1 + 2x2 = 3 \\ II & 2x1 - x2 = 1 \\ III & 3x1 + x2 = 2 \end{array} \qquad \text{b) } \begin{array}{ll} I & x1 + 2x2 = 3 \\ II & 2x1 - x2 = 1 \\ III & 3x1 + x2 = 4 \end{array}$$

له I او II څخه د څرګندو یا معلومومتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی ځل یوائنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

له) a او)b ښخه لرو $x1 + 2x2 = 1$ كه دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په (a) كې :$1.1+3.1 = 4 \neq 2$, په (b) کی : $1.1 + 3.1 = 4$

نو سيستم (a) ځواب نه لري او سيستم ($\hat{b}$) يواځني ټاكلی ځواب لري

يعني $x1=x2=1$

بيلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بيلګه ۱۱ . ۱۳ كي ورکړ شوي مساوت اوس د ګاوس د الګوريتم له لارې ځواب كوو.

a)	x1	x2	RS	b)	x1	x2	RS
I	1	2	3	I	1	2	3
II	2	-1	1	II	2	-1	1
III	3	1	3	III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5	II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=II-3.I	0	-5	-7	III=III-3.I	0	-5	-5
III"=III'-II'	0	0	-2	III=III'-II'	0	0	0

په a) کی تضاد پيژندلكيږي ($III':0.x1+0.x2=-2$) ځواب نه شته يا وجود نه لري .

په b) کی تضاد مخ ته نه دی پروت .($III':0.x1+0.x2=0$) لهII' ښخه لرو:

$x2 = 1$ او له I ښخه لاس ته راځی : $x1=3-2.1=1$

۱۱ . ۲ لاينيزبرابرونتسيستم د درې ناپيژندونكو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ يو برابرون د دري ناپيژندونكو سره

مو ږ يو مساوات د دري ناپيژندونكو سره تر ښيرني لاندې نيسو:

$$a11x1 + a12x2+ a13x3 = a1 \quad (11 . 21)$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممكن دي

$$I . \quad a11=a12=a13=0 \quad (11 . 22)$$

دلته $x1 , x2$ او $x3$ يو له بل پوره خپلواك ټاكل كيدی شي. ويل كيږي چی ناپاي ډير ځوابونه مخ ته پراته دي (x1 په خوښه، x2په خوښه او x3په خوښه)

$$2. \quad a11=a12= a13= 0 ,a1\neq0 \quad (11 . 23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$0x1+0.x2+0.x3 = a1 |= 0$

اوبیونه نه شته.

۳- د کم له کمه یوه ځلجوړې i , k لپار دې 0 =| aik وي. (بي د ټولیز وبندیزونو یا عمومیت د محدود والی دې 0=|a11 وي (. کیدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي (ناپاي ډېر ځوابونه)، او لاس ته راځي

$x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3)$ په خوښهx1 او x3 (11,24)

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپېژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسیستمونه د درې اوښتونو یا ناپیژندونکو سره

$a11x1+a12x2+a13x3=a1$ (11,25)

$a21x1+a22x2+a23x3= a2$ (11,25)

موږ دا را ویستلي حالتونه ، چیرته چی د ټولو i, kلپاره0 =aik ، په پام کی نه نیسو. دا حالت هم په پام کي نه نیسو چی دوم برابرون د لومړي په ځیر وي (ناپاي ډېر ځوابونه. او یا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي یا ښتوالي یا تضاد کی وي (ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پیژندونکي دي. موږ په یوه بیلګه کی دا اصلي حالت څیړو چی یو ناپیژندونکي یا نامعلوم (د بیلګي په توګه x3) په خوښه ټاکل کیږي او دا نورې دوه ناپیژندونکی یا اووښتونې (x1 او x2) یواځنی لاس ته راځي، او یا یواځنی ورکول کیدی شي (ناپاي ډېر ځوابونه).

بیلګه ۱۱ . ۱۵:

	x1	x2	x3	RS
I $x1+x2+x3=3$	1	1	1	3
II $x1+2x2+3x3=6$	1	2	3	6
II'=II-I $0.x1+x2+2x3=3$	0	1	2	3

له II' لاس ته راځي

$x2 = 3 -2x3$

له I څخه لاس ته راځي

$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, x1= x3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې لاس ته راځي
$x_1=x_3, x_2 = 3 - 2x_3$, x_3 په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دريمه درجه ديترمينانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه يا معادلې يا مساوات د درې ناپيژندونکو سره څېړو

$$\text{I} \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3= a_1 \quad (11 . 26)$$

$$\text{II} \quad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= a_2 \quad (11,26)$$

$$\text{III} \quad a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3= a_3 \quad (11,26)$$

له دې سيستم څخه کيدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخی د برابر ليکلو او يو د بل په ځای ليکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زياتونتيورم (-قضيه) فکر غواړي او د دريمي درجې ديترمينانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سيستم ځواب پيدا کولو لپاره هڅوي

پيژند ۱۱ . ۲:
رييل ګڼونو a_{ik} ($i,k = 1,2,3$)يو درې درجه منظم د ديتمرمينانت سيستم

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی رييلګڼ پوهيدلی شي):

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32)}) - a_{12}(a_1a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{33});\ldots\ldots\ldots\ldots(11,28)$$

له دې سره د دريمی درجې ديترمينانت شميرنه د دوهمی درجی ديترمينانت په شميرنه بدله شوه. ۱۱ . ۲ تعريف او په ځانګړې توګه (28. 11) فرمول په لاندې ډول توضيح کيدی شي:
پيژند ۱۱ . ۳ : په (11 . 27) کی د ديترمينانت D لاندېديترمينانت Aik لاندې هغه دومه درجه ديترمينانت پوهيدلی شو، چی د D ديترمينانت i- می ليکی او k - م درځ يا متې د لرې کولو يا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي(زه د ماتريکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې دا ليکې او مټې يا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پيښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه يې پسې ليکل شوې)

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$A_{12}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$A_{13}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}$$

په دې ډول کيدی شي چې د ۱۱ . ۲ ديترمينانت په دې فورم وليکل شي

پيژند ۱۱ . ۴ :

د دريمی درجي ديترمينانت D لاندې، چې په (11 . 27) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پوهيدل کيږي:

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

د زياتون عمليي ښخه، چې دلته نسبت د دوه ناپيژندونکو مساواتو ته چې دوه ناپيوندونکی لري، روښانه ده، د (11 . 26) ښخه لاس ته راوړل کيږي:

Dx1 = D1 , Dx2 = D2 , Dx3 = D3 (11 . 29)

په داسی حالت کی چې Di داسي لاس ته راځي چې د ځله وونوديترمينانت (11 . 28) کی سړی i - م درځ يا ستن يا مټه د (11. 26) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_{1}=\begin{pmatrix} a_{1} & a_{12} & a_{13}\\ a_{2} & a_{22} & a_{23}\\ a_{3} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix};D_{2}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1} & a_{13}\\ a_{21} & a_{2} & a_{23}\\ a_{31} & a_{3} & a_{33}\end{pmatrix};D_{13}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1}\\ a_{21} & a_{22} & a_{2}\\ a_{31} & a_{32} & a_{3}\end{pmatrix};......(11,30)$$

موږ دا نتيجه بې له ښووني ورکوو.

له (۱۱ . ۲۹) ځخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :

که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونوديترمينانتو(۱۱). ۲۷ ،په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D \neq 0 \qquad (11.31)$$

با وري وي ، نو (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم يواځنی ځواب لري

$$x3=D3/D \quad ;x2=D2/D \quad ; x1=D1/D \qquad 11,32)$$

جمله ۱۱ . ۵ :

که D = 0 مګر Di |= 0 کم له کمه د يوه i (i = 1,2,3) لپاره وي، نو د (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم ځواب نه لري (په (۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که D = D1 = D2 = D3 = 0 وي، نو په (۱۱ . ۲۶) کی کم له کمه يو برابرون له ضرورته زيات دی او دا (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم کيدي شي چي د ۱۱ . ۲ . ۲ متودونو بانديې ځواب شي (ورانديز دی چی د ګاوس الګوريتم له متود ; چی په ۱ . ۲ . ۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بيلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لانديې سيستم

I x1 -x3 = -2

II x1 +x2 -x3 = 0

III 2x1 - x2 = 0

کی دی

$$D=\begin{pmatrix}1 0 -1\\ 1 1 -1\\ 2 -1 0\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}1 -1\\ -1 0\end{pmatrix}-0.\begin{pmatrix}1 -1\\ 2 0\end{pmatrix}+(-1).\begin{pmatrix}1 1\\ 2 -1\end{pmatrix}=-1-0-1.(-1-2)=2$$

$$D_1=\begin{pmatrix}-2 0 -1\\ 0 1 -1\\ 0 -1 0\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1 -1\\ -1 0\end{pmatrix}-0\begin{pmatrix}0 -1\\ 0 0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0 1\\ 0 -1\end{pmatrix}=2;$$

$$D_2=\begin{pmatrix}1 -2 -1\\ 1 0 -1\\ 2 0 0\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}0 -1\\ 0 0\end{pmatrix}-(-2)\begin{pmatrix}1 -1\\ 2 0\end{pmatrix}-1.\begin{pmatrix}1 0\\ 2 0\end{pmatrix}=4;$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 0 -2\\ 1 1 0\\ 2 -1 0\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}1 0\\ -1 9\end{vmatrix}-0.\begin{vmatrix}1 0\\ -1 0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 1\\ 2 -1\end{vmatrix}=6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یواځنی ټاکلی ځواب موجود دی.

$x1=D1/D=2/2=1,\ x2=D2/D=4/2=2\ ,x3=D3/D=6/2=3$

بیلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سیستم

$$\begin{array}{ll} I & x1 + x2 + x3 = 0 \\ II & x1 \quad -x3 = 0 \\ III & 2x1 + x2 \quad =1 \end{array}$$

کي دی.

دا بیلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښایې ، چې اوبیونه نه شته ۰ دې ته باید ګوته ونیسم، $D = 0$ او $D1= -1 \neq 0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوریتم

د ګاوس الګوریتم لومړی د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې دري ناپیژندونکي لري او همدارنګه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چې درې ناپیژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوریتم موخه په دې کی پرته ده چی (11 . 16) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریګوډیفورم را اوړي.

$$\begin{array}{ll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11 . 34) \\ II & b22x2+b23x3=b2 \\ III & c33x3=c3 \end{array}$$

بنسټیز حالت : که $a11 \neq 0, b11 \neq 0, c11 \neq 0$ وي نو یو په بل پسی سړی کړی شي چی له III $x3$, او له II $x2$, وشمیري. مګر په (11 . 34) کی ځانګړي حالتونه هم پیژندل کیږي:

-که $c3 \neq 0, c33=0$ وې، نو یو په ښتوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که$c3=c33=0$ وی، نو III له ضرورتزیات دی سړی یواځی I او II څیړي.

- که$c33=c3=0$او برسیره پر دې $a11 \neq 0,\ b11 \neq 0$ وي، نو $x3$ په خوښه ټاکل کیدی شي او $x2$له II او $x1$ له I چی $x3$ ته اړ وي، شمیرلکیدی شي (ناپای ډیر ځوابونه)

-برسیره پر دې که $b22=b23=0\ ,\ b2 \neq 0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چی $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$وي ، نو II له ضرورت زیات دی او له $a11 \neq 0$ کیدی شي چی $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي، او $x1$له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي چی x_2 او x_3 ته اړ (په واك کی یا تابع) وي (ناپاي ډیر ځوابونه ځوابونه) .
که ټول ځلونه او د مساواتو ښی خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د ګاوس الګوریتموس د دريِ ناپیژندونکو(11 . 26) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دیَ
لومړی پل (قدم) : نیسو چی په (11 . 2 6)کی $|a_{11}| \neq 0$ دی. دا د نمرې بدلولو په
بنسټ همیشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چی ټول $a_{ik} = 0$ وي) .
دلته I ورکول کیږي، او له II د I دا a_{21}/a_{11} - ځله او له III دا a_{31} / a_{11} - ځله د I
کموي. ددې څخه لاندې سیستم لاس ته راځي:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=a_1 \quad (11.35) \\ \text{II} & b_{22}x_2+b_{23}x_3=b_2 \\ \text{III} & c_{33}x_3=c_3 \end{array}$$

دويم پل (قدم) : د $|b_{22}| \neq 0$ نیوني سره په II' او III' باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره
سم د ګاوس الګوریتم استعمالیږي : سړی II' بي تغیره پریږدي اوله III' دا b_{32}/b_{22}-ځله
د II' کموي، له دې راپیداکیږي

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=a_1 \quad (11.37) \\ \text{II} & b_{22}x_2+b_{23}x_3=b_2 \\ \text{III} & c_{33}x_3=c_3 \end{array}$$

د ګاوس د شیما فورمالیتي سره سم بیا دا شکل غوره کي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3
II' = II-(a21/a11)I		b22	b23	b2
III' = III-(a31/a11)I		b32	b33	b3
III'' = III' - (b32/b22)II'			c33	c3

$$x_3 = c_3 / c_{33}$$
$$x_2=(1/b_{22})(b_2-b_{23}x_3)$$
$$x_1=(1/a_1)(a_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سیستم ۰(مقایسه بیلګه ۱۱ . ۱۶)

I x1 -x3= -2
II x1 + x2-x3 = 0
III 2x1 -x2 = 0

د ګاوس الګوریتم سره په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	-1	-2
II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0
II'= II - I	0	1	0	2
III'= III - 2.I	0	-1	2	4
III'' = III' + II'	0		2	6

x3=6/2=3
x2=2……………………
x1=-2+x3=-2+3=1

بیلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷ (دا سیستم

I x1 + x2- x3 = 0
II x1 -x3 = 0
III 2x1+ x2 = 1

د ګاوس د الګوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	0
II	1	0	-1	0
III	2	1	0	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- ---------------------

II'=II-I	0	-1	-2	0
III'=III-2.I	0	-1	-2	1
III''=III'-II'	0	0	0	1

دلته دی "0 = 1" تضاد. سیستم نه اوبی کیږي یا حل نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۰: (مقایسه یا پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

I $x1 + x2 + x3 = 3$

II $x1 + 2x2 + 3x3 = 6$

III $2x1 + 3x2 + 4x3 = 9$

په لاندې ډول د ګاوس په الګوریتم اوبیونه ده

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	3
II	1	2	3	6
III	2	3	4	9
II'=II-I	0	1	2	3
III'=III-2I	0	1	2	3
III'' = III'-II'	0	0	0	0

$=x3$ په خوښه

$x2 = 3 - 2x3$

$x1 = 3 - x2 - x3 = 3 - (3 - 2x3) - x3 = x3$

۱۱ . ۳ په خوښه ډیر مساوات ، په خوښه ډیر ناپیژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاینیز سیستم برابرونونو په لار ښونی پیل کوو m (برابرون د nناپیژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1..................(11,37)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$
$$..$$
$$...$$
$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوښه يا ازاد پريږدو چې د برابرونونو ګڼون (تعداد) m د ناپيژندونکو n د ګڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دئ. په څرګندو دندو يا وظايف موږ دلته له څلور ناپيژندونکو څخه نه پورته کيږو او يوائی لاندې دوه متودونه څيړو

۱۱ . ۳ . ۱ د n - م درجی ديترمينانت او د کرامر قاعده

پيژند ۱۱ . ۵ :
د n رييل ګڼونو aik يوه منظم سيستم n- م درجي ديترمينانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};........................(11,38)$$

لاندې سرې لاندنې رييل ګڼ پوهيږي:
$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$
دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې ديترمينانت Aik د (n-1) - م درجی ديترمينانت ده، چی پاتيږي، که په D کی i - مه ليکه او k - م درځ ، مته يا ستن (ليکه او درځ چی aik په کی ولاړ وی) په کرښه لرې کړي يا کرښه پرې تيره کړي، يعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجی ديترمينانت شميرل و- (n-1)-ام درجی ديترمينانت شميرلو ته راتيتيږي .
په ځانګړي توره د څلورمی درجی ديترمينانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}; A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}\,etc$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو) په) 11 . 37 (کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

Dx1=D1,Dx2=D2, ...Dxn= Dn   (11 . 42)

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چې د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت) ۱۱ . ۳۸ (کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .
د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره (پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰)

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix};D_2=\begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix};.......................(11,43)$$

له(11 . 42) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):
د ځله ووني یا ضریب دیترمینانت (۱۱,۳۸) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په (۱۱ . ۳۷) د m = n سره) باوري دی

D |= 0   (اصلي حالت)   (44 . 11)

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري(حل لري

x1=D1/D,x2=D2/D,...,xn=Dn/D.   (11 . 45)

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري .
که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیوني لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو)

بیلګه ۱۱ . ۲۱:
لا ندې سیستم دې حل شي

I	x_1		$+x_3$		$= 0$
II	$2x_1$	$+x_2$		$+x_4$	$=0$
III		x_2		$-x_4$	$= 4$
IV	x_1	$-x_2$	$-x_3$	$+x_4$	$= -2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&2\\0&1&0&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&0&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&2\\0&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&2\\4&1&0&-1\\-2&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&2\\4&1&-1\\-2&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&-1\\-2&1\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}4&1\\-2&-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&0&0&2\\0&4&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&2\\4&0&-1\\-2&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0&2\\0&4&-1\\1&-2&1\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}4&0\\-2&-1\end{vmatrix}+\left|2\begin{vmatrix}4&-1\\-2&1\end{vmatrix}\right|+2\begin{vmatrix}0&4\\1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&2\\0&1&4&-1\\1&-1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&4&-1\\-1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-1\\-2&1\end{vmatrix}+\left|2.\begin{vmatrix}1&4\\-1&-2\end{vmatrix}\right|=4-2+2(-2+4)=6|$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&0\\0&1&0&4\\1&-1&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&0&4\\-1&-1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&4\\1&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4\\-1&-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}1&4\\-1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;\ x_2=\frac{-12}{-6}=2;\ x_3=\frac{6}{-6}=-1;\ x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چې د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چې د هغي له مخی څرګندولی شو چې کوم حل)ځواب(مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بیلګه څرګندوو

بیلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بیلګه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II -2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV-I	0	1	-2	1	-2
III" = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV" = IV' +II'	0	0	-4	3	-2
IV''' = IV" + 2.II"	0	0	0	-3	6

x4 = -2

x3=1/2(4+3.(-2))= -1

x2=0+(-1)(-2)= 2......

x1 = -(-1) = 1 ....

بیلګه ۱۱ . ۲۳:

دا برابرونسیستم

I x1 +x2 +x3 +x4=4

II x1 -x2 -x3 +x4=0

III 3x1 -x2 -x3 +x4=2

حل یا اوبیونه ی نه لرې، لکه د ګاوس له شیما څخه چی لیدل کیږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2
II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10
III'' = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2

دلته III" په ځیوالی یا تضاد خوندي لري " 0 = -2 "

بیلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4

II x1 -x2 -x3 +x4= 0

III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4

IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10

V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چی oe1 (ناپای ډیر) اوبیونې لري

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8
II' = II-I	0	2	- 2	0	-4
III'= III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV -I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II"= II'+2.IV'	0	0	2	6	8
III'=III'+4.IV'	0	0	4	12	16
V" = V' +2.IV'	0	0	2	6	8
III''' = III"-2.II'	0	0	0	0	0
V'''=V"-II	0	0	0	0	0

ګورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سړی کړي شي چی x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 "II له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 'IV او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4 په خوښه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4 ، په خوښه x4 ټاکو

او x3=4-3x4 په خوښه x4 ټاکو

یادونه : هغه ګڼ یا نوره هم ښه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي۰

سړی د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په 'III او 'V پوري اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په 'II اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په 'III او 'V لیکو مو کرښه تیره کړې وی) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځي له کرښی 'II جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سیستم بلل کیږي

I a11x1+a12x2+a13x3= 0.............

II a21x1+a22x2+a23x3= 0 (11. 46

III a31x1+a32x2+a33x3= 0…………..…………………

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

x1=x2=x3=...=xn=0 (11. 47)

که د ځلوونو د یترمینانت (۱۱ . ۳۸) لپاره D |= 0 باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۱. ۸ : يو هوموګين مساواتسيستم يواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري وي بيلګه ۱۱ . ۲۵ :

دا هوموژين برابرونسيستم

$$\begin{aligned} &I \quad x_1 \quad +x_3=0 \\ &II \quad x_1 \ -x_2 \quad =0 \\ &III \quad x_1 \ +x_2 \ +x_3=0 \end{aligned}$$

د

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-1+(1+1)\neq 0$$

له امله يواځنی ساده اوبيونه $x_1=x_2=x_3=0$ لري.

بيلګه ۱۱ . ۲۶:

دا هموګين مساواتسيستم

$$\begin{aligned} &I \quad x_1 \quad +x_3 = 0 \\ &II \quad x_1 +x_2 \quad = 0 \\ &III \quad x_1 +x_2 +x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=-1+1=0$$

د

له امله ناساده اوبںونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوريتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- يا باقي سيستم په معنا دی.

x1 x2 x3 RS

---

0 0 1 I 1

0 II 1 -1 0

0 III 0 1 1

II'=II-I 0 -1 -1 0

III' = III 0 1 1 0

II'' = II + III' 0 0 0 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چی II"تضاد نه لري x3په خوښنه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I ځخه لاس ته راځي x3-=x1نوx3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نوx3 په خوښه

. تمرینونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چي ورسره بلد یو-پوهیږو او یا هم

۱ – کرښیز مساواتسیستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرینونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو ځخه کار اخستلس شي، چې بیایې و ازمایو. د لته دې د زیاتون یا جمعې قانون او همداسې د ګاوس الګوریتم ته لومړیتوب ورکړ شي ا و د دیترمینانت سره شمیرنه دې یوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$

b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$

d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$

b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$

d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$

b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$
$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$

d) $4+y = x$
$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$
$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$
$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y} = 3$
$\frac{15}{x}-\frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2}+\frac{3x_2}{2} = 3$
$3x_1+x_2 = 2$

b) $\frac{2x_2-5x_1}{6}+\frac{x_1}{6} = \frac{x_2-2x_1}{3}$
$\frac{5-3x_1}{3}-\frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12}-\frac{3x_1-4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1+3x_2}-\frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$
$\frac{5}{3x_1-2x_2}+\frac{6}{4x_1+3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1-2)+4(2x_2+\frac{3}{2}) = 0$
$5(x_1+3)-3(x_2-\frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1+4x_2 = 8$
$5x_1-2x_2 = 9$
$7x_1-8x_2 = 10$

b) $6x_1-x_2 = 1$
$9x_1+2x_2 = 5$
$3x_1-x_2 = 1$

c) $5x_1-3x_2 = -3$
$3x_1+5x_2 = 5$
$3x_1-1{,}8x_2 = -1{,}8$
$0{,}9x_1+1{,}5x_2 = 1{,}5$

d) $2x_1-3x_2 = 10$
$-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$
$x_1-1{,}5x_2 = 5$
$0{,}5x_1-0{,}75x_2 = 2{,}5$

۱ ، ۲ – مساواتسيستم د ناټاکلو ضريبونو سره

1.2.1. a) $x_1+x_2 = a$
$ax_1-x_2 = b$

b) $3x_1-2x_2 = 5a$
$2x_1-3x_2 = 5b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2-4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شميرنه

۱ . ۳ . ۱ کوم دوه اعداد لاندې خويونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع يا څلورئ کمون(تفريق) يې په ۱۰۰ لوييږي، په داسې حا لې جې ضرب يې په۳۲۵ زياتيږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه يا زياتون دومره لوي دی، لکه د تفريق مربع يې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزيات شي او له دويم عدد کم شي، نو د مربع کمون د يا تفريق يې ۹۹ دی، وښايئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګنونو څخه هر یویې په 2 لویوي، نو ګنونه څانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګنونوڅخه 3 کم شي ، نو داسې لاس ته راغلی ګڼ څان نیسی لکه : 3 : 2 . دواړه ګنونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګنونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګنونو شومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګنونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره څل یا ضرب شي، نو د څلونو زیاتون بی 2222 دی. هر یو له دې ګنونوڅومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګنونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګنونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دریکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پڅیکشن یا پریوستون یې د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمخ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چی له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لري دی نسبت و X ته ، دواړه مخ کلی X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرڅیدلی دیوال، چی 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرڅي اوږده د هوارې دننه په 100 m^2 زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خوندي کوي او دوه وتللارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ . ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1 / 4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړي درې بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړي ۷ بوتله او له دوم درې بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 الماني مارکه(DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود $450\ m^3$ اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل درې دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی $40\ m^3$ اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته $60m^3$ اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کي څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یو ځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم درې ورځي کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 1 / 5 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ اړتیا ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۶ . د یوې ګردۍ په چاپیرې چې ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقیې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقیقې، که هغوي یو د بل په خټ لور حرکت وکړي، هر بدن په یوه ثانیه کی څومره واټن تی کوي یا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په یوه ګردۍ چې چاپرې یې ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانیوکی. د واړو بدنونو سرعت څومره دی،که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم ؟ی ؟

۲ . ۲ . کرښیز مساوات سیستمونه د درې مجهولو سره

۱ – مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

a) $\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x + z &= 15 \\ y + z &= 16 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 18 \\ x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6,6 \\ x_1 - x_3 &= 2,6 \\ x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x + y + z &= 25 \\ 3x - 2z &= 1 \\ 20y - 16z &= 0 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x + 3z &= 13 \\ 3x - 4y &= 3 \\ 5y - 6z &= 9 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 12x + 24y - 42z &= 30 \\ 4x + 8y - 14z &= 10 \\ 6x + 12y - 21z &= 15 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 207 \\ 5x - 3y &= 37 \\ 3y - 2z &= 19 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 14 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 6x_1 - 16x_2 + 10x_3 &= 39 \end{aligned}$

j) $\begin{aligned} 4x + 4\tfrac{1}{2}y - 6\tfrac{3}{4}z &= 20 \\ 2\tfrac{1}{5}x - 2\tfrac{1}{3}y + 1\tfrac{1}{2}z &= 5\tfrac{2}{3} \\ 1\tfrac{2}{3}x + 1\tfrac{3}{4}y - 4\tfrac{1}{2}z &= 3\tfrac{1}{3} \end{aligned}$

k) $\begin{aligned} \tfrac{2}{5}x - y &= 0 \\ \tfrac{2}{3}x - z &= 1 \\ -\tfrac{2}{3}y + z &= 2 \end{aligned}$

۲ . ۲ – مساوات سیستمونه د ناټاکلو ضریبونو سره

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2c \\ x_1 + x_3 &= 2b \\ x_2 + x_3 &= 2a \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2(a + b) \\ x_1 + x_3 &= 2(a + c) \\ x_2 + x_3 &= 2(b + c) \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} ax + by - z &= 1 \\ ax - by + z &= b \\ -ax + by + z &= a \end{aligned}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-----

d) $ax + y - cz = 2a$
$-ax + y + cz = 2c$
$ax - y + cz = 2ac$

e) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

f) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{a}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{b}$

g) $x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a$
$y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b$
$z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$

h) $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a + b$
$\frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b + c$
$\frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c + a$

۳ . په خوښه زیات مساوات د په خوښي زیاتو مجهولو سره

a) $2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$
$0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 = 3$
$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$

b) $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$
$x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 1$
$7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 10$
$6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 = 9$

c) $x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 1$
$-2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$
$-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 5$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2$
$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4$

d) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1$
$6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 = 19$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 = -24$
$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 3$

هوموجین مساوات سیستمونه:

a) $3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0$
$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$
$-2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$

b) $-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$
$5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

c) $20x_1 - 10x_2 + 15x_3 = 0$
$-12x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0$
$8x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0$

d) $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$
$9x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . الجبري مساوات یا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاینیز- یا ناکرښیز- یا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چی د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره یوارزښته (اکویوالنت) نه وي ، نالاینیز – یا ناکرښیز مساوات بلل کیږي او عمومي فورم یی په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \qquad (12 . 2)$$

دلته F (x) په x کی یوه ناکرښیزه یا ناخطي وییینه یا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چی ټول د xارزښتونه پیدا شي د کومو لپاره چی (12 . 2) باوري وي. باید په پام کی ونیول شي چی ایا یواځي رییل ارزښتونه پیدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چی پیدا کړو. د بیلګی په توګه لاندې ناکرښیز یا لاینیز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رییل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چی د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره بي مساوات باوري کیږي .ددې په څېر یا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رییل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دي وکتل شي)، بلکه لاندې ایماګینار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وکتل شي) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړیکو ته پاملرنه وشي: اړیکو $y=F(x)$ ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندوني بولم(ښه نومه ونه يې اوښتوني ده) په څېر یا برعکس (12 . 2) یو ټاکنمساوات دی او x هلته یوه ناپيژندونکی یا اوښتونی دی.

د (12 . 2) برابرون یا مساوات اوبيونې یا حل ته د برابرون د (F (x صفرځای یا د مساوات F(x)=0 جذر یا ريښه هم وايي.

هغه برابرون یا مساوات چی په (۱۲ . ۲) فورم نه دئ ورکړ شوی کیدی شي چی په دې لاندې فورم واړول شي. د بيلګي په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0 \quad \text{او} \quad f(x)=g(x)$$

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کيږي

$$F(x)=f(x)-a.g(x)=0 \quad \text{او} \quad F(x)= f(x)-g(x)= 0$$

د نالاينيزو برابرونونو لپاره د لاینیزو برابرونونو په څير راغونډه (اختماميه، رابنده، راتړلی) تیوري نه شته. په پولیزه یا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخی چی د صفرځاي معلوميدی شي. باید په نومریکو (numerischen Methoden) متودونو یا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې یا تقريبي ډول پیداشي

نالاينييز برابرونونه په دوه ټولګيو ويشل کيږی: الجبري او تراسڅندنت چی په دې او راتلونکی څپرکي یا لکه چی ما استعمال کړې برخه کی یی څيړو، چي اوبيونې یی روښانه افاده شوې (explizit لاتين: واضح یا روښانه ، افاده شوی، اکسپليڅت) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څيړل کيږي چی په لاندې نورمال فورم یا – بڼه اړول کیدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0 .... (12,3)$$

دلته په (12 . 2) کی یو نالاينيز بلواک یا – فنکشن (F (x د یوه n - م درجی پولينوم په څير مخ ته پروت دی . موږ په (۱۲ . ۲) کی د ضريبونو(ځله وونو) لپاره یواځی رییل ګڼونه پريږدو (په دې مانا چي ځلونه یواځي رییل وي، یواځی رییل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په (۱۲ . ۳) کې کېږ اړخ ته n - م درجه پولينوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 ....(12,4)$$

ته ټول ريشنل (- ريښتونی) بلواک يا فنکشن هم وايي، ځکه چې د ريشنل شميرله عمليو زياتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واريابلی او ai د رييل ضريبونو، ځلونو يا فاکتورونو باندې د ويش کاروني کارولو (عملي استعمال) له لارې منځ ته راځي .ټوليز برانرون يا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0 ....(12,5)$$

کيدي شي په bn|= 0 ويش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاينيزفنکشن يا ۰ بلواک (F (x په (۱۲ . ۲) باندې په واريابلي يا اووښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمير کاروني يا عمليي او بالاخره دويش کارونه وکارول شي يا اجرا شي او رييل پارامتر (Parameterپه شميرپوهنه کې ثابت (همغۀ) او يا مرستندويه لوي ده) تشکيل شي نو فنکشنونو ته بيا مات ريشنل فنکشنونه ويل کيږي. دا تل د دوه پولينومونو يا ريشنل فنکشنونو د ويش په څير انځوروږ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ....(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) يا (۱۲ . ۳) برابرون اړول وړ دي . دا بايد په پام کې وي چې د (۱۲ . ۳) لپاره يواځنی هغه ځواب په پوښته کې راځي، د کوم لپاره چې باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چيرې د نالاينيزبلواک يا - فنکشن جوړولو کې د ريشنل شميرعمليو تر څنګ د توان (مټ، په جګ) يا پوتنځ کول او جذر نيولوته هم اجازه ورکړل شي نو بيا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږيږ. يعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ويل کيږي او (۱۲ . ۲) برابرون بيا الجبري برابرون بلل کيږي ، دا ډول مساوات هم کيدی شي چې په (۱۲ . ۳) فورم واړول شي.

هره n - مه ريښه يا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (G(x) افادې يا وينې له منځه وړل کيدی شي, که چيرې څوك دا برابرون په يوه خوا راوړي او بيا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي يا د n پوتنځ يا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په څرګندو يا معلومو بيلګوڅيړل کيږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځيرنه د (۱۲ . ۳) فورم برابرونونو ته راکښته کيدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابرون هم بلل کيږي. ټول نالاينيز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسځيندنت برابرون بلل کيږي . د ترانسځيندنت رابرونونو درې تيوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاريتمي برابرونونه ، او ګونومتريکي برابرونونه دي چې په برخه ۱۳ کی به تر څيړني لاندې ونيول شي.

۱۲ . ۲ څلوری(مربع-) مساوات په توان(مټ، جګ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاينيزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان يا مټ (په جګ ۲ هم ويل کيږي) برابرونونه دي چی څلوری يا مربع برابرونونه بلل کيږي .د دې ټوليزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; ....(12,8)$$

په b2 يي ويش په لاندې ډول يو ورته ارزښته (اکويوالنت äquivalent) نورمالبڼه يا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_b; a_0 \neq b_0 / b_2); ....(12,9)$$

ددې حل د څلوری پوره کونې يا مربعتکميل څخه په ګټه د بينوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a / 2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a^2{}_1}{4}; ....(12,10)$$

په دې ډول کيدی شي چی (۱۲ . ۹) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$$x^2+a1x+a0=(x+a1/2)^2+a0-a1^2/4 = 0 <=>$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[x+a1/2]^2=(a1^2/4)-a0 \qquad (12,11)$$

که وي

$$(a1^2/4)-a0>0 \Leftrightarrow a1^2 -4a0>0 \Leftrightarrow a1^2>4a0 \quad (12,12)$$

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};........................(12,13)$$

یا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};........................(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بینا تل نا کمیز یا نامنفي ګڼ پو هیدل کیږي، چی څلوری یا مربع یی a ده) . له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) څخه ریبل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};........................(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم لیکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};........................(12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توګه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پو هیدل کیږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2
په ریښتونی څلوری برابرون یا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0\Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0\Leftrightarrow a_1^2=4a_0;.............(12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لارې تیك یو ریبل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a\ \ /2;................................(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیوني (۱۲ . ۱۸)څخه غږیږو.
که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};...................(12,20)$$

له دې څخه هم چی په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};...................(12,21)$$

نو لاندې جمله بی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د څلوری یا مربع) په توان یا جګ د ۲) برابرونونو د اوبیوني فرمول) د څلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) $x^2+a1x+a0=0$

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټیک دوه ځوابونه لري
د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساواتو لپاره ښوول کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۲ (د ویيتا(Vieta)جمله) :

که x1 او x2 د څلورئ - یا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) اوبیونې وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2;..........................(12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2);....................(12,23)$$

حل : (۱۲ . ۲۳) فرمول په دریواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې څخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د (۱۲ . ۲۲) فرمول د تصدیق لپاره د بینوم دریم فرمول او i ² = -1 استعمال څخه په په (۱۲ . ۱۲) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په (۱۲ . ۱۷) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲ . ۱۹) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وییتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کیږي یا تصدیقیږي

جمله ۱۲ . ۳ :

یو ۲ درجییز پولینوم کیدی شي چی په دوه لایني فاکتورونو یا ضریبونو یا ځله وونو بیل یا توټه یا تجزیه شي:

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2);\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = b_2 (x - x_1)(x - x_2);\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(12,25)$$

چیرته چي x1 او x2 د ځلورې برابرونونو یا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبیونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) څخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نیولو سره لرو

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + a_1 x + a_0 =$$
$$= \frac{1}{b_2}(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ څخه دې ته راځول کیږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره رییل اوبیو څخه خبرې وکړو(وغږیږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲) .(۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کیدی شي چی د فنکشن

$$y = p_2(x) = x^2 + a_1 x + a_0$$

ځیرو یا شکلونو (ګراف) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټیزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که x هرڅومره کوچنی شي)که x د کمیز ناپای په جګ یا توان شي) اوهمدارنګه x هرڅومره لوي شي (که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوییږي (ستریږي یا غټیږي) ، ځکه چی x^2 نسبت و x ته په توان یا قوي جګیږي له ټولو پولو(yد ناپای لور ته ځي) ۰ د دې ډول پولو کره پیژند یا تعریف په ۱۹ - برخه کي لوستل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۲) حالت کې د x - محور په داړو ریيلو ځايونو x1 او x2 کې غوڅيږي؛ په (۱۲ . ۱۷) حالت کې په x1 = x2 ځای کې يي لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت کې ګډ ټکي ورسره نه لري يا نه وررسيږي (پرتله څيره . ۱۲ . ۱)

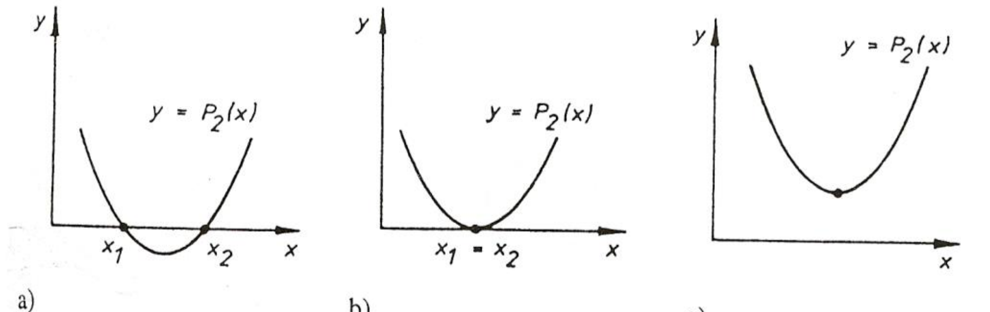


Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، (۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بیلګو روښانه شي.

بیلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

$a1 = -1 , a0 = -6$ او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځايونه د جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی یاتعقیب څخه باوري کیږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3-2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله (۱۲ . ۱۷) حالت مخ ته لرو ۰ دوه ئيز رييل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱

څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1=x2=2$

جمله ۱۲ . ۳ :

په لاندې ډول باوري کيږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$

$$a_1=-4=-(x\ \ +x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$,$a0=13$او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت (۱۲ ، ۱۹) مخ ته لرو.

د کونيوګيرت(کنجوګيري) کمپلکس جوړه اوبيونو يا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې بڼه يا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\left.4-13\right)=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$$

$$\Rightarrow x\ \ =2+3i;x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$

$$a_1=13=x_1.x\ \ =(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د جملی ۱۲ . ۳ له مخې داسی دی

$$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسی (۱۲. ۹) اوبی په ښکاره ډول ساده کیږي، که یو ځلی a0 اویا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو

$$x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ څلوری(مربع-)برابرون چی په نورمالبڼه

مخ ته نه دي پراته

که یو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو باید په دې بڼه واړول شي.

بلیګه ۱۲ . ۴ :

$$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$$

$$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$$

$$-x^2-2x-4=x^2-8x$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$

$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول یا ناپیژندلی یا اوړیدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو باید په صفر ویش ناممکن یا ناشونوالی په پام کي ونیول شي.

بیلګه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$

ټیك هلته مانا لري، چې وي $2x^2+2x-4 \neq 0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کیږي او بیا ازمائل کیږي، چي ایا د ماتلاندې شرایط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$

$$-x^2 = -4$$

$$x_{,2} = \pm 2; x = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پیل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانګړي برابرونونه ، چی په څلوری یا مربع برابرونونو بیرته بدلیدلی شي

د n - مي درجی مساواتو(۱۲ . ۳) یو څو ځانګړي حالتونه کیدی شي چی د څلوری برابرونونو یا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي یا اوبی شي۰ دا ځانګړی حالت موجود دی یا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = ... = a_{n-3} = 0 \qquad (12, 27)$$

دn- می درجی برابرون بیا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; ....(12,28)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; ....(12,30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : په پورته کې له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون يو څلورئ - يا مربع برابرون دی، چی د جملي ۱۲
. ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی يا حل لري $x = 0$ چی دا (n-2)- ځله رامنځ ته
کيږي $x3 = x4 = ... = xn=0$

بيلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبيونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دئ، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; ....(12,32)$$

يو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ يا جفت
- وي

$$n = 2k \qquad (12 . 33)$$

او فقط (ټيك) ځله ووني يا کوايفيځينتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; ....(12,34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; ....(12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره د y لپاره ځلورۍ برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12, 36)$$

د لاندې ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k/2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0};......................(12,37)$$

د(۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1;..........................(12,38)$$

ټولې اوبیونې وځیرلی شي، چی د $k = 1$ لپاره ساده دی، د $k = 2$ لپاره(بیکوادرات برابرون) (د ځلورۍ یا د مربع مربع) یا د ریيلو $y1$ او $y2$ لپاره د تراوسه ځرګندو میتودو سره تل کیدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټولیزه توګه ستونځی لري.

بیلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بیکوادرات برابرون $x4 + 5x^2 - 6 = 0$ کیدی د سوبستیچیوشن یعني بدلون له لارې $y = x^2$ په ځلورۍ برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چی د بیرته بدلون(-سوبستیچیوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 , x^2 = -9$$

لاندې اوبی یا حل لري

$$x1 = 2 , x2 = -2 , x3 = 3i , x4 = -3i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسیستمونه چی بیرته په څلوری برابرونونو بد لید لی شي

یوه د نالاینیزو مساواتسیستمونو لړی کیدی شي چی په څلوری برابرون یا مربع مساواتو بیرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بیلګي راوړو.

بیلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$
$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کیږي، $y = 1 - x$، او دا حل په دوم برابرون کی اینوول کیږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$
$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$
$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$
$$x = 3, x_2 = -2$$

د (۱۲ ، ۴۰) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2, y2 = 3$$

نو دا نه لاینیز برابرون لاندي اوبیونې لري

$x1 = 3, y1 = -2$ او $x2 = -2, y2 = 3$

بیلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سیستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې يواځې د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وريا هدفمند دی، دوم برابرون په xy څلولو(ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کيږي:

y+ x= xy (12,42)

لومړی برابرون د y په لور ځواب کيږي
y = 1 - ax (12 , 43)
او په (۱۲ . ۴۲) کی ايښول کيږی يا ځای په ځای کيږي

1-ax+x=x(1 - ax) = x - ax²
, ax²- ax+ 1 = 0 (12,44)
د a = 0 په حالت کی (۱۲ . ۴۴) برابرون مخامخوالی لري يا په ټپوالی لري يا تضاد لاس ته راکوي » 1 = 0 « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴) څخه لاس ته راځی x² - x +1/a = 0
او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$
د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \text{.......................}(12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه بايد په پام کی ونيول شي:
د a > 0 لپاره له (۱۲ ، ۴۵) څخه لرو , a > 4 او د a < 0 لپاره له (۱۲ ، ۴۵) څخه لرو . a < 4 له دې امله د
a < 0 او a > 4 (12 , 46)
لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ريل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{....................}(12.47)$$

په دې پوروې د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{.................}(12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وازمایيل شي چی د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول) نابرابر په صفر دي . تل x1 > 1 /2 دی. که x2 = 0 وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هیڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی که y1= 0 یا y2 = 0 وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم *لرو* $y_1 \neq 0; \ y_2 \neq 0.$ په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) سر ه سم، دوه

مختلف رییل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي x2, y2 . او x1 , y1

د

1/4-1/a=0 <=> a=4 (12 , 49)

لپاره(۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲، ۴۴) ډبل رییل حل لري

x1 = x2 = 1 /2 (12,50)

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت ډبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

y 1 = y2 = 1 - 4. (1 /2) = -1

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ . ۱۹) یو ریل، ډبل ګڼلی حل موجود دی

x1=x2=1/2 , y1=y2= -1 (12 , 51)

د

1/4-1/a < 0 <=> 1/a > 1/4 (12 , 52)

لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د 0 < a لپاره (۱۲ ، ۵۲) د a<4 کټمټ (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کټمټ دی (له دې امله په ښتوالی یا تضاد) .

نو د(۱۲ ،۵۲) باور لري، د

0 < a < 4 (12 , 53)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره . په دې حالت کی (۱۲ ، ۴۴) کونجوګيري کمپلکس اوبيونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i;\ x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i; \qquad (12.54)$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخی په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i;\ y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i; \qquad (12,55)$$

له دې ارزښتونو هيڅ هم صفر کيدی نه شي .پس په يوځاي شوي يا راټوله توګه لرو: برابرونسيستم (۱۲ ، ۴۱) د $a = 0$ لپاره اوبی نه لري، د $a < 0$ په همدې ډول $a > 4$ لپاره دواړه ريل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د $a = 4$ لپاره ريیل ډبل ګڼلي اوبۍ (۱۲ ، ۵۱) او د $0 < a < 4$ لپاره دوه کونجوګيري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ، (۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲ . ۳ دريمه درجه مساوات یا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې n- (ام (درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سيستم جملو ته ورته جملی د دريمی درجی مساوات لپاره ځيړو.
د دريمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولينوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad (12 , 57)$$

لاندې بنستيز خويونه لري: که x ډير لوي شي يعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی د x^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بيړه جګيږي او بيا همداسي و x ته هم . که a1 او a2 کميز يا منفي هم وي نو y به د لويو x- ارزښتونو لپاره زياتيز يا مثبت وي. داچي x^3 د کميز x - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول

x->-o د y -> -o

لپاره .د دې ډول »پولوارزښت يا ليمس« لپاره کره تعريفونه بيا په ۱۹ برخه کی په پراخه توګه څیړل کيږي .د يو-x ارزښت) خورا کوچنی هم کيدی شي (شته چی د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره $y < 0$ وي اود یو x - ازښت) چې خورا لوي هم کیدی شي) ، د کوم لپاره چې $y>0$ دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ باید د مساوات (۱۲ . ۵۶) یو ریبل اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلګو کی سړی کړی شي چې په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائیلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توګه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلګی:

بیلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \qquad (12, 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$X = 0 , 1 , -1 , 2$

$Y = 12 , 6 , 12 , 0$

په دې توګه یو ریبل صفرځاي پیدا شو

$$x_1 = 2 \qquad (12, 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شیما په بنسټ یو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چې بیا د مټ(توان= لوړولو ته اړتیا نه پیدا کیږي او پولینومونو د فنکشن ارزښت ساده پیدا کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 + (11 / 2) x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad (12 . 61)$$

د صفرځاي پیداکولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰)مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي)ترتیب شي وشمیرل شي (، ځکه چې هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$X = 0 , 1 ,1 / 2$

$Y = -9 , 16 , \quad 0$

نو

$$x_1 = 1/2 \qquad (12, 62)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) یو ریبل صفرځای دی

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12, 63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3
Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لارې لاندې ریبل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12, 64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \qquad (12, 65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1
Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12, 66)$$

په تولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چی د دریم درجی برابرونسیستم (۱۲ . ۵۶) لپاره تل یو ریبل اوبی یاحل x1 شته دی. دا یو واقعیت دی چی بي له شوونی یی لیکو، چی دا پولینوم (۱۲، ۵۷) بي له پاتي په لاینیز فاکتور (x - x1) ویشل کیدی شي او یو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دریمه درجه برابرون (۱۲ . ۵۶) کم له کمه یو رییل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.............(12,67)$$

دلته نو بیا نور د دریمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلورۍ برابرون یا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کیدی شي چی لاندې جمله فرمولبندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دریمه درجه برابرون درې اوبیونې یا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad (12 , 68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - درې رییل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی (موجود دي)

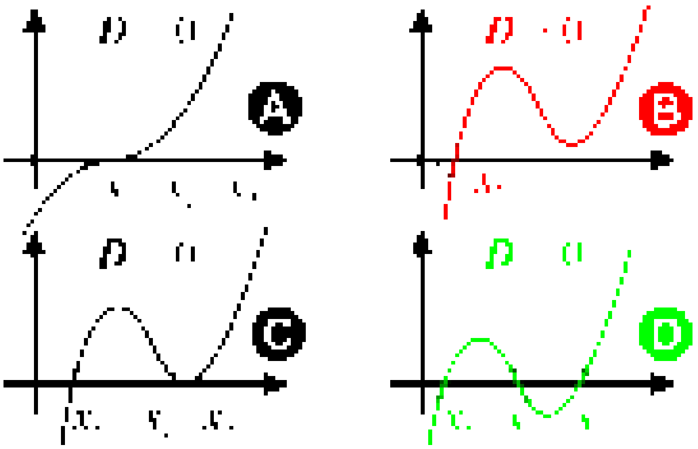
۲ - یو رییل حل x1 او ددې سره مختلف یو ډبل رییل حل x2=x3شته دی .

۳ - یو رییل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - یو رییل حل x1 او یوه جوړه کونجوګیرت کملکس اوبیونې یا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې ځیره د ټولو راشنل فنکشنونو(۱۲ . ۵۷) تیپیکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښایي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د بنې اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کيدی شي د دريمی درجي پولينومو لپاره د وييتا جمله تصديق کړي چې د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x_1 , x_2 او x_3 د دريمي درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اوبيونې وي ، نو لاندې باوري دي

$$a_0=-x_1.x_2.x_3 \qquad (12,69)$$

$$a_1=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 \qquad (12,70)$$

$$a_2=-(x_1+x_2+x_3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بيلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx_2 او x_3 اوبيونې ولټول شي.

بيلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی $x_1 = 2$ حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . . ۲ ۴ . برخي له مخي د پارشل Partial -(ټوټه-(ويش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$..\underline{x^3+2x^2}$$

$$........-x^2-4x+12$$

$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$

$$..............-6x+12$$

$$..............-6x+12$$

له $x^2 - x - 6 = 0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو رییلو ځوابونو سره

، $x1 = 2$, $x2 = 3$, $x3 = -2$

او داسی دی:

$$x^3-3x^2-4x+12 = (x-2)(x-3)(x+2)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخی اوبی

$$x1 = 1/2$$

لري او داسی دی:

$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا (□) له $x^2 +6+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه رییل حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل رییل حل سره، یعنی لرو $x1=1/2$, $x2=x3=-3$ او داسی دی

$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د(۱۲ . ۶۴) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$

له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسی دی

$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵) برابرون د (۱۲ . ۶۶) برابرونونو له مخې ځواب $x1 = 1$ لري، او داسې دئ

$$(x^3 - 5x^2 + 17x - 13):(x-1) = x^2 - 4x + 13$$

له $x^2 - 4x + 13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملې ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه ریبل حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = (x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) = (x-1)(x^2 - 4x + 13)$$

۱۲ . ۴ د ریښې (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کې د ریښې رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرګند شو چې ځنګه د ریښې برابرون په ریشنل برابرونو اوله دې سره n- مې درجي برابرونو بدلیدلي شي٠ دا دې دلته د بیلګو په څیر پاتي وي. یواځي ریبل اوبیونې به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :

د ریښي برابرون

$$7 + 3\sqrt{2x+4} = 16; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,72)$$

ډیر ساده کیدی شي چې په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4} = 9; \sqrt{2x+4} = 3; 2x+4 = 9; 2x = 5; x = 5/2; \ldots\ldots\ldots (12,73)$$

د ازمایلو لپاره که (۱۲ . ۷۳) برابرون په (۱۲ . ۷۲) برابرونونو کې خوندي شي، نو څرګندیږي چې دا د x-ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7 + 3\sqrt{5+4} = 7 + 3.3 = 16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۲ . ۱۵:

د ريښى برابرون يا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0; .... (12,74)$$

کيدى شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3; .... (12,75)$$

د ازمايني لپاره، که (۱۲ . ۷۵) د پيل په برابرون (۱۲ . ۷۴) کى خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون (۱۲ . ۷۴) ځواب نه دى . په دې لاس ته راوړنو سره يا په دې تعقيب د پيل برابرون ځواب نه لري.) داسي کيدى هم نه شي، ځکه چي تل $2x + 19 > 0$ دى)۰

دا ساده بيلګى موږ ته را ښايي چي بايد د ريښى مساواتو حل تل وازمايل شي چي ايا په ريښتوني دا ځواب دى او که نه، او دا په داسى ډول چي شميرل شوي ارزښتونه په پيل مساوات کى کيږدي چي ايا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل يواځي د ازمايلو لپاره نه دئ چي ګوندې تيك يا صحيح شميرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب يو اړيين سما نديز پل يا ضروري منطقي پل دئ .

په ټوليزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f(x)=g(x) \qquad (12,76)$$

په يو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x)=G(x) \qquad (12,77)$$

چى د برابرون دواړو لورو ته يا يو څه ور زيات شي ، يا ترى کم شي، يادواړه خواوې په يوه ګڼ ځل (ضرب) شي او يا وويشل شي (په دې حال کى بايد پرويشونى صفر نه وي، ځکه چى په صفر ويشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوى د ريښى لاندې راشي او ياپه توان پورته شي نود پيل برابرون (۱۲ ، ۷۶) هر ابى بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دى ، مګر نه په ځټ (برعکس، مخامخ). کيدى شي چى اړول شوى برابرون (۱۲ . ۷۷) زيات ځوابونه ولري نسبت و پيل برابرون (۱۲ ، ۷۶) ته . دا به په لاندې بيلګه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۶:

د ریښي یا جذر برابرون یا مساوات

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1} \quad (12 . 78)$$

څلوری یا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بیا څلوری یا مربع کولو سره سړی یو مربعمسوات لاس ته راوړي

x(x-1) = 0 (12 , 79)

چې لاندې اوبی یا ځواب لري :

$x_1 = 0, x_2 = 1$ (12 . 80)

دا د (۱۲ . ۷۹) اوبیونې دي، مګر باید و ازمایل شي چې ایا دا د (۱۲ . ۷۸) اوبیونې هم دي که نه.

د x = 0 لپاره په (۱۲ . ۷۸) کې دوه ریښې نه دې تعریف یا ددوه ریښو پیژند نه شته، نو x = 0 د (۱۲ . ۷۸) اوبیونه نه ده .

د x = 1 لپاره لاس ته راځي 1 - 0 = 1

له دې امله x = 1 د پیل بیلګی (۱۲ . ۷۸) یوګونی ځواب یا اوبی دی .

بیلګه ۱۲ . ۱۷:

د ریښی برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0, \ldots\ldots\ldots\ldots (12,81)$$

کیدی شي چې په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} \Rightarrow$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2; \ldots\ldots\ldots (12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برابرون یا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm1, x_1=3, x_2=1, ...(12,83)$$

د ټولونورو x لپاره $x^2-4x+3|=0$ دی ، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2-7x+3=x^2-4x+3$$

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

$$x3=0, x4=x1=3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1=3, x_2=2, x_3=0$$

پیل برابرون ډکوي.(باوري کوي، پوره کوي)

د $x=3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0}-\sqrt{9-12+3}-\sqrt{18-21+3}=0$$

له دې امله $x=3$ د پیل برابرون یا مساوات (۱۲ ۸۱) اوبی یا حل دی . د

$x3=0$ او $x2=1,$

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون (۱۲ . ۸۱)

اوبی حل $x=3$ (12 . 85)

یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدټاکلو ضربیونو سره

1.1.1. a) $x^2-4=0$ b) $3x^2+27=0$

c) $x^2-9x=0$ d) $5x^2=125x$

1.1.2. a) $(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})=\frac{7}{12}$ b) $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})=\frac{5}{16}$

c) $(x-6)(x+5)=0$ d) $(x-\sqrt{7})(x-\sqrt{5})=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضريبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سيتم، کوم مو مربع مساوتو ته لاربنبنودوي يا بيايي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$ b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مې درجې ځانګړي مساوات، چې‌په مربع مساوات بيرته اړول کيدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو يا معلومو ضريبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو يا نامعلومو ضريبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a-b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a+b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مې رجې مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$ b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$ d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د xاو هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\, x - a = 0$ b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$ d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګڼونه ځان داسې نيسي لکه 1 : 3 . ددې ګڼونو د مربع زياتون ۱۵۶۰ دی. دا ګڼونه څه نوميږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د درې یو په بل پسې ګڼونو د لوي ګڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنیوګڼونو د مربعو زیاتونونږ. دا ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

پ) د کوم مثبت ګڼ لسرځله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت) مات 1/4 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزیه کړی، چې لاندې زیاتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ یې لاس ته راشي.

۶ . ۲ . الف) په یوه برابر برقجریان کی مقاومت په دیرش اوم Ω 30 لوییږي، په کوم کې چې د برققوه په همغه د 220 V (وولټه) شپانونګ په پنځه امپیر (1,65A) کوچنی‌شي . مقاومت او برققوه څومره دي؟

ب) دوه سیخونه چې مقاومت یې Ω 60 یو له بل توپیر لري، چې یوه د غبرګ چالانولوعمومي مقاومت Ω22,5 کړي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

۶ . ۳ . الف) یوه د بایسکلځغلونی لار چې ۲۲۵ کیلو متره اوږده ده، د یوه موادو موټر څخه په درینیم ساعته لنډ وخت کې وهل کیږي،چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بایسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بایسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دي؟

ب) د سپورت جشن کې یو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپیل څخه یونیم ساعت وروسته له یوه بایسکلسپورتي څخه وروسته کیږي، کوم چې له مخامخ کیدو, نیم ساعت وروسته B ته رسیږي، او سملاسي بیرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسیږي په کوم کې چې ځغاستنی و B ته رسیږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لری ده؟

پ) دوه ډبډبي ځغاستي یوبل باندې نیغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور په ډبډبیو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانیه کی، دوم څلور متره په ثانیه کی دی دوي له ۳ ثانیو وروسته یو ۳۵ متره لریوالی یو له بل لري، دوي یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لرووده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نږدې وو؟

ت) د ګاډي یو لاین د موټرڅغاست سرك لمړی برخې سره غبرګ غزېدلی. د یوه موټر څغاستي پیل کې د یو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشینونه په همغه جګوالي دي، که موټرڅغاستی منظم تعجیل او یو تعجیل د $10 m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72\ km/h$ دی؟

ټ) په منځنی سرعت $v_m = 18 km/h$ په ۶ بجو له لایپځیږ څخه د دیساو په لور بایسکل څغلیدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له دیساو څخه د لایپځیږ په لور راتلونکی بایسکل څغاستی سره مخامخ کیږي. ورستنی ۱۰۰ دقیق د مخه دیساو ته راځي لکه دوم ولایپځیږ ته. د دیساو او لایپځیږ ترمنځ لرېوالی یا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړنځیز دریګوډي کې ، کاتیتې څانونه داسې یوبل سره نیسي لکه 3:4 ، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب) د یوه ولاړکونجیز دریګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتیتو زیاتون یې۱۷ سانتیمتره اود یوې کاتیتې او هیپوتینوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ) د یوه سمکونجیز (ولاړکونجیز) دریګوډي کاتیتې څومره لویې دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتیمتره وي ، د دریګوډي هواردتنه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت) د یوه ولاړګوډي نیمی (قطر) ۳۵ سانتي متره اورد دی، که د ولاړ ګوډي اورد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لویږي. د سمکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري.
د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاړ اړخ)

ټ) د یوې ګردۍ وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګرد کې دننه خاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا څونډي مربع اړخ)

ج) د یوې ګردۍ نیمي باید څومره لوي، که د دننه منخشوې مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح) که د یوې ګردۍ نیمي (قطر) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردۍ هواره دوه برابره کیږي. د ګردۍ سرچیني نیمي څومره لویه ده؟

خ) د یوه نیمغونډي نیمي څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشه کې یې ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د دریمې او څلورمې درجې مساوات

2.1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې د لاندې مساواتو حلونه یا اوبیونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازماېښت وکړئ!

۳ . ۱ – ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا څلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\dfrac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\dfrac{4}{5}$ d) $\dfrac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{7}-\dfrac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\dfrac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\dfrac{16-\sqrt{x}}{2}-\dfrac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\dfrac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\dfrac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\dfrac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\dfrac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\dfrac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\dfrac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $|\sqrt{3x+7}|+|\sqrt{4-x}|=3$

3.1.10. a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\dfrac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $(\sqrt[3]{x}-1)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۲ – ریښه مساوات د نامعلومو ضریبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x} = a$ b) $\sqrt[3]{x} = b$

c) $a - \sqrt[3]{x} = b$ d) $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$

3.2.2. a) $\sqrt{x-a} = b$ b) $\sqrt[3]{a-x} = b$

c) $\sqrt[4]{a^4 + x} = a$ d) $\sqrt[6]{a^6 - x} = b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - \sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$

b) $(a - \sqrt{x})(b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})(d + \sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax} - b}{\sqrt{ax} + b} = \dfrac{3\sqrt{ax} - 2b}{3\sqrt{ax} + 5b}$ d) $\dfrac{2a + 3\sqrt{bx}}{3a + 2\sqrt{bx}} = \dfrac{3b + 2\sqrt{ax}}{2b + 3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c + d}$ d) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a\sqrt{x} + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c\sqrt{x} + d}$

3.2.5. a) $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$ b) $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$

c) $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$ d) $\sqrt{x + a^2} - \sqrt{x} = b$

3.2.6. a) $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \dfrac{b}{\sqrt{b-x}}$ b) $\sqrt{x+a} - \sqrt{5x - 3a - 4b} = \dfrac{2b}{\sqrt{x+a}}$

c) $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \dfrac{x + a - b}{\sqrt{x+a}}$

d) $\sqrt{3a - 2b + 2x} - 2\sqrt{3a - 2b - 2x} = \dfrac{a + 2b + 2x}{\sqrt{3a - 2b + 2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = \dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{3x^2 - 1} - \sqrt{3 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ ، ۳ – مساوات سيستمونه، چې ريښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$, $\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$, $x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$, $x+y=3$

3.3.2 a) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{a}{b}$, $xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\frac{a}{b}$, $x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$, $y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$, $y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسځندنت برابرونونه یا ـ مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دې ته ګوته نیول شوې وه، چی دلته یواځې هغه ترانسځندنت مساوات څېړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي.
دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتې اوبیونې یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځای په ځای یا کېښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیونې پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅېړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,1)$$

د بنسټ $b = 10$ لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په څېړ یا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b......................(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دئ

$$l\,\text{og}_b\, x = c....................................(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخې لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سې افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$:

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبیونه په لاندې تولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b\, f(x) = c..(13,5)$$

دلته (f(x یوه الجبري وېینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دئ

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2 (x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$ (همداسی) $x^2+x+6=2^3= 8$

او لاندې اوبیونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کیڼې لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وېینه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x) + r_2.\log_2(x) + r_3.\log_b g_3(x) + ... = c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹) کاروني یا استعمال ښخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}..................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1) + \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3(x-1) = 2$ ښخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې ښخه ریښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له ځلوری یا مربع کولو ښخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

تیټك دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ ښخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني

که $1<(b+3)/b-2)$ وي.

د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دې لرو $3>-2$دا د ټولو b لپاره پوره دی

د. $2 \le b$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b

لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $2 \le b$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وینې یا افادې دي. د بدلون کاروايي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x) \ldots\ldots (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه ..y1,y2 په (۱۳,۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳,۵)

لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i ; \quad i = 1,2,3,\ldots \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳,۹) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $log^2x-lgx-2=0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y=lgx$ سره په
څلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .
د $y1 = 2$ او $y 2 = -1$ ځوابونو سره
له $lgx=2$ او $lgx=-1$ لاس ته راځي.

$$x1 = 10^2=100 \quad \text{او} \quad x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(lgx +1)) + (8 / (lg x -1)) = 3$
د$x>0$, مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چی د اصلي ماتلاندې $(lgx+1)(lgx-1)$ سره
حل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(lgx-1)+8(lgx+1)=3(lg^2 -1)$$

$$, \quad 6lgx-6+8lgx+8=3lg^2x-3$$

$$0=3lg^2x-14lgx-5$$

او د بدلون $y = lgx$ سره مو لاندې څلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0 , y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{8}{3}; y_1 = lox_1 = 5; y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5; x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي، نو کيدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

ځخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4} + \log_4\sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \quad \ldots\ldots (13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وييني يا افادي(f (x اکسپوننتونه یاجګګڼونه وي، نو:

$$a^{f(x)}=b, a>0, a|=1, b>0 \qquad (13.16)$$

په دې ډول د لوګاريتمولو له لارې يو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b .... (13,17)$$

د کومو ځوابونه چی د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دی.

بيلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4}=4$

مو لاندې څلوری برابرون یا مربع مساوات ته بيايي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چی د پیل برابرون اوبيونې يا ځوابونه هم دي.

بيلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د يوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 , x_2 = -4$$

بيلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کی کیدی شي چي ناپيژندونکی د اکسپوننت یا په جګ څخه د دوه واره لوګاريتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5$ يا oder $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2}$,

$x = 1$ $x = 1.$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کيڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنستونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;..................................(13{,}18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13 . 19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چې د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وبینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت($f(x)$)سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)}) = 0\ ;..................................(13{,}20)$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13 . 21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبيونو $y_1, y_2, y_3;$............... لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 .... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, \ x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} ....(13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} ....(13,26)$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};..............................(13,27)$$

له دې ځخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

ټیك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1 \qquad ....(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاریتمولو ځخه تعقیبیږي:

x²-1=ln1=0,

x1 = 1 , x2 =-1

دواړه ارزښتونه پیلبراون پوره کوي۰
برسیره پر دې باید وښوول شي، چی په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ ځخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

$$\ln^2x-\ln x+1=\log_2 8=3$$

که کیږدو y = lnx ، نو دا ځلوری برابرون یا مربع مساوات y²-y-2=0 لاس ته راځي،د ځوابونو

y1 = -1 , y2 = 2

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

lnx=-1 , lnx=2, x1=e-1=1/e , x2=e²

۱۳ . ۳ ګونومتریکي- یا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګونومتري ساده برابرون لاندې ځیره لري

$$\sin x=a , \cos x=a \quad (13 . 29)$$

$$\tan x=a , \cot x=a, \quad (13 . 30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه (۱۳ . ۲۹) ځوابونه لري ، که $-1 \le a \le 1$ باور ولري، نور ارزښتونه sin x او cos x نه شي غوره کولی(پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشمیرني سره د تکمو یا ګوټکونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) یو ځواب لاس ته راځي
د(۱۳، ۲۹) لپاره

cos F a sin F a

د (۱۳،۳۰) لپاره

tan 1/x a tan a F

دا چي tan x او cotx پریودې همداسی 180^oلري او په یوه اینتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180^oلري د(۱۳ ۳۰) ټیك یو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x0 د(۱۳ . ۳۰) یو ځواب وي) چی د بیلګي په توګه د جبشمیرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ... -3, -2, -1, 0 1, 2, 3, ...; ....(13,31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په (۱۳ ، ۳۱) کی د بیلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30^o + k.180^o$$

د کونجونو فنکشنونه sin x او cos x پریودې(تل بېرته راګځېدنه یا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د
جبشمیرني سره یوه اوبیونه x_0 پیداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x = -x_0$
هم یو حل دی، او $x = -x_0$ د cos x = a په حالت کی یو بل اوبی

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د (۱۳ ، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه
په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; ....(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°; ....(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; ....(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°; ....(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه
لاس ته راځي: (په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º
(په لینده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427
د) ۱۳ . ۳۲ (،) ۱۳ ، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

x_k = 13, 833427 + k.360º = 0,24143 + k.6,28318,

$\bar{x}_k$ = 166,16657º + k.360 = 2,9001 + k .6,28318.

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشمیروني سره مومو

x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.

د (۱۳ ، ۳۴) او (۱۳ . ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

x_k = 133° + k .360° = 2,32125 + k.6,28318,

$\bar{x}_k$ = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4{,}843000$ حل په جبشمیرنې پیداکوو

$x_0 = -59{,}999988° = -60° = -1{,}04718$

له دې امله د) ۱۳ . ۳۱ (له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځې

$x_k = -60° + k.180° = -1{,}04718° + k.3{,}14159$

بیلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4{,}843000$ ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرنې سره داسی

$x_0 = 11{,}666677° = 11{,}67° = 0{,}203675$

لاس ته راځې. په دې توګه د (۱۳ . ۳) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11{,}67° + k.180° = 0{,}203675 + k.3{,}14159$

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د ګونومترې مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرګندومتودو یا لارو ځوابوړ دې، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a\,, \quad \cos f(x) = a \qquad (13.36)$$

$$\tan f(x) = a\,, \quad \cot f(x) = a \qquad (13.37)$$

دلته کیدی شي چی $f(x)$ الجبري او یا ترانسځیندنته افاده وېکه بدل (سوبستیتوتي) شي

$$y = f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y = a\,, \cos y = a \qquad (13.39)$$

$$\operatorname{Tan} y = a\,, \cot y = a \qquad (13.40)$$

دا کیدی شي د جملی ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې $y3, y2, ,y1, \ldots$ وي .

د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د $f(x) = yi\,,\ i = 1,2,3,\ldots$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360° , k = ...,-3,-2,-1, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$, $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبوني (حلونهو په توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90°+3k.360°+120° = 210° +3k.360°$$

$$\overline{x}_k = 3y_k + 120° = 450° + 3k . 360° + 120° = 570°+3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x, \sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x, ...) \qquad (13 . 42)$$

دلته که د بیلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13 . 43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2y^2$$

(او نور usw.

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳)، په y ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13 , 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې $y1$, $y2$.$y3$.... وي. نو بیاد(۱۳.۴۳)سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin x=y_i, i=1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چی په (۱۳ . ۴۲) کي ښول شي ، وازمایل شي، چی ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۱۳ . ۴۲) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x),....) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سړی بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:

برابرون

$$\sin x+\cos x=1 \quad (13.49)$$

د (۱۳ . ۴۲) ، (۱۳ . ۴۴) سره ځان په رینه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \Leftrightarrow \pm \sqrt{1-y^2} = 1-y \Leftrightarrow 1-y^2 = 1 + y^2 -2y \quad (13.50)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0 , y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي ، چی د y2=1 لپاره برابرون (۱۳ . ۵۰) او له دې سره سم برابرون (۱۳ . ۴۹) تل پوره دي. د دې په څټ یا خلاف y1 فقط د (۱۳ .۵۰) حل دی ، که د

رینی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښه وي. دا حالت یوائې هلته مخ ته پروت دی، چی $\cos x>0$ وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۱۳ . ۵۱) سره برابرون (۱۳ . ۴۶)حل یا اوبی شي او

حل یا اوبونه یی په (۱۳ . ۴۹) کی کیښول شي:

$$\sin x=y_1= 0 , x_k = k\pi ; \; k=...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x=y_2 =1 , x_k = \pi/2 + 2k ; k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (۱۳ . ۵۲) په (۱۳ . ۴۹) کېښوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځي جفت ګنونه دي($x\pi = 2k\pi$) که(۱۳ . ۵۳) په (۱۳ . ۴۹) کېښوول شي، نو لاس ته راځي

$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د (۱۳ . ۴۹) ټولې اوبیونې په لاندې بڼه لاس ته راځي

$x_k = 2k\ ,\ x_k = \pi/2 + 2k\ ;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,...$ (13 . 54)

بېلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0$ (13.55)

سره کیدی شي د ریښنی مساوات څخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \qquad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳,۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \qquad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$,

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad y_2 = -1. \qquad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې اینوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad x_k = 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \qquad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1,\quad \bar{\bar{x}}_k = 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi, \qquad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60^\circ \\ 180^\circ \\ 300^\circ \end{Bmatrix} + k \cdot 360^\circ = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \qquad (13.62)$$

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول ارزښتونه x وشمیری، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره یې ازمایل یا ازماېښت اړیندی.

۱ - لوګاریتمي مساوات یا برابرونونه

1.1. a) $\log_4 (x + 1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg \sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln (x - 1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg (2x + 5) - \lg (3x + 1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg (x - 1)^2 = 6 \lg 2$

1.3. a) $\lg (x - 1) + \lg 3 = \lg (x^2 - 1)$

b) $\lg (x + 1)^2 = \lg 2 + \lg (x + 1) + \lg (x - 1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg (x + 4)$

d) $\lg (x - 2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg (x + 1)$

1.4. a) $\lg x + \lg (x + 1) + \lg (x - 1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2 \lg x = \lg (4 + x^3)$ c) $\lg (152 + x^3) - 3 \lg (x + 2) = 0$

d) $2 \lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg (a - \frac{1}{a}) = \lg (1 - \frac{1}{a}) + \lg (1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg (ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg \frac{x}{abx - 1} = \lg (a - 1) + \lg (a + 1)$

d) $\log_a (2x + 1) = \log_a (x - 1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg (x^2 + 1) = 2 \lg^{-1} (x^2 + 1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1 - x)} + 5 \lg (1 - x) = 6$

1.8. a) $2\lg \lg x = \lg (3 - 2 \lg x)$ b) $\log_2 (x - 14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 (3x - 26)$

c) $4 \log_3^3 5x - 7 \log_3 15 x + 7 = 0$ d) $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25\lg x}$

c) $x^{\log_5(5x)-4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x\lg\sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$

c) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$ d) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0$ b) $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$

c) $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1$ d) $\dfrac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$

۲ - اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$

c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$

c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$

c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$

c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$

e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$

g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$ b) $2^{x+1} - 3^{x} = 2^{x+3} - 3^{x+2}$

c) $3^{2x-1} - 5^{3x-2} = 3^{2x+1} - 5^{3x+2}$ d) $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x} + 2 = 0$

e) $5^{4\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 = 0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2 = 0$

g) $3^{x+1} - 2 = 9^{x}$

h) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^{x} + 5^{x-1} + 5^{x-2}$

i) $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$ j) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$

k) $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$ l) $3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}} + 0{,}5 + 9 = 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x} - 17 \cdot 2^{-(x+2)} + 1 = 0$

e) $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2}$ f) $12\sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$

i) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

2.8. a) $\frac{3^{x} + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x} + 1}{2^{x} - 4^{x}} = 6$

c) $4 + \frac{2}{3^{x} - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x} + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x} = x$

۳ – گونومتریکي – یا کونجکچیز مساوات

3.1. a) $\tan x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x = \frac{2}{5}$ d) $\tan x = -1$

3.2. a) $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0{,}309$ b) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 0{,}809$ d) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$

j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$

l) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x - 3\sin x \cos x = 0$

b) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

c) $\tan^3 x + \tan^2 x \;\; 3\tan x - 3 = 0$

d) $\tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 0$

b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 1$

d) $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$

e) $1 - \sin x = \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$

f) $2\sin^2\frac{x}{2} = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$

g) $1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0$

h) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$

i) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$

j) $1 - \sin x\cos x + \sin x - \cos x = 0$

k) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$

l) $\sin x\cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$

m) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$

n) $(\cos x)^{\sin x} = 1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

۱۴ . ۱:نابرابرون(نامساوات)

۱۴ . ۱ . ۱ بنسټیزې کلیمی او شمیرقوانین

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنخښی$<, \geq, >$ او $\leq$ له لارې یو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کی به نابرابرونونه تر څېړنی لاندې ونیول شي، چی یوه یا دوه رییلی واریابلی یا اوښتونی ولري . یو نابرابرون د دوه واریابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښایي، د هغو سره چی واریابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګنددي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دی ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واریابل یا اووښتونې یی غوره کولی شي او په ترم کی د هغي ځاي په ځاي کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونی وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډیري L کی سره راټولیږي.
په لاندې برخه کی به ډیر د وینامنطق(وېناسم اندیز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ (او د ډیري عملیو سومبولونه) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شمیرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونیول شي(مقایسه برخه ۳)، دلته دې a , b , c او dرییل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c, \qquad (14,1)$$
$$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c \qquad (14,2)$$
$$a:b<b:c \qquad (14,2)$$
$$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c \qquad (14,3)$$
$$a:c> b:c \qquad (14,3)$$
$$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c \qquad (14,4)$$

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په ښټ کیږي یا که غواړئ برعکس کیږي. د بیلګي په توګه $3 < 4$ مګر که داوړه خواوې د 1 - سره ځل شي نو لاس ته راځي $-3 > -4$

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښنو > سره باور لري دا په دې مانا چی$a \leq b$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز (مثبت)دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$$a.b>0 \Leftrightarrow \qquad (14,5)$$
$$\Leftrightarrow a:b>0\ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0), \qquad (14,5)$$
$$a.b<0 \Leftrightarrow \qquad (14,6)$$
$$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0). \qquad (14,6)$$

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \mid= 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې توییریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$$a.b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq \wedge (a \geq 0) \vee (a<0 \wedge b<0) \qquad (14,7)$$
$$a:b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b>0) \vee (a \leq 0 \wedge b<0) \qquad (14,8)$$

۱۴ . ۱ ۱الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :

یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلګڼونوR برخه ډیر) ده٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو اینټروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشي ، د ګڼکرښې یوه ټاکلی برخه ده، چې له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینټروال کی دننه وي یا خونديږ وي نو د بند

اینټروال څخه غږیږو او که اینټروال پورې اړه ونه لرې، واز اینټروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینټروالونه.
د اوبیډیری په ورکولو سره په ګڼکرښی باندې، لاندې د انیټروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینټروال مختلف تیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده.

1. $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ واز اینټروا ، اخر تخري په اینټرول اړه نه لير
2. $[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ بند اینټروال ، اخر توري په اینټروال ئوري اړه لري
3. $[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$ ښی واز اینټروال
4. $(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$ کیڼ واز اینټروال
5. $(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$ ښي لورته ناپاي او کیڼ لور ته واز اینټروال
6. $[a,\infty) = \{x \mid x \ge a\}$ ښي لور ته ناپای او کیڼ لور ته بند اینټرال
7. $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$ ښي لور ته واز او کیڼ ورته ناپاي اینټروال
8. $(-\infty,b] = \{x \mid x \le b\}$ ښي لور ته بند او کیڼ لورت ناپاي اینټروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینټروال ، ټول رییلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیری
11. $\varnothing$ تشډیری

لاندې اینټروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیری هم په اینټروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیری ټولنه ورسره جوړوي.

1. $[-\infty,b] = \{x \mid x \le b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \mid x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \mid x \ge a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,\infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty,\infty] = \mathbb{R}^+$

پورته ته الترناتیو یا بدیلي لیکنبڼه Alternative notation

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنبڼهٔ په لاندې ډول ورکو لکیږي

$]a,b[= \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \le x \le b \}$

$[a,b[= \{ x \mid a \le x < b \}$

$]a,b] = \{ x \mid a < x \le b \}$

یادونه : داپورته د اینتروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انیتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$

نیم و از اینتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\le b\}$

نیم واز اینتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\le x<b\}$

واز اینتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اینتروال : $(-oe,b]=\{x|x\le b\}$

کبڼ بند ناپای اینتروال : $[a,oe)=\{x|x\ge a\}$

ښی واز ناپای اینتروال :۰ $(-oe,b)=\{x|x<b\}$

کیڼ واز ناپای اینتروال :۰ $(a,oe)=\{x|x<b\}$

ناپای اینتروال : {x د ګښکرښی تکی دیٔ|x}=(oe ،oe-)

بیلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستیزه ډیری Rکی د لاندې برابرون پیژندډیری غوښتنه منځ ته راچوو.

$x - 2 =1 + 7 - x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : د دې ترم T1(x) = x - 2 پیژنددېری ده:

D1 = [2 , oe)

په همدې توګه د ترم T2(x)=1+7-x پیژنددېری ی ده: D2 =(-oe,7)

د برابرون دپیژنددېری لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \cap D_2 = [2, \infty) \cap (-\infty, 7] = [2, 7]$$

لاندې ځیره وګورې(متاسفانه، چې ښه ځېره نه شم کښلی)

D2=(-∞;7]

D1=[2;∞]

۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعد ې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چی یوه اوښتونې یا مجهوله ولري، او اوبیونې یی په ټولیزه توګه د اینتروالونو له لارې انځوریږي.

(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو 5x-6<4+9x دواړو لورو ته 6 + 9x- ورزیاتوو، نو لرو 10 > 4x- دواړه خواوې په 4 - ویشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي x > -5/2

د اوبیونې ډیر یا اوبیدیری : L=(-5/2,oe)

که په یوه غوښتونکی حل یا ویش کی ځله وونی، همداسي پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مخنخښي په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چې وي، باید په پام کې ولرل شي، چې یواځې هغه د نابرابرون شمیرل شوي د x - ارزښتونه اوبیونې دي، چې ټول ی سملاسي (په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډیرۍ یا برخحلډیرۍ کیدی شي چې د غوخډیرۍ په څیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیرۍ شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوخډیرۍ جوړښت، کیدی شي چې د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په څیر په ګنوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیرۍ د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیرۍ ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

$$(3x-5)(x-2)<4(x-2)$$

که په (x-2) باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د x > 2 لپاره (x-2)>0

د x = 2 لپاره (x-2)=0

د x <2 لپاره (x-2)<0

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$$x > 2 <=> x \in (2, \infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته بڼه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x-5 \leq 4 <=> 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3]$$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځې هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چې په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځې هغه x د

$$x \in (2, \infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$$L_1 = (2, \infty) \bigcap (-\infty, 3] = (2, 3]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم حالت:

$$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$$

د لته په (x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.

د x = 2 ارزښت لیکلو ربښتیا وینا 0 ≥ 0 لاس ته راځي او له دې امله

L2 = {2 }

دریم حالت:

$$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$$

د 0 > 2 - x له امله د (۱۴ . ۳) له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کې راوړل شي:

$$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$$

د برخه اوبیډیریو ټولنی څخه ټول اوبیډیر) لاس ته راځي:

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$$

نو ټولې اوبیونې هغه x د ي د کومو لپاره چې لرو: 3 > x >2

په لاندې بیلګو کې نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

(3x-1)/(2x+4)<2

د شرایطو 0=|2x+4له مخې، دا په دې مانا چې 2=| x د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د x>-2 لپاره 0<(2x+4)

د x<-2 لپاره 2<(2x+4)

سره سم یواځې دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

ځیره ۱۴ ۱ الف: دا ځېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبیډیری روښانه شو۰

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی۰

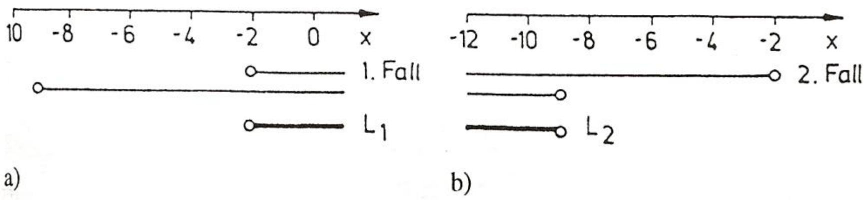


Bild 14 1

ځیره ۱۴ ا ب : دلته هم ګڼونوکربنې شته، چۀ په هغې کې دا اوبیډیری روښانه کاږل شوي دي۰ ، که ځیره مې ونه کاږله، نو داکار بج ګران لوستونکی هم وکولای شي۰

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چی په (۵.۱۴) تر (۸ . ۱۴) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښايي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګې راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښنته شوي، له دې امله يې ليکښه د مخکنۍ ليکښې سره توپير لري. دا لاندې لرو .

$$ax + b > 0, \qquad a \neq 0$$;

$x^2 - 5 < 0$;

$|2x - 5| \leq x + 10$;

دلته اوبیونې اینتروالونه دي. ښول کيږي، چې اوبيډيرى څنګه پيداکيږي او د دې لپاره

اړيين شرايط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه ګڼ زياتيدلی يا کميدلی شي
- که دواړه خواي د کميز ګڼ سره ځل شي يا په کميز ګڼ وويشل شي، نو مخنخښه تغير خوري. که زياتيز وي، نو دواړه خوا په توان کيدی شي او ريښج يې وستل کيدی شي، پام دې وي، چې برابرون بيا زياتيزه او که کميزه مخ نخښنه غوره کوي او يا دواړه
- موږ 1.9:1(اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلسټ يا اوبيډيرى

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبيډيرئ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ 1.9:2(اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \Longleftrightarrow x^2 < 5 \Longleftrightarrow |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روانسه تشيرح لپاره يا شننې لپاره يو د حالت توپير رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا يا $x > -\sqrt{5}.$ ورته نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \Longleftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبيډيرئ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x - 5 \leq x + 10 \quad x \leq 15, \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x - 5 \geq 0 \quad x \geq \frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \geq 5 \quad \Longleftrightarrow$$

(i) که وي $2x - 5 \geq 0;$ نو دی $|2x - 5| = 2x - 5,$ او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 15.$$

$2x - 5 < 0.$ (ii)نو دی $|2x - 5| = -(2x - 5)$ او لرو

$$-2x + 5 \leq x + 10, \quad \geq -\frac{5}{3} \quad x \Longleftrightarrow \quad -3x \leq 5 \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x - 5 < 0 \quad x < \frac{5}{2}. \quad \Longleftrightarrow \quad 2x < 5 \quad \Longleftrightarrow$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیری له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې يو څو تمرينونه ورکړ شوي، کۀ ګران مينه وال يې غواړې تمرين کړي۰

لاندې نابرارونونه اوبی کړئ

(i) $\frac{3}{x+5} < 2$,

(ii) $\sqrt{x^2+x+2} > x$,

(iii) $|x+5| > |x-2|$.

بيلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$, $x|=-6$; $x |= 3$

د اصلي ماتلاندې (3-x)(x+6) سره د حٔل له امله بايد بيا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونيول شي. شرايط، د کوموله مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کيدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې وميندل شي:

$$(3-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6> \vee (3-x)<0 \wedge x+6<0$$
$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x>-6) \vee (x>3 \wedge x<-6) \Leftrightarrow -6<x<3$$

نو (۱۴ . ۶) شوونې کوي يا ممکنه وي، چی هغه ورشو(ساحه يا ډيری يا نه هم شهچاپيريال) پيدا کړو چيرته چی اصلي مات لاندې کميز يا نفي دئ:

$$(3-x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3-x) >0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$$
$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x>3$$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کي لرلو سره شميرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز ځله ووني یا مثبت فاکتور (3-x)(x+ 6) سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6\ge 6-2x \Leftrightarrow x\ge 0 \Leftrightarrow x\in[0,\infty),$$

$$L_2=(-6,3)\cap[0,\infty)=[0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x<-6\vee x>3) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-6)\cup(3,\infty)$

دا چی د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس(تاسیر لري:

$$x+6\le 6-2x\Leftrightarrow x\le 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,0)$$

$$L_2=[(-\infty,-6)\cup(3,\infty)]\cap(-\infty,0)=(-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $:L=L_1\cup L_2=[0,3)\cup(-\infty,-6)=(-\infty,-6)\cup[0,3)$

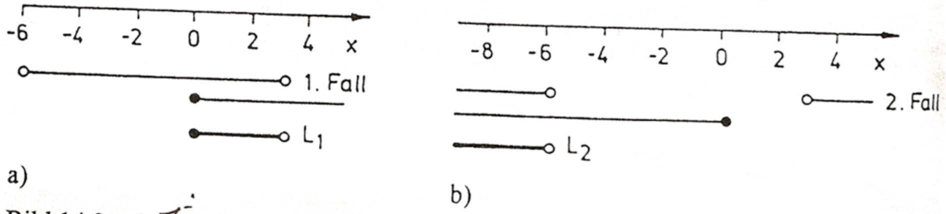


Bild 14.2 خاکره

د څلوری برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د څلوری ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کي نیولو سره دx^2 د مخ (کیڼ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چی دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چی د اړیکنخښي په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولووروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x_1=4 , x_2=1/2$$

$$x^2-\frac{9}{2}x+2>0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2})>0 \Leftrightarrow (x>4\wedge x>\frac{1}{2})\vee(x<4\wedge x<\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x>4\vee x<\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د (۱۴ . ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېری : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسیره دې په یاد وي چی داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کرېږ کښلو له مخی هم حل کیدی شي، په ځانګړي ډول هلته، چی اړوند مربع شکل رییل حل نه لري۰ بالاخره پېپای کې د وېش د مخنښي راوړلو یوه بیلګه ښایو.

بیلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\le 0,\ x\neq\frac{2}{3}$.

حل (۱۴,۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2}\le 0 \Leftrightarrow (x\ge -5 \wedge x<\frac{2}{3}) \vee (x\le -5 \wedge x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\le x<\frac{2}{3}.$$

د سیستم حل ډېری یا حل سټ: $L=[-5,\frac{2}{3})$.

۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی یا مجهولی یا اوښتونې سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیډیری L د یوګونو نابرابرونونو اوبیډیریو غوځډیری ده . ګټور یا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کی په نمره کړی شي ، ددې لپاره چی دا یوګوني (دا په دې مانا چی یو یو) اوبی کړی شو.

بیلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\ge 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\ge 3-x \Leftrightarrow x\le 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سیستم اوبیډیری: L دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۴ . ۸

$$-2 < \frac{4x-10}{x-1} < 3, x \neq 1$$

د داسی نابرابرون ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دی:

$$I. -2 < \frac{4x-10}{x-1}$$

$$II. \frac{4x-10}{x-1} < 3$$

د همغه فاکتور(x-1) سره د ځل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرګ د لیدوړ بڼی سره وڅیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :
(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

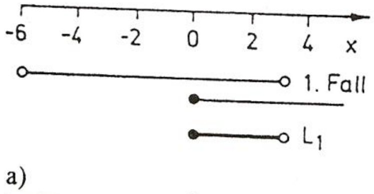
....I...II

	I	II
$1.Fall^{(1)}$ $x \in (1,\infty)$	$-2x+2 < 4x-10$ $\Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in (2,\infty).$ $L_{I_1} = (1,\infty) \cap (2,\infty) = (2,\infty)$	$4x-10 < 3x-3$ $\Leftrightarrow x < 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty,7).$ $L_{II_1} = (1,\infty) \cap (-\infty,7) = (1,7)$
$2.Fall^{(2)}$ $x \in (-\infty,1)$	$-2x+2 > 4x-10$ $\Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty,2).$ $L_{I_2} = (-\infty,1) \cap (-\infty,2) = (-\infty,1)$	$4x-10 > 3x-3$ $\Leftrightarrow x > 7 \Leftrightarrow x \in (7,\infty).$ $L_{II_2} = (-\infty,1) \cap (7,\infty) = \varnothing$
	$L_I = L_{I_1} \cup L_{I_2}$ $= (-\infty,1) \cup (2,\infty)$	$L_{II} = L_{II_1} \cup L_{II_2}$ $= (1,7)$

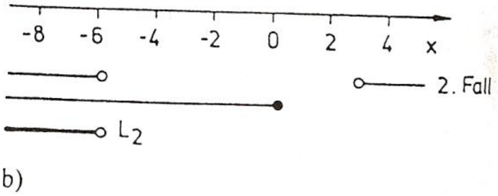
د LI او LII غوښتډیری جوړول بیرته کیدی شي چي د یوګونو اوبیډیریوګڼوړانګه باندې د لیدنی شي)(څیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیډیری:

$$L = L_I \cap L_{II} = (2,7)$$



a)



b)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو(ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیډیرۍ د یوه اوبیډیرۍ $R^2 = R\times R$ برخډیرۍ ده، چی د هوارې په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دی. په دې برخه کی به موږ یواځي د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \; (\geq 0 \; , <0, \leq 0 \;) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو x , y او ثابتو ځله وونو(ضریبونو)
$a,b,c \in R$

سره د شرایطو $a|=0 \vee b \;|=0$ سره سم تر څیرنی لاندې ونیسو.
که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چی د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم (۱۴ . ۹) ، چی ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیډیرۍ په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو(د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پرېښوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځاي شوي، نو راتلونکی کرښه د اوبیډیرۍ پورې اړه نه لري او کیدی شي یواځي ټوټه ټوټه کرښی (پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چی د ډیرۍ ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیرۍ پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د y په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چی په یوه کره نیولي x په روښانه توګه د لویو y - ارزښتونو لپاره پوره دی نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چی د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنی نیمی هوارې ټول ټکی اوبیډیرۍ L جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴)

دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون (۱۴ . ۹) کی د مخه نیسي چي $b|=0$ دی. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دی، چی د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چې په کرښه ax+bx+c=0
نه وي پروت۰

ازمایو چې ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کی باور لري او یا نه.که ممکن وي نو د شمیرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0) ټاکو. دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا رینتیا وینا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبیډیری پیداشوی ځاي (ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسیا کوي) تصدیقوي.
دلته یوه څیره کښل کیږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ږدو او بیا کرښه باسو۰ په کواوردینات کې د هوارې هغه برخه، چې اوبیډیری ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابیډیری ده۰

د یوه نابرابرونسیستم چې دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کیږی او بالاخر ه بي د یوګونو اوبیډیریو غوڅډیری نیول کیږي یا جوړیږي.

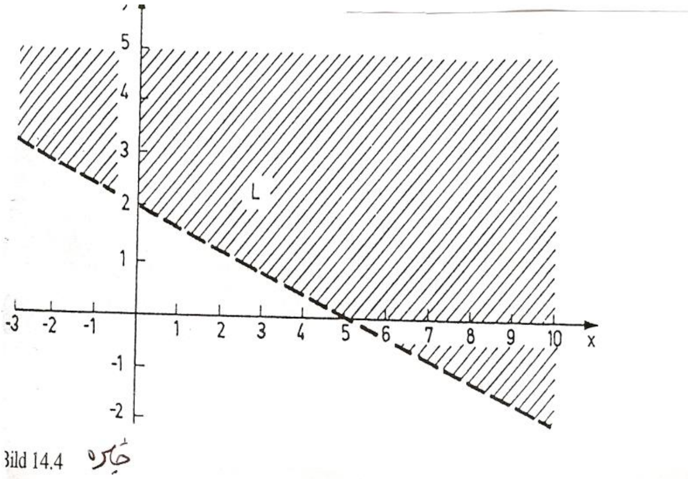


Bild 14.4 ځاکره

بیلګه ۱۴ . ۱۰:

I . 2x+y<6

II. 4x-y>0

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبیډیري LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د (0 , 0) سیده برابرون باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلګي په توګه (1 , 0) کیښول شي، کوم چی د په څنګوالي یا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

دېِ امله اوبيډيرئ LII کی نه دئ پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف(. ش ۱۴ . ۵ ب دسیستم حلډيرئ L ښايي چي له دوه نيمکرښو بنديږي یا له دوه نيم کرښومحدوديږي.
د وړانديزارزښت لري چی د تمرينونو په خپلواك كار كولو کی د غوښتونكو اوبيډيريو L د يوګونو نيمهوارو غوڅډيرئ حتي تر غاړې پورې رنګينه یا کرښی کرښی راوكښل شي، چی په دې ډول یی یو کواوردیناتسیستم د انځورولو لپاره بسيا وکړي .ش ۱۴ . ۵

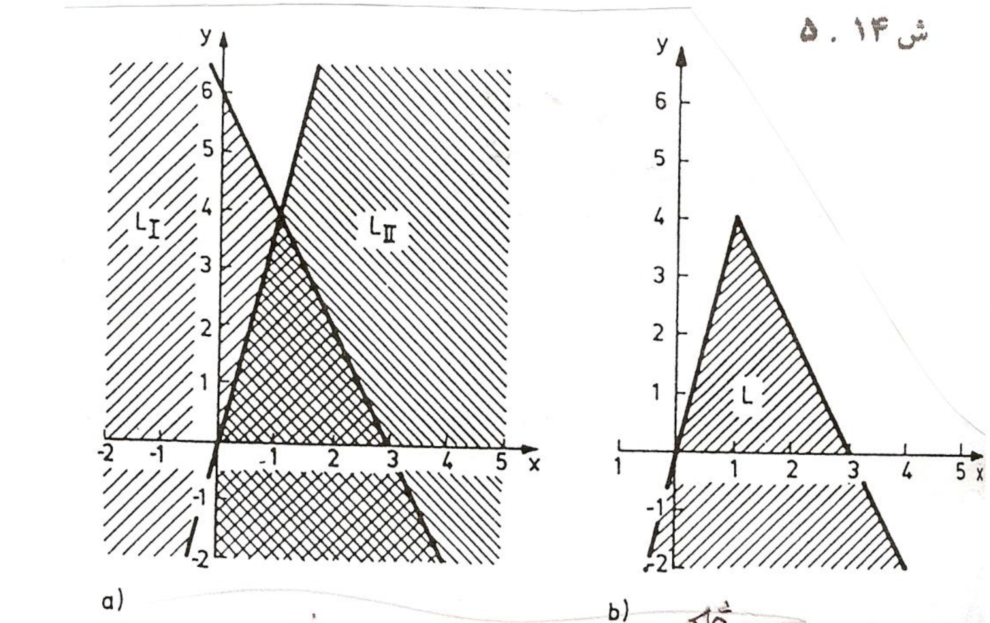


Bild 14.5

بیلګه ۱۴ . ۱۱:

I . $x-3y-6<0$ II. $-x+y+1<0$

III. $x-6<0$

دا اوبیډیرئ په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ کرښي
د پورته نابرابرونسیستم له مخۀ د هر نابرابرون لپاره کرښه کشل کيږي، په یوه کواوردینات سیستم کې او بیا د هوارې هغه برخه، چې درېواړه کرو کې رابنده منهواره وي، هغه يې اوبی دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

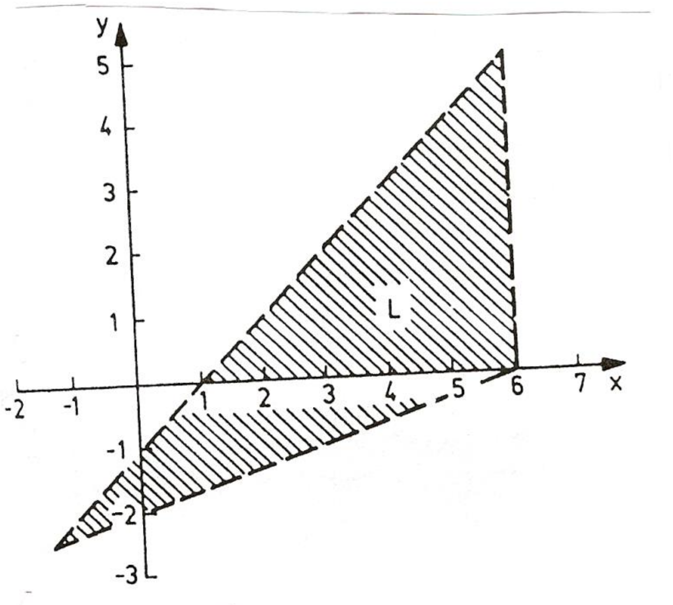


Bild 14.6 خاکه

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ . ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براړون یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه ځرګنده ده چی د یوه رییل ګڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیریږي٠
داسی دئ:

$$T(x) = T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) \geq 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

$$T(x) = -T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) < 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چی د مطلقه ارزښت لرې پرېښول شي، یا د نورو ترمونو سره په ټرلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په (۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چي په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پرېښول کیږي چی ځانونه په قاعده کي په اینتروال وښایي، کوم چی دیسیونکت(پردي) برخه ډیری د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چی (T(x ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چی د کنترول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رییل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي٠

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

د $b| = 0$ لپاره $\quad |a : b| = |a| : |b|$

۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چی ایا دا اوبیونې په نیول شوي یا فرض شوي اینتروال کي پراته دی او که یوائې د اوبې په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوبیوني اوبیډیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوبیونې شونی یا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم
کی انځوریږي .
د دواړو فنکشنونو غوځټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبیونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

(14,11) د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

(14,11) د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

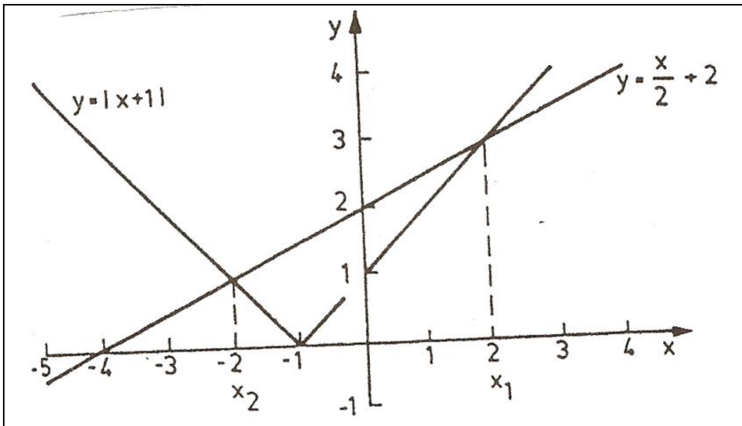
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیدیری $L = \{ -2, 2\}$



په داسی حال کی چی د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$, ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کیڼ اړخ، $y = |x+1|$ د (۱۴ . ۱۱) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.
اوبی : کیدی شي په ځ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شوونې یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښنه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینتروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

|1- x|-|2x+3|=1

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د x<1 لپاره |1-x|=1-x

د x>1 لپاره =-1+x

او(لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د x>-3/2 لپاره |2x+3|=2x+3

د x<-3/2 لپاره =-1x-3

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

	x<-3/2	-3/2<x <1	x>1
|-1+x|	1-x	1-x	−1+x
|2x+3|	2x+3	-2x-3	|2x+3|

له دې امله د برابرون اوبې کی درې حالتونه توپیرووو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1 - x - (-2x - 3) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1 - x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1 + x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = -5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په ځټ یا تضادکی دی، چی x3 = -5

یواځي ښکارندډوله اوبی دی(دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په ځیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبډیری : L = {-3,-1}

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې څرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي. د کینې اړخ یا لور مطلقه ارزښت خپلواك یا ازاد ښودل کیدی شی چی ټوټه ټوټه د مخه تیرشوي شمیرنو په ښوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقیبیږي:

د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

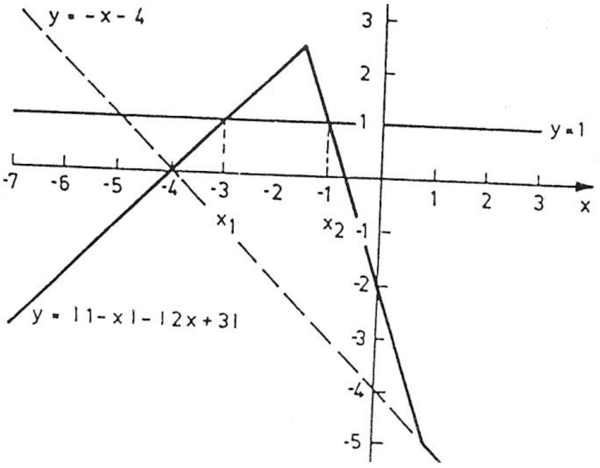
د $-2/3< x < 1$ لپاره $|1- x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - یا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شمیرل شوو اوبیونو پرتلې له پرتلې مقایسي ځیره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښایي، چی دواړه کرښې ریښتیا د $x < -3/2$

او $-3/2< x < 1$ لپاره ربښتیا هره یوه بله یوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره یو بل نه پریکوي. په دریم حالت کی د اړوند کرښی ټوټی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرټکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په ځیر حل د نیول شوي اینتراوال د باندې دی ځیره (شاید داځیره هم ځیره نه شي، کۀ کرانو مینه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګټور به وي)ش. ۱۴ . ۸

دلته هغه ځیره باید ریښی او یا راغلی وي، یا راغلې وی۰



که د مطلقه ازښت نخښی په یوه ځلوري - یا مربع ترم کی له منځه وړل کیږي، نو کیدی شي چی د مخنخښي غوښتل شوي ځیرنی چي په برخه ۱۴. ۱ . ۲ کی تر ځیرني نیول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بیلګه ۱۴ . ۵ دې مقایسه شي)

بیلګه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x^2 - 6x + 5| = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x<5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2=0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5,65 \in [5,\infty)$, $x_2=3-\sqrt{7}=0,35 \in (-oe, 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

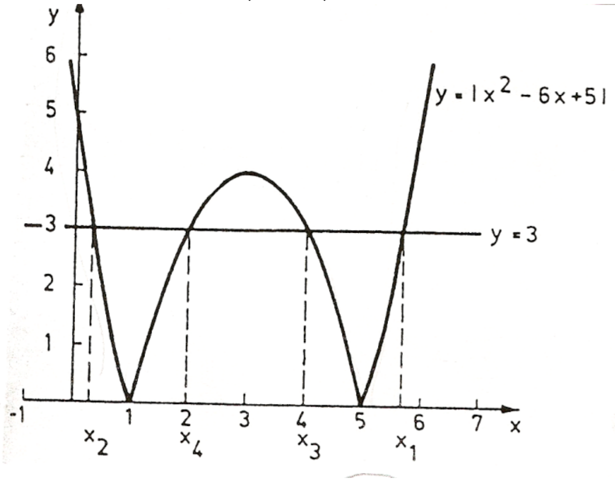
$L \Rightarrow x_3=4 \in (1,5)$, $x_4=2 \in (1,5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیدیری: $L = \{3-\sqrt{7}; 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

څیره ۱۴ . ۹ د ګراف له لاری اوبی ښایي. کیڼ لور $y=|x^2-6x+5|$

د (۱۴ . ۱۲) له امله د پارابوللیندو څخه یوځای کیږي. څیره ۱۴ . ۹



څیره ۱۴.۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبي کی ، په کوم کی چی n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$, $i = 1,2,...n$ منځ ته راځي، 2^n حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دئ ، کوم چی موجود دی ، چی د ترم $T_i(x)$ د تیپ یا بڼی وي چی یا

$T_i(x)$ <0 او یا $T_i(x)$ 0> راکوي، یعنی د دوه توکو د وارییشن امکاناتو ټولګي ته (پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰)

قاعدې سره سم 2^n برابرونونه منځ ته راځي، چي په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیوني ..... x_1, x_2, x_3,...... ولرودئ شي. یواځی دا باید وازمایل شي ، چی ایا دا اوبي xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.

د دې ټولیزې تګلار پسی موږ په بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د

T1(x)=1-x, T2=(2x+1)

سره، په لاندې $2^2 = 4$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0: \quad (1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$$

$$2.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0: \quad (1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د3- = x1=1, x2لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرونو کی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ . ۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چی بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ . ۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دئ

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : |7-3x|>2

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت:

$$7-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$
$$7-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$
$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$
$$-7+3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [, \infty)$$
$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$
$$\Rightarrow$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \setminus (5/3, 3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کيږي:

بیلګه ۱۴ . ۱۶: |x-5|<|x+1|

د یوګونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنخښی:

د x > 5 لپاره |x-5|= x–5

د x < 5 لپاره |x-5|=-x+5

او

د x ≥ 1 لپاره |x+1|=x+1

د x ≤ -1 لپاره |x + 1| = -x - 1

په یوه لید وړ توګه په لاندې توګه راټولیګي رایوځاي کيږي یا راغونديږي :

	X > -1	-1≤ x<5	x≥ 5
|x-5| =	-x+5	-x+5	x-5
|x+1|=	-x-1	x+1	x+1

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1)$

|x-5|<|x+1|<=>-x+5<-x-1 <=> 0<-6

د هر x<-1 نابرابرون یوې ناریښتیا وینا ته لاربښودوي، چی په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چي: L1 = Ø

دوم حلات $x \in [-1, 5)$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

|x-5|<|x+1|<=> -x+5<-x-1 <=> x>2<=>

$x \in [2, \infty]$

$L_2 = [-1,5) \cap (2,5) = (2,5)$

دریم حالت: $x \in [5, \infty)$

|x-5| < |x + 1| <=> x - 5 < x + 1 <=> 0<6

هر x ≥ 5 نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چی: L3 = [5 , oe)

حلډیری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,5) \cup ([5, \infty) = (2, \infty)$

بیلګه ۱۴ . ۱۷: |x²-4x-21|<24

د x²-4x-21≥0 <=> x<-3 v x≥7

او x²-4x-21<0 <=> -3<x<7

څخه لاس ته راځي:

د x<-3 v x≥7 لپاره |x²-4x-21|=x²-4x-21

د -3<x<7 لپاره = -x²+4x+21

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -3] \cup [7, \infty)$

|x²-4x-21|<24 <=> x²-4x-21<24 <=> x²-4x-45<0

<=> -5 < x < 9 <=>

x ∈ (-5,9)

$L_1 = [(-\infty, -3] \cup [7, \infty)] \cap (-5,9) = (-5,-3] \cup [7,9)$

دویم حالت: $x \in (-3, 7)$

|x²-4x-21|<24 <=> -x²+4x+21<24 <=> x²-4x+3>0

<=> x < 1 v x > 3 <=>

$x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty),$

$L_2 = (-3,7) \cap [(-\infty, 1)] \cup (3, \infty) = (-3,1) \cup (3,7)$

اوبیډیری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5,1) \cup (3,9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی به په یوه بیلګه کی داسی نامساوات وڅیړو، په کومه کی چی مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کی منځ ته راشی.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د (۱۴ ، ۱۰) له مخی د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) له مخی په هر وخت کی د همغه ترم مخنخښه باید په پام کی ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د $x < -1/2$ لپاره $|1+2x| = -1-2x$

او

د $x < 1$ لپاره $(1-x) > 0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کی ګنوړانګه سره بیله یا توته کیږي، داسی چي په راتلونکو ګڼلو کی یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

	$X<-1/2$	$-1\leq x<1$	$x>1$
$\|1+2x\|$	$-1-2x>$	$1+2x$	$1+2x$
$=1-x$	>0	>0	<0

لومړی حالت: $x \in (-oe, -1/2)$

$$-1-2x \leq 1-x \iff x \geq -2 \iff$$

$$x \in [-2 , oe)$$

$$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [-2 , oe) = [-2 , -1/2)$$

دویم حالت: $x \in [- 1/2,1)$

$$1+2x < 1- x \iff x<o \iff x \in (-oe,0]$$

$$L_2 = [-1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1-x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو سټ(اوبیډیری):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لاینی ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

(۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه ښي لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوي بڼی(۱۴ . ۹) نابرابرون

هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1| > x-2x-4$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1 < 0$ لپاره $= x + y - 1$

لومړی حالت: $-x -y +1 > 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff -x-y+1 > x-2y-4 \iff -2x+y+5 > 0$

$L1 = \{(x,y) | -x-y+1 \geq 0, -2x+y+5 > 0\}$

دوم حالت: $x-y+1 < 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff x+y-1 > x-2y-4 \iff 3y+3 > 0 \iff y < -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1\}$

له دې سره L1 او L2 د اوبیډیرئ دوه نابرابرونونو غوځدیرئ ده او کیدی شي، لکه ځنګه یو نابرابرون د یوه ګراف سره انځور شي (ځیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبیډیرئ بیرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبیډیریو تولنډیرئ ده۰ (ځیره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)۰

که په یوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې یا – ویینې د (۱۴ . ۱۳) بڼی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نیولو سره ځلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.

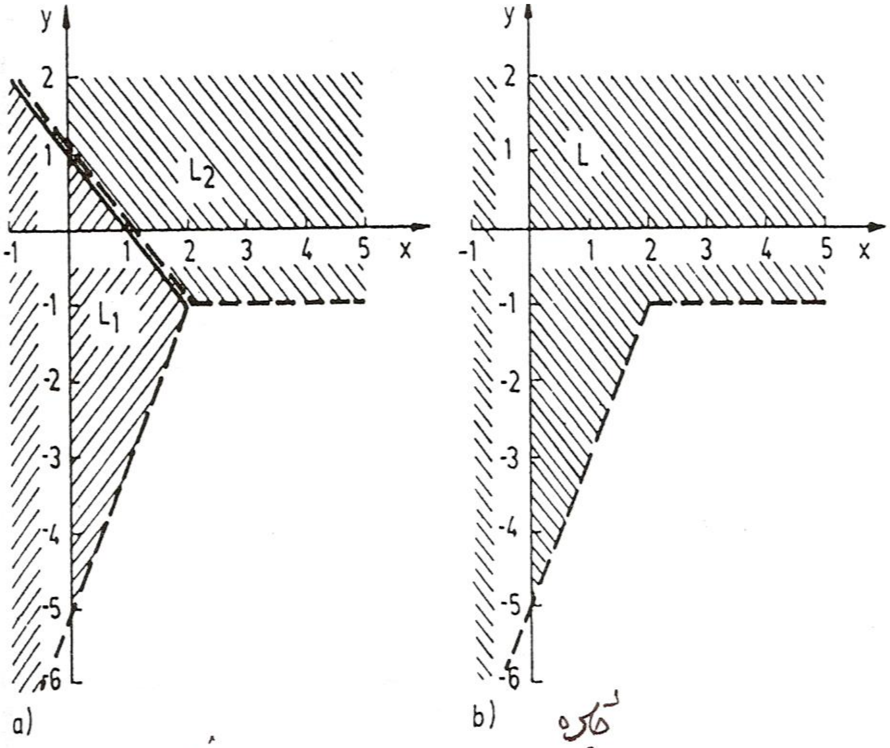


Bild 14.10 ځاره

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې نامساواتو حلډېرې پيدا کړی

1. a) $8x-3<2x+9$ b) $5-7x\le 3x-10$

c) $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{1}{2}+\frac{x}{9}$ d) $3(3x-2)\ge 4(3-2x)$

e) $\frac{8x-5}{5}\le\frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}x>\frac{5}{4}x+\frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9}+6x\ge 2(\frac{5}{6}+3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8}-6)<\frac{x}{6}-\frac{x}{8}+1$

2. a) $(3x+1)(2x-1)<(5x-3)(2x-1)$

b) $(8x-9)(3x+2)\ge(2+7x)(2+3x)$

c) $(7x-3)(5-7x)>(3-7x)(5x+3)$

d) $(5+2x)(7-5x)\le(10+4x)(2-3x)$

e) $x^2-x-6\le 2x+4$ f) $x^2+5x-6>3-3x$

g) $x^2+3x\ge -2x-6$ h) $x^2-4x+4<4x-8$

3. a) $\frac{3}{2x-4}\le 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x}\ge 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2}<2$ d) $\frac{5x+3}{x}<-2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2}>5$ f) $\frac{9-3x}{x-3}>-3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3}<3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1}\ge 12-\frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4}\le\frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x}>\frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3}<\frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1}\le\frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{3x+1}{x-2}>4$ f) $\frac{x-3}{1-6x}-\frac{2x+1}{4x+3}\ge-\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{3x-3}\ge 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x}-\frac{2-6x}{1-3x}<\frac{3}{8}\cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x-3)(3x-2)<0$ b) $(x+3)(7-x)\le 0$

c) $x^2+4x+3\ge 0$ d) $x^2-8x+7\le 0$

e) $x^2+4x+5<0$ f) $x^2-6x+10>0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$

6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \le 0$

c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \ge 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$

g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4} \le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \le 0$

8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$

c) $8(x-2) \ge \frac{20}{x+1} + 3(x-7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x-6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرې وټاکئ

9. a) $2 + x \ge 2x - 7$, $5(x-3) \ge 2(x-3)$ b) $x + 6 < 14 - 3x$, $6 + 7x \ge 3x + 5$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$ d) $x + \frac{1}{3} \le 2x - \frac{7}{6}$, $5(x - \frac{3}{2}) \le 2x - 3$

10. a) $x^2 - 3x < 0$, $2(x+2) < 4x - 1$ b) $x^2 + 6x + 8 < 0$, $2(x+2) > x + 3$

c) $x^2 - 9 < 0$, $x + 2 > 2(x-1)$ d) $x^2 - 3x + 3 > 0$, $4(x-1) < 2(x+1)$

11. a) $x^2 - 4x - 5 \le 0$, $x^2 + 6x - 16 < 0$ b) $x^2 + 2x - 8 < 0$, $x^2 - 3x - 4 > 0$

c) $x^2 - 5x > 0$, $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 - 6x + 5 < 0$, $x^2 + 8x + 15 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. a) $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$ b) $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$

c) $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$ d) $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$

13. a) $3 - x < 2 - 4x$ b) $x+5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$

$x+3 < \frac{1}{2}(x+1)$ $4(x-1) < 13 - \frac{1}{4}x$

$\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$ $2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاوېری په کارتیزې کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکې انځور کړی.

14. a) $y \ge -\frac{3}{2}x + 3$ b) $y < -\frac{2}{3}x + 2$

c) $x < 2y + 2$ d) $x > -y + 3$

e) $4x - 5y > 12$ f) $-3x - 8y \le 24$

g) $2(y - 3) \le 6(x - 1)$ h) $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$

15. a) $2x + 3y > -6$, $x - y < 2$ b) $3x - y > 3$, $x + y > 4$

c) $x > 1$, $x + 2y < 4$, $y + 3 > x$ d) $x - 4y - 6 \le 0$, $2x + y - 3 \le 0$, $y - 5 \le 0$

16. a) $-2 < x + y < 2$, $-2 < x - y < 2$ b) $x > 2$, $-3 < y < 2 + x$, $x + y < 5$

c) $x^2 - y^2 \le 0$ d) $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حاوېری د شمیرلو او همداسې ګرافیکې لارې پیداکړی.

17. a) $|x - 3| = 5$ b) $|x + 2| = 7$

c) $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$ d) $|x + 3| = |3x - 4|$

e) $|x - 4| = |2x + 3|$ f) $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$

g) $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$ h) $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$

18. a) $|x^2 - 2x - 8| = 7$ b) $|8 - 2x^2| = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلډېرۍ پیدا کړی

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلډېرۍ په یوه په یوه کواوردیناتسیستم کې انځور کړئ او ا نځور یې وکاږئ

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ فنکشنونه(بلواك یا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی ځیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د تابع(بلواك) او بیا زیاته د فنکشن په نامه څموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، څما په اند یا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی څموږ د ځیړلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریېلی واریابلی ریېل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن) د ریېلو ګنونو ډیری باندې ، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه یواځنی ځیرونه ده. D دپیژند ډیری نومیږي .
د ټولو ارزښتونو ډیریٍ چي y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژنددیریٍ یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .
د ي وې قانونمندیٍ f له مخی هر $x \in M$یواځني یوه $y \in W$ باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن مختلف انځورېدولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپو هی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې ترل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴).

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: y=(x/2)+1, D=R , W=R

بیلګی ۱۵ . ۲ ته : د x<0 لپاره y=|x|
دلته D=R,W = [0,∞) د x>0 لپاره y=x²
پام دې وي چی په داسی حالت کي له کیڼ و ښې لور ته یا ګډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دیَ ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیڅیت(واضح)روښانه و څرګند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ او ۱۵ . ۲ چی په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: y =f(x) که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل F(x,y)=0 دی او فنکشن ایمپلیڅیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به 2y-x-1=0 D=R,W=R,فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپیلیڅیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیڅیت شنینیزه بڼه (ایمپلیڅیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیڅیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلګی په توګه :
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیڅیت حل کیدونکی نه دیَ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزي انځورونی ځانګړي بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتوني یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)

$x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oe به یوه پارامتري انځورونه وی او x = t , y = t/2 + 1 به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X ....-2	-1	0	1	2	
Y 2	0,5	1	1,5	2	

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....-3	2	-1	0	1	2	3 ...
Y....3	2	1	0	1	4	9 ...

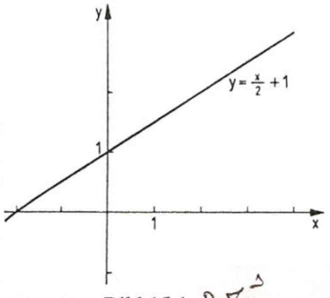


Bild 15.1 ځاره

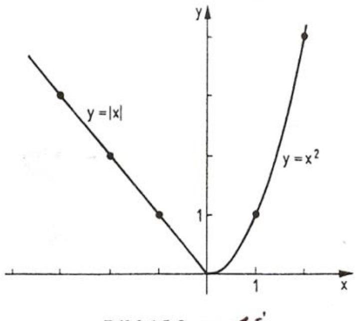


Bild 15.2 ځاره

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټي) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرښې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي .

څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال] a,b[کی هلته او هلته یا تیك هلته مونوتون جگیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$$f(x1) \leq f(x2) \quad (f(x1)>f(x2))$$
که د برابرونښنه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

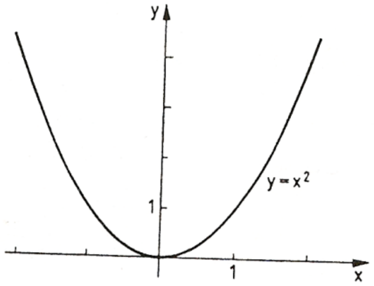
پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

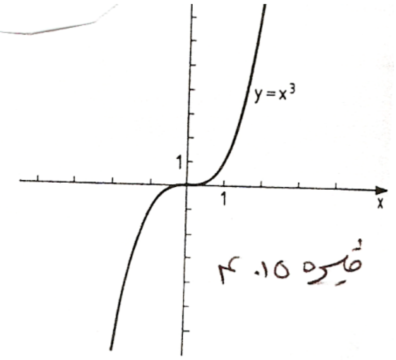
په یوه اینتروال] a,a-[کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي
$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$
د جوړه فنکشنونو څیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي) دلته هم څیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي) بیا هم څیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دئ :
$$(-x^3) = -x^3$$

بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دئ:
$$(-x)^2 = x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





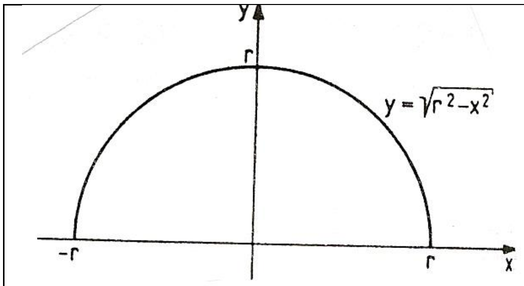
د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D (پیژندډیرئ ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که یو $k > 0$ داسې شته وي چي دا باور ولري :

$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بیلګه ۱۵ . ۵:

	فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$ بند یا راګیر(محدود)(زه به دا له دې وروسته بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونکردی څیره ده $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \le r$ ش . ۱۵ . ۵

پیژند ۱۵ . ۵:

$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$f(x + p) = f(x)$

د دورانی یا تل راکځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول D $x \in$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځايونه بلل کيږي٠

د فنکشن صفرځايونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پيدا کيږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرښې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بيلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\,x + 1$ صفرځايونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دیٔ (ځيره ۱۵ . ۱)

بيلګه٠ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځايونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځايونه نه لري.) بيا هم ځير ۱۵ . ۶)

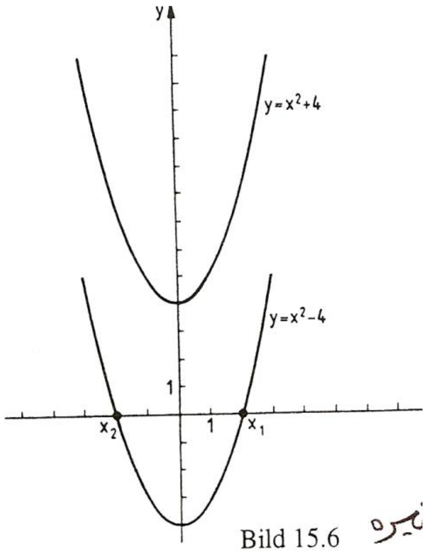


Bild 15.6 ځیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۵ . ۷:

$x \in D$, $y \in W$ y =f(x),

يويواځنى« يا يواځنى او يواځنى بلل کيږي، که هريو $y \in W$ د يوه $x \in D$ په واك کى
وي يا هر يو $y \in W$ ته يوه $x \in D$ ځيره شوی وي، د کوم لپاره چى باور ولري: (= y
f(xيو يويواځنى يايواځنى او يواځنى فنکشن په څتکيدونکى دئ ، دا په دې مانا چي دا يو
فنکشن (x = g(y تعريفوي، يعني په څټ يا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو يا
واريابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د
فنکشن روڅنی يا وسره بده يا که غواړئ مروجه ځيره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته
د x په واك کی واريابل يامجهولی يا ناپيژندونکی دي د y=f(x) په څټ يا برعکس
فنکشن لپاره داسی هم ليکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په څټ فنکشن سره کټمټ(- ورته) identic دئ٠ د په څټ يا
برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$
کرافيکی ځيره y = x په کرښه د y =f(x)(هندارونه) يعنی په هنداره کی ځيرونه
او لنډ يی: هندارونه) ده٠

بيلګي ۱۵ ، ۱ ته :

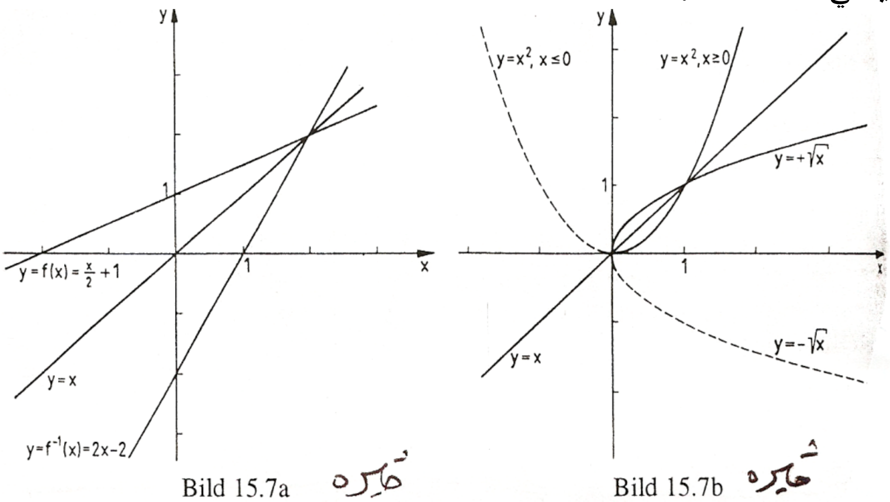


Bild 15.7a ځايره Bild 15.7b ځايره

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه يا په څټ فنکشن داسی دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سړی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ځیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن
$y = x^2$, $x \in D$
ځیرره ش ۱۵ . ۳) په ښتکیدونکی دي یا په ښتکیدونکی نه دی.
هر $y \in W$ =[0,oe] پورې دوه[-oe,oe] = $x \in D$ اړه لري، یعنی x=+yاو x=-y
مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونکی دی (او په دې ډول یوائنی او یوائنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2,x\geq 0$
ته چپه- یا په ښت فنکشن $y=+x$ دی، او $y = x^2 , x < 0$ ته چپه- یا په ښت فنکشن $y = -x$ دی. (ځیره ۱۵ . ۷ ب) .
په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په ښت فنکشن
$y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ځیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړدوله خویونو له مخی وځیړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي فنکشنونه) وځیړل شي. د فنکشنونو ځیړل به د هغو ځانګړدوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a^2x^2+a_1x+a_0, n\in N; a_i\in R, a_n\neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x\in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالاینې فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینې فنکشنونو څیره(ګراف) یوه کرښه ده چې په y = n کی دy - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m = \tan\alpha$

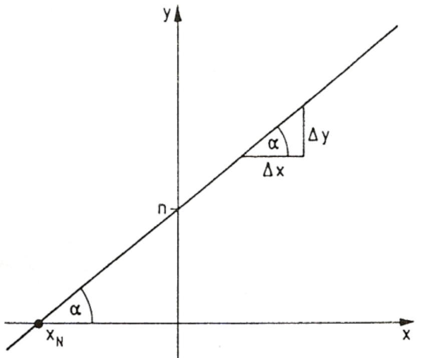


Bild 15.8 ګاره

لري (څېره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي، دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که |m|= 0 نیول شوی وي، ټیک یو صفرځای (y = 0) لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چې د یوې کرښې برابرون، چې له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چې پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرتټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا نوره بنه غږځتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه تولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$y=ax^2+bx+c , a \neq 0$ (15 .3)

د مربع فنکشنونو څیره) ګراف (پارابول دی چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیڅینت) ځله ووني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بنه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیرني لاندې نیسو.

1. $y=x^2 (a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(ځ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q \ (a=1 , b=p , c=q)$ (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د څلورئ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2$ (15,5)

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په

$q - p^2 /4$ راکښل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:

$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$

(ځ،۱۵ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. $y = ax^2$ (a|=0,b=0, c = 0)

د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $1 < |a|$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:

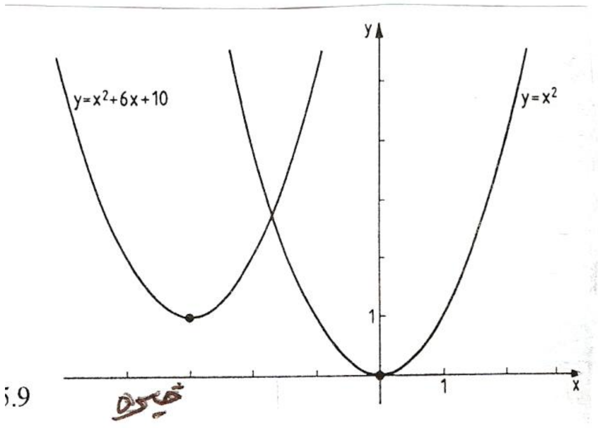
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(ځ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$



5.9 شیره

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,(a=-1/2, b=1, c=4)

دککرۍ کواوردینات:

$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$

دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

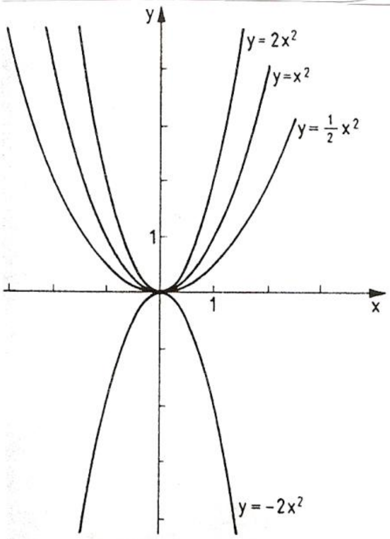


Bild 15.10

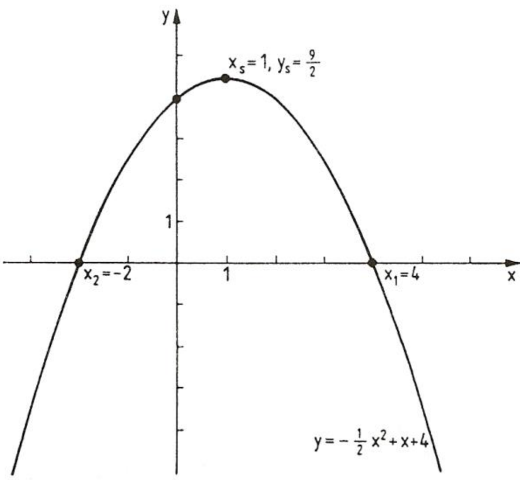


Bild 15.11

د فنکشن y=ax²+bx+c د صفرځایونه د برابرون ax²+bx+c=0 اوبیونې دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چی دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي۰

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته :
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چی برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

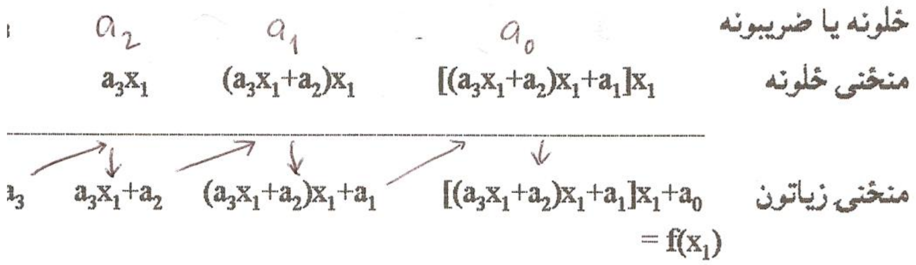
فنکشن $y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي
د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چي د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Hornerschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پوري اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کيدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشميرل شي:
a3 له x1 سره ځل کيږي، دې سره a2 زياتيږي، زياتون يی له x1 سره ځل، او a1 ور زياتوو، زياتون د x1 سره ځل او a0 ور زياتوو. دا د عمليوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شيما (د هورنرشيما) له لارې په ليدوړ ډول مخ ته بيايو (څرکندوو)



ددې شيما پوهيدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهيدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بيلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شميرل کيږي.
يادونه: دا د هورنر شيمت زما په دې اوسنی د برينکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی. اوبيونه) :

	1	-2	-14	- 5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	7 = f(-2)
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	0=f(5)

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځايونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چرې ددريمی درجی ريشنلفنکشن يو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولينوم ويش له لارې دا لايني فاکتور بيل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بيلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ويش پولينومونو ځلووني ، يعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشيما په اخره ليکه کی ولاړ دی. د هورنرشيما له لاری د صفرځاي شميرلو سره په همغه وخت يا دمګړی کی د پولينوم ويش صورت نيسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او$0 =$ f (x1) چی د $(x-x_1)$سره د ځلونې له لارې دا تصديقيدلی شي. پاتی صفر ځايونه د ځلوری – يا مربع برابرنی د اوبيونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0;\, x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دريمی درجي فنکشن د درې لايني فنکشنونو د ځلونې په څير ليکل کيدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وينا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ريشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ريشنلفنکشن n صفرځايونه لري . کيدي شي دا ټول يو له بل توپير ولري او يادا صفرځايونه څوځله هم رامنځ ته شي، ريیل او يا جوړه کونجوګيري کملکس کيدی شي.

که $x_1, x_2, ,..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځايونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیشینت یا ځله ووني لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه
$x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$
لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
x_1 = 2		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
x_2 = 2		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
x_3 = -2		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $(2x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$
لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y = 2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چی د دريمي او جګو درجو د ټول ريشنلفنکشنونو يوه ځيره يا تصوير ولرودی شو، نور کرکتريستيکی يا د خويونو ټکی يی د ديفرنځيالشميرني له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بې له دې چی د دفيرنځيالشمير له مرستي کار واخلو ، کيدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وينا وي وکړی شو. موږ په ليديدونکی ډول د فنکشن د پولی کليمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټيك تعريف شي. دا د بيلګي په توګه دا مانا لري چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره (f(x)تل ارزښت g ته نزدې کيږي، که x د oe يانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د->±oe x لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زياتيز يا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - ځخه دoe په لور ځي) .

که n جوړه اوa_nکميز يا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه د oe - ځخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کميز يا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - ځخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه اوa_nکميز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe ځخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$
$$n,m\in N_0;a_k,b_i\in R;Q_m\neq 0$$

مات ريشنلفنکشن بلل کيږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعريف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نوميږي، که n<m وي او نااصلي مات دی
که $n\geq m$ ۰ نااصل مات فنکشن کيدی شي چي د پولينوم ويش له لارې تجزيه
(ټوټه) شي او د يوه ټول ريشنلفنکشن او يوه ريښتونی ماتی برخی د زياتون په څير
وليکل شي.

بيلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې
فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ويش څخه لاس ته راځي:
$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$پاتی (باقي) سره. پس لرو:
$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$.

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره يو صفرځاي لري، که $x = x0$وي نو باور لري:
$Q_m(x)\neq 0$ مګر $P_n(x_0) = 0$

دا د $x = x_L$لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$
د $x = x_P$لپاره يو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بيلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتباندي- او ماتلاندې فکشنونو ټوټي کولو وروسته په لاندې فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای (ټيك ناپای ځای بللکيږي) xpکی کږه داسيمپټوټي کرښي $x = xP$ ته نزدې کيږي .د يوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن (n<m) د x په جګ پوتنځ يعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ويش ځخه لاس ته راځی:

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ځيره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کيږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نيسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه يی د صفر په لور ځي، لکه ټولريشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن ځيره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولريشنلبرخی ته نزدې کوي.

بيلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: (y = x /(x²+1 د 0 = x0 په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري ریبل اوبیونه نه لري) او دx -> ± oeلپاره دx- محور (y = 0) د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: (y=(x²+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2 صفرځایونه(x²+2x-3 =0) په 3-= x1 او x1=1 کی لري . تشځای نه لري او په 2- = x3 کی قطب لري دا په دې مانا چی x = 2-اسیمپتوتی دی، او د oe±→ x لپاره فنکشن y = x اسیمپتوتي کيږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو: فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} ....(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګې n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګې nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګې n لپاره ټولی کرې د تعریف ډیری(-) = D oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oeاو ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري. (څیره ۱٤ الف ۱۵) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe او(W = (-oe,oe دي او (1-,1-) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰

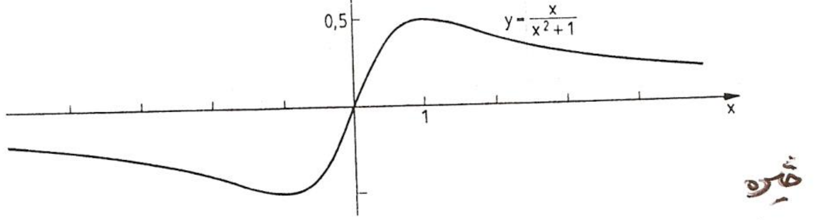


Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library

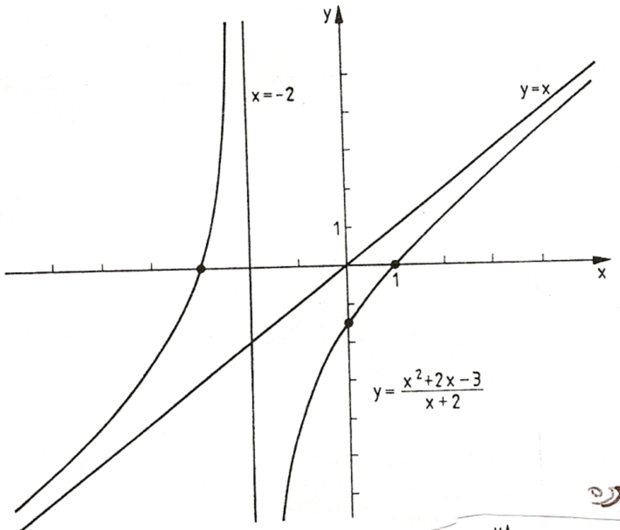


Bild 15.13

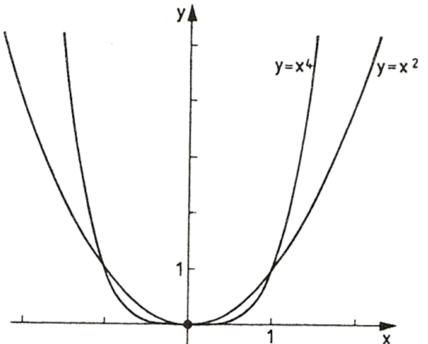


Bild 15.14a

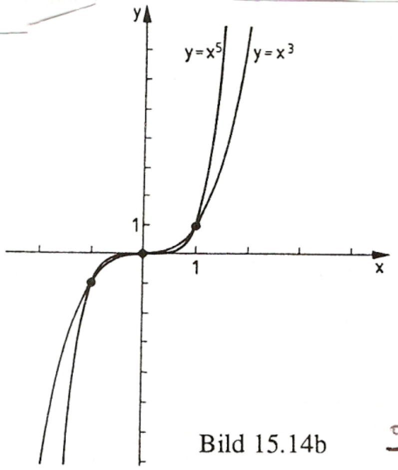


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دی په x = 0 کی د یوه قطب او y = 0 کی یوې اسیمپټوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز n) لپاره ټولی کرږې د پیژند ډیري

D = (-oe,oe)\{0} د ارزښت ډیري(W = (0,oe لري اوګډټکي (1,1), (-1,1)

؟؟؟ څیره ش. ۱۵,۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون (کمیز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0 او(W=(-oe,oe او(1-،-1) (1,1) ګډ ټکی دی (څیره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه څیرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

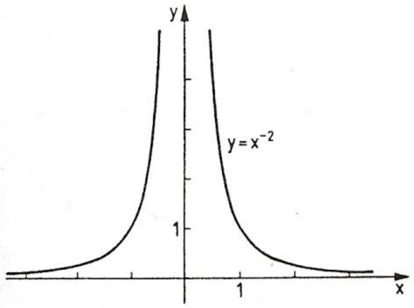


Bild 15.15a

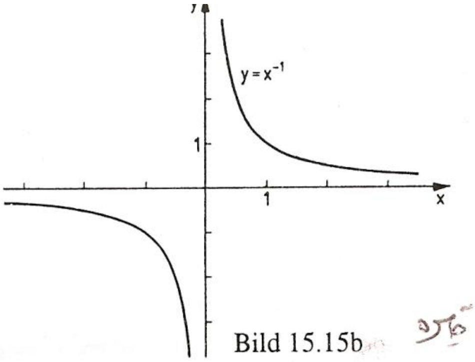


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اینتروال په پام کی ونیول شي.(پرتله بیلګه(بیلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- یا پر ښت فنکشن په لاندي ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ , n \in N \backslash \{1\}\ , D = [0,\infty), W = [0,\infty)...............(15,8_b)$$

او رینبه فنکشن نومیږي (پیژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کیدی شي و ریشنل ایکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ریشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ , a \in Q\ , x > 0 \qquad (15\ .\ 8c)$$

نو د رینبي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرښت بیرته پوتنځ فنکشن دی.
ټولیز پوتنځ فنکشن پیژند د رییل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رییلګڼونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R\ , x > 0 \qquad (15.\ 8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}, x \geq 0$$

لاندې چپه - یا پر ښت فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, x \geq 0$

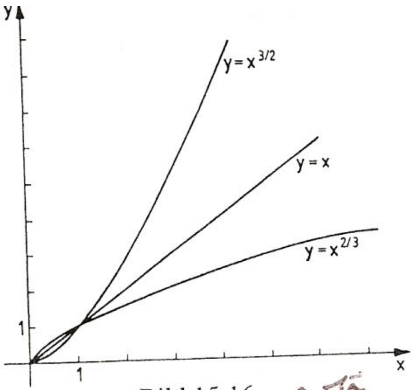


Bild 15.16a شکل ب)

(ښیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$
ښیره ۱۵ . ۱۶ ب)
$y = x^{-2} = 1/x^2, x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ٢ کی مو وویل چی یوائې د ناکمیز رادیکاندو رینه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښت فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښت کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری($D = [0,oe$ کی پر ښت فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د$y= x^3$ پرښت فنکشن د[$D= (-oe,0$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) ۰

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$$y=a^x, a > 0, a \neq 1 ....(15,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰
(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پیږند ۴ . ۱ وکتل شي)

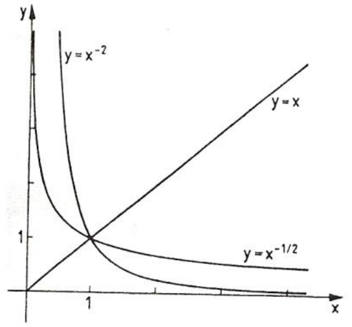


Bild 15.16b

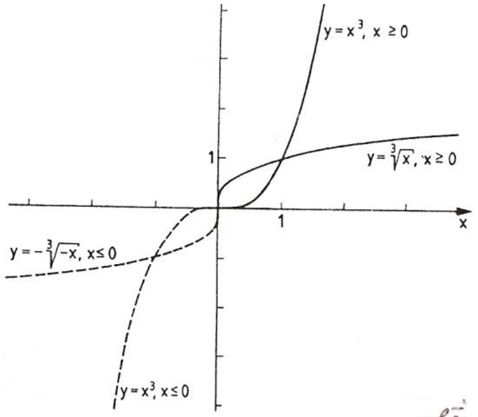


Bild 15.17

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژندډیرى(D=(-oe,oe او ارزښتډیرى(W=(o,oe لري. د $a^0 = 1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کږو ګډ ټکی دی

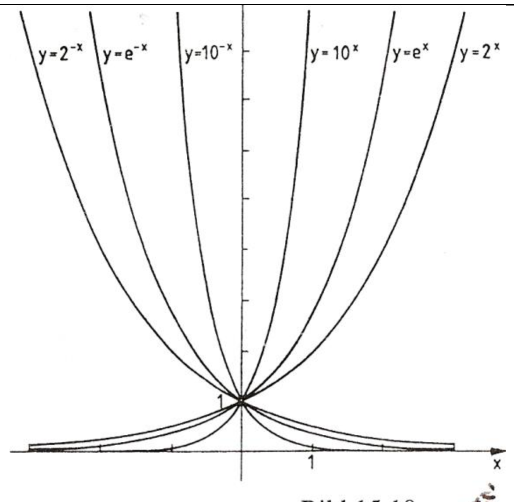


Bild 15.18

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹) پر کلکه یو غځیز- یا مونوتونجګیدونکی دی اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنږدې کیږي .د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe <- x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نږدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګې (a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10) په څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېټ فنکشن دی

$$y = \log_a x , a > 0 , a |= 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژندېدیری D = (0.oe) او د ارزښتېدیری(W=(-oe,oe لري.

د $y = \log_a x$ کږې د ګړو $y=a^x$ هنداورونه ده، په کرښه y=x ۰ ټکی(1,0) د ټولوکړو ګډ ټکی دی (څیره شته دی)

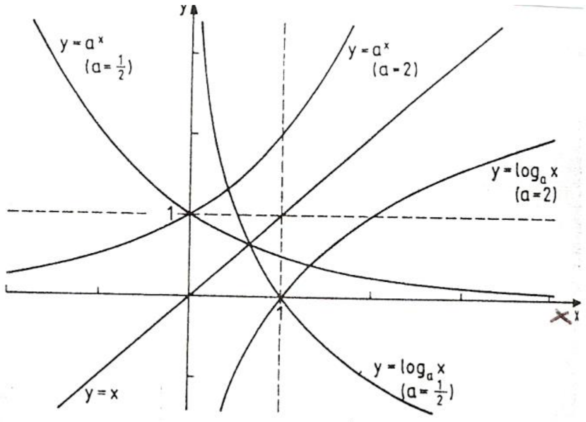


Bild 15.19 څېره

د a>1لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود x->0لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د 1>a> 0لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د x> 0لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېټ یی یعني $y = \log_a x$

د a= 2 او a=1/2 لپاره انځوریږي .

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10} x = \lg x , y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریگونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

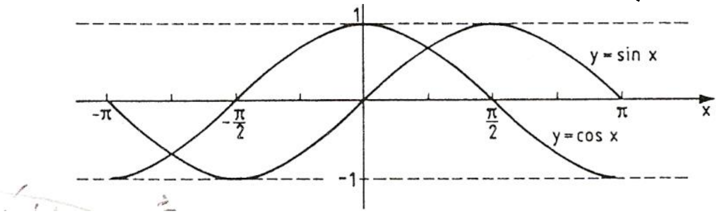
y=sinx ;D=R,W=[1,1]..$(15,11_a)$

$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]$..$(15,11_b)$

$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z$....$(15,11_c)$

$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z$..........$(15,11_d)$

د دې کږوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کې انځور شوی.



تریگونومتریکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریگونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه y=sinx , y= cosxپریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin(x+2k\pi)=\sin x$; $\cos(x+2k\pi)=\cos x$, $k\in Z$

لاندې فنکشنونه پریود π لري

y=tanx , y=cotx .دا په دې مانا چي

$\tan(x+k\pi)=\tan x$, $\cot(x+k\pi)=\cot x$, $k\in Z$

د تریگونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k=k\pi, k\in Z$

د y=tanx, $k\in Z$ $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ y=sinx لپاره او د y = cos x , y = cot x

لپاره تانجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري یعني y = tan x

په $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ او y = cot x په $x_k=k\pi$, $k\in Z$ کی.

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلگي په توگه

(c) ketabton.com: The Digital Library

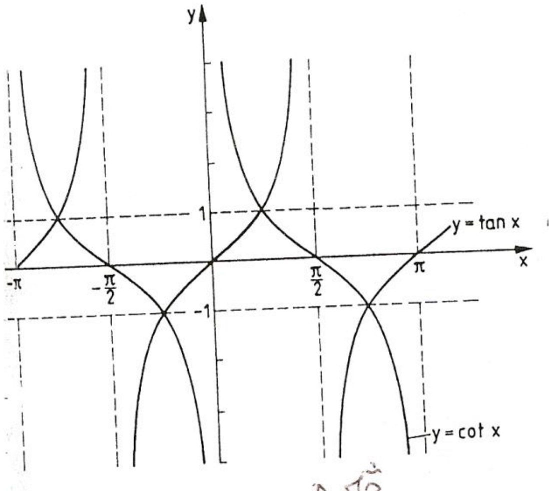


Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دئ او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګیدونکی یا پورته کیدونکی دئ

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی۰

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دئ

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k\in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دئ ،

په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

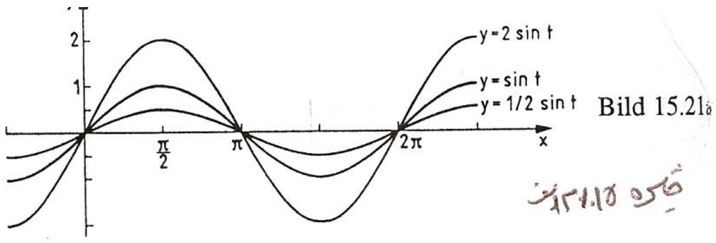
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کیږي.

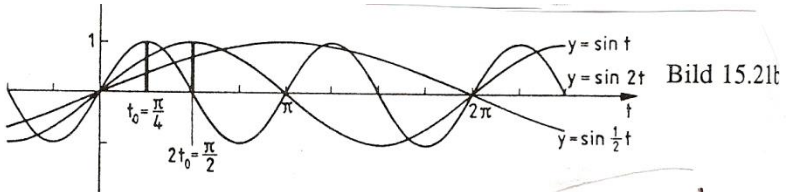
یادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پیژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی یا ځنځیري فنکشن دی. موږ ترڅیرني لاندې نیسو چي د سا ین فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واریابل t او زیاتوونکی د ساین فنکشن په خپلواك (Argoment) د کږېڅیره باندې څه تاسیر اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثیر په فنکشن $y = a . \sin t$ د $y = \sin t$ فنکشن ارزښت باندې غزول یا راکشول دی که ($|a| > 1$)او یا پړسول دي که
($|a| < 1$)وي $y= a.\sin x$ فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت
$y = \sin t$ دی، چیرته چی برسیره پردې د $0 > a$ لپاره په t - محور یوه
اینه څیرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) $(a = 2 , a = 1 / 2)$
په فنکشن کی a امپلیتودې Amplitude (جګوالی(نومیږي او د
شوینګنګ Schwingungرپیدنی پراخوالی یا ښه : سور باندې تاثیر اچوي.
څیره شته



۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې یو وختني غزول که $|\omega|<1$ یا پړسول که$|\omega|>1$ وي تاثیر اچوي.چیرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسیره پردې یو په y- محور اینونه هم ده.
د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ یوه فنکشن ارزښت، د$y = \sin t$
خپلواك ω -ځله ، یعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څیره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کیږي، دا په پریودې تاثیر اچوي او $y = \omega t$
پریودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin (t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور φ 0<او یا له ښي لور φ 0>اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin (t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$ لپاره۰

د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(څیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

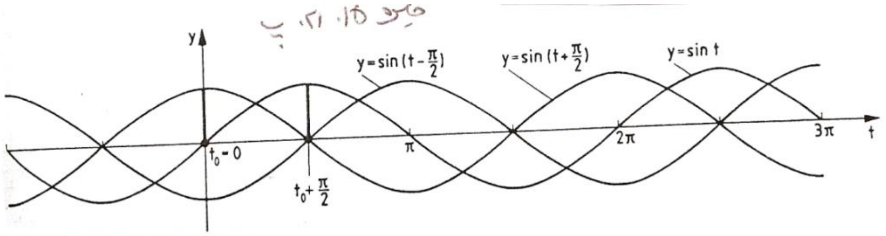
$$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$$

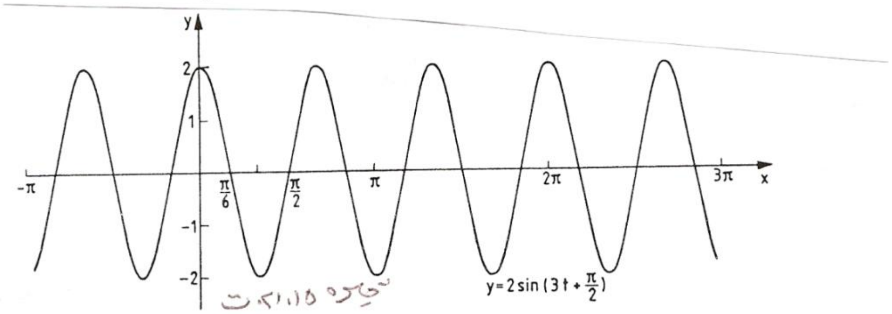
په فنکشن

$$y = a.\sin (\omega t +\varphi)= a . \sin\omega (t+\frac{\varphi}{\omega})$$

کی φ چې فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کره $y = a.\sin\omega t$

د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.





(c) ketabton.com: The Digital Library

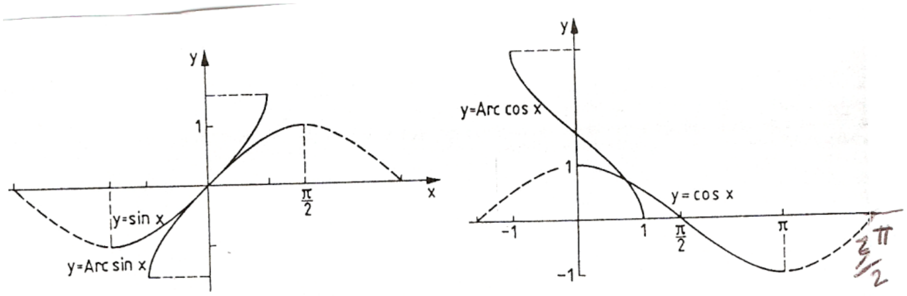
په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin (3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپلیتود a = 2 لري، پریودې یی $P=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{6}$ کې د sint و کیڼ لورته راکښل شوی دی.

څېره ۱۵ . ۲ پ $\varphi=\frac{\pi}{2},\varphi=-\frac{\pi}{2}$

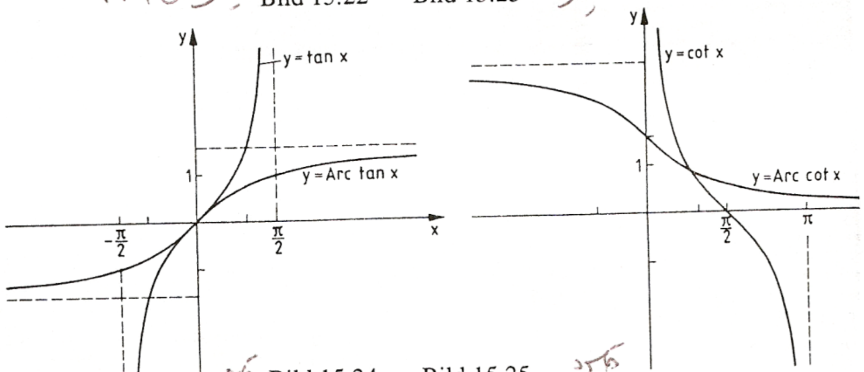
د تریګونومتري فنکشنونو(یواځني) په معکوسوالي یا په څټوالي کی مورږ په ځانګړو یوغږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند .۱۵ ۰ ۱۴ :

(پام: څیرې له تشریح د مخه راغلې، بله لار نه وه)



څېره ۱۵.۲۲، ۲۳ Bild 15.22 Bild 15.23 څېره



څېره Bild 15.24 Bild 15.25 څېره

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1.\ y=\sin x,\quad D=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ W=[-1,1] \qquad (15.12a)$$

$$2.\ y=\cos x,\quad D=[0,\pi],\quad W=[-1,1] \qquad (15.12b)$$

$$3.\ y=\tan x,\quad D=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ W=\mathbf{R} \qquad (15.12c)$$

$$4.\ y=\cot x,\quad D=(0,\pi),\quad W=\mathbf{R} \qquad (15.12d)$$

پرڅټ یا چپه فنکشنونه لاندې څیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

$$1.\ y=\operatorname{Arc}\sin x,\quad D=[-1,1],\quad W=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad (15.13a)$$

$$2.\ y=\operatorname{Arc}\cos x,\quad D=[-1,1],\quad W=[0,\pi] \qquad (15.13b)$$

$$3.\ y=\operatorname{Arc}\tan x,\quad D=\mathbf{R},\quad W=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \qquad (15.13c)$$

$$4.\ y=\operatorname{Arc}\cot x,\quad D=\mathbf{R},\quad W=(0,\pi) \qquad (15.13d)$$

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په څیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځیري (تړلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $z \in W$لپاره یو فنکشن $y= f(z)$ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x تړلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي٠

یادونه : یو تړلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه $z = f(x)$

د$x \in D, z \in W$لپاره او $w=h(z)$ د $z \in W, w \in W^*$لپاره

او$y=f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،

نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو تړلی فنکشن دئ

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : په ترلي فنكشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په ترلي فنكشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی

پ : د

$$, y = \cos w \quad w = \sqrt{z} \quad , \quad z = 2x + 4,$$

سره ترلي فنكشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په ترلي فنكشن $y=\mathrm{Arctan}1/(x-1)$ کی $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\mathrm{Arctan}\ w$ دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځيري فنکشنونو د فنكشن ارزښت شميرنی

له » دننه « پيل کيږي .

بيلګي ۱۵ . ۱۶ ته :

ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$$

او

$$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942;y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1$; $w=1/z=1/1=1$

$$y=\mathrm{Arctan}w=\mathrm{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشريح:

$y=f(x)$ تحليلي(شننيزه) وينا بلل كيږي، كه $f(x)$ له رييل ګڼونواو بسټيزو فنكشنونوڅخه د زياتون، كمون،ځل، ويش، له لارو ترلی يا ناترلي(ځنځيري يا نا ځنځيري) جوړيږي

د بيلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول راديکاند منفی نه شي کيدلی، او يا بايد مثبت وي، چی د لوګاريتم نومروس بايد

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت وي او $Arc \sin f(x)$ همداډول $Arc \cos f(x)$ تيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفډيري پيداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چې دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 <=> x^2 \geq 3<=>|x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D =(-oe , - 3]\cup[3 ,oe]$

ب) $y=lg(x+2)+1/(3+2x-x^2)$ له لمړي زياتونی کی بايد $Numerus > 0$ نومروس وي دا په دې مانا چې : $x +2 >0 <=> x >-2$ ،

پس $D1=(-2,oe)$

په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځايونه

له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

د فنکشن تعريفډيری بايد دا اول زياتونی او همداسی د دوم زياتونی تعريفډيري وي يعنی د D1 او D2

غوڅډيری: $D=D_1 \cap D_2 = (2 ,oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = Arc \sin (x-1)/5$ د ارکوس ساين-فنکشن د تعريفډيري په پام کی نيولو سره بايد باور ولري-

$-1\leq(x-1)/5\leq1<=>-5\leq x-1\leq 5 <=>-4\leq x\leq 6 => D=[-4,6]$

ت) $y = 1 /\sqrt{(x^2 - 4)}$

راديکاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چې

$x^2-4>0<=> x^2<4<=> x>2$ يا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y – 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځوروني ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y= 2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x (/2)t -1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y = f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوټوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوټونې اینټروالونه په تعریفیدیریو بیل (تجزیه) کړی، یا لو نه کړی.

a) $y = 2x -3$ b) $y = -2x +3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 /2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2-x-2$

d) $y = 2x^2 -12x +18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0,\infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1,\infty)$, $W = [0,\infty)$, d) $y = x^3 /2$, $D = [0,\infty)$, $W = [0,\infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0{,}4x -1{,}6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x +1{,}5)$

d) $y = 2$ e) $3x -3y -7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پیدا شي، او صفرځایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1 ,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 -4x +3$ b) $y = x^2-8x+16$ c) $y = x^2 -6x +10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 -10x+12$ f) $y = 3x^2 +6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 +45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګنل شي. فنکشنونه دی د خلفورم باندی انځور شي

a) $y = f(x) = x^3 -6x +5;$ $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 -x^2 -(13/2)x -5;$ $x_1 = 1/5$ $x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 +2x + 2x$; $x_1 = -2$ $x_2 = 0{,}2$

d) $y = f(x) = x^4 -x^3 -28x^2\ 32x +40$; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 -6x^2 +5x +6$; $x_1 = 1{,}5$ $x_2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه ورکړی شي :

a) $y = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y = \frac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y = \frac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y = \frac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y = \frac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځایونه دې وټاکل شي، پول. تشځایونه او د $x \to \pm 8$ لپاره ځان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څپ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R, W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R, W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) $y = \ln(x-1)$, D =(1,œ), W = R

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشنونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ – ترلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$y = f(w)$, $w = h(z)$, $z = g(x)$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتډیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = (e^{x+1})^2$ c) $y = \lg\sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan\sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan\sqrt{x} - 3$ i) $y = \operatorname{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y = \sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y = \operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$$

بيل کړی(د تعريف– او ارزښتدېري باندې تيرونه کيدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندې شننيزويا سپړنيز (تحليلي) افادو لپاره تعريفدېري پيدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$ f) $y = \ln(2x + 5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x - 4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنڅیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره :

دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دویمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګڼې وړې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویپونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميرړي شينواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړنۍ ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پيل او د دويم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان ميرړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلې.

ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library