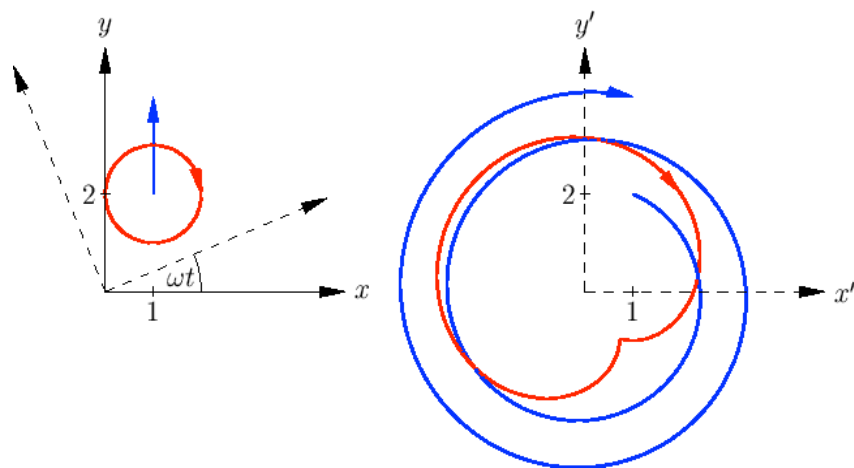


وکتور شمیرنه



Ketabton.com

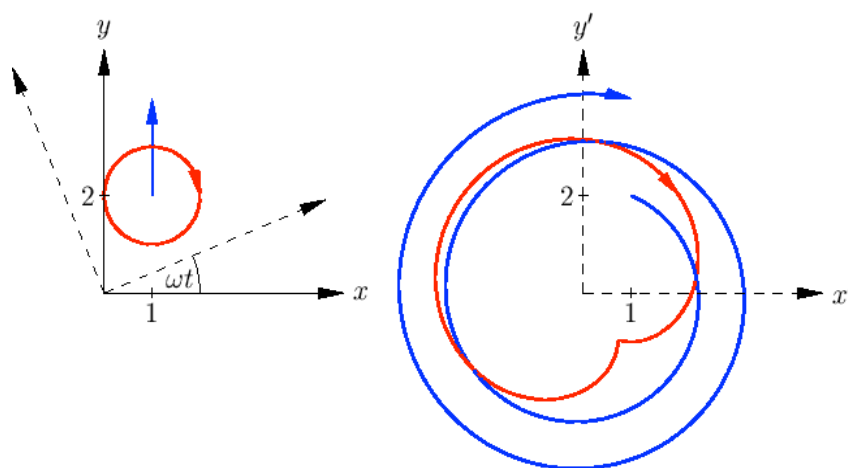
داکتر ماخان شینواری

۱	وکتور شمیرنه
۱	په هواره (سطح) او هوا (فضا) کې
۲	پیکسل – یا د چوځونې کواور دینات
۲	د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کواور دینات
۴	په کار تیزې کواور دینات کې ټکي
۴	د اوږدوالي – او سور درجې
۶	توته – یا استوانه کواور دیناتونه
۷	سیګنوم (لاتین : Signum نڅېنه) فنکشن ...
۸	ورل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال)
۹	څرخون Rotation
۱۱	څرخنده یا څرخیدونۍ نسبې سیستم :
۱۳	وکتورونه په فضا کې
۱۴	د وکتورونو جمعه (زیاتون)
۱۶	سکالار ضرب
۱۷	د اړخنیمو غوڅټکي
۱۸	(مطلق) ارزښت
۱۸	درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات
۱۹	د شمیرنې قوانین
۱۹	له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ...
۲۱	کونج یا زاویه

۲۲	د کوساین جمله
۲۶	اورتوگونال یا یو په بل ولاړ (عمودي) بنسټونه
۳۰	وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب
۳۴	د لورنڅ زور Lorentzkraft
۳۷	د ایپسیلون – تنزور
۳۸	شپات ضرب
۳۹	د یوه څلور سطحیز د ډکي (حجم) شمیرنه
۴۱	د غیر گسټحیز یا دوزنقي خویونه
۴۲	د کواور دیناتونو یا پروت ولاړ
۴۳	ټکي – لور – بڼه
۴۵	دوه – ټکي – بڼه
۴۶	لحضوي – یا سترگورپ بڼه
۴۸	د ټکي – کرښې واټن
۵۱	د دوه کرښو واټن
۵۳	د الوتنې لارې
۵۵	د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه
۵۷	د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه
۵۸	د یوې سطحې د هیسي -نورمال بڼه
۶۰	د سطحو انځورونو ترمنځ ...
۶۲	د ټکي – سطحې واټن

۶۵	د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع
۶۸	هگۍ (بیضوي) Ellipse
۷۱	د سوزونټکي وړانگه (شعاع نقطه محراق)
۷۲	پارابول Parabe
۷۳	د ساتلايت تلوېزيون Satelliten-TV
۷۴	های پاربول Hyperbel
۷۷	ناویگیشن Navigation
۷۹	د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه
	د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

وکتور شمیرنه



د شمیرپوهنې نړیوال جال څخه په مننه

ژباړی: ډاکتر ماخان شینواری

۱	وکتور شمیرنه
۱	په هواره (سطح) او هوا (فضا) کې
۲	پیکسل – یا د چوڅونې کواور دینات
۲	د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کواور دینات
۴	په کار تیزې کواور دینات کې ټکي
۴	د اوږدوالي – او سور درجې
۶	توته – یا استوانه کواور دیناتونه
۷	سیګنوم (لاتین : Signum نڅېنه) فنکشن ...
۸	ورل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال)
۹	څرخون Rotation
۱۱	څرخنده یا څرخیدونۍ نسبې سیستم :
۱۳	وکتورونه په فضا کې
۱۴	د وکتورونو جمعه (زیاتون)
۱۶	سکالار ضرب
۱۷	د اړخنیمو غوڅټکي
۱۸	(مطلق) ارزښت
۱۸	درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات
۱۹	د شمیرنې قوانین
۱۹	له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ...
۲۱	کونج یا زاویه

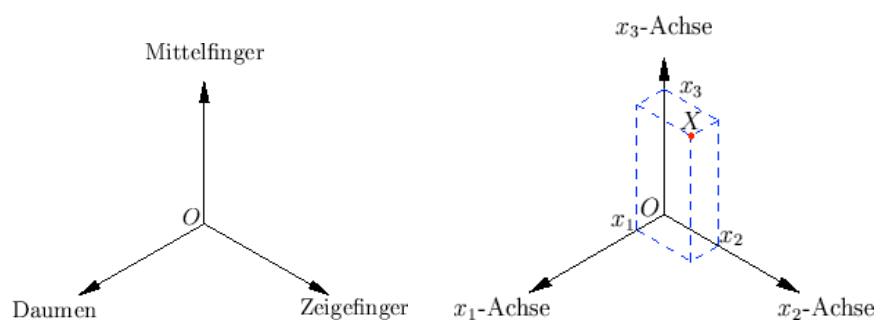
۲۲	د کوساین جمله
۲۶	اورتوگونال یا یو په بل ولاړ (عمودي) بنسټونه
۳۰	وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب
۳۴	د لورنڅ زور Lorentzkraft
۳۷	د ایپسیلون – تنزور
۳۸	شپات ضرب
۳۹	د یوه څلور سطحیز د ډکي (حجم) شمیرنه
۴۱	د غبرګسطحیز یا دوزنقي خویونه
۴۲	د کواور دیناتونو یا پروت ولاړ
۴۳	ټکي – لور – بڼه
۴۵	دوه – ټکي – بڼه
۴۶	لحضوي – یا سترګورپ بڼه
۴۸	د ټکي – کرښې واټن
۵۱	د دوه کرښو واټن
۵۳	د الوتنې لارې
۵۵	د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه
۵۷	د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه
۵۸	د یوې سطحې د هیسي -نورمال بڼه
۶۰	د سطحو انځورونو ترمنځ ...
۶۲	د ټکي – سطحې واټن

۶۵	د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع
۶۸	هگى (بیضوي) Ellipse
۷۱	د سوزونټکي وړانگه (شعاع نقطه محراق)
۷۲	پارابول Parabe
۷۳	د ساتلايت تلوېزيون Satelliten-TV
۷۴	های پاربول Hyperbel
۷۷	ناویگیشن Navigation
۷۹	د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه
	د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

وکتور شمیرنه

په هواره (سطح) او هوا (فضا) کې کارتيزي - يا پروت ولاړسیستم

يو فضايي کواوردیناتسیستم له درې په سرچینیز ټکي O کې يو په بل ولاړو
ګڼونکړبنو (محورونو) څخه جوړ دی، چې لوریزوالی یې د څیرې له مخې، د بني
لاس قاعدې، سره سم ټاکل شوی دی.



يو ټکی X د کواوردیناتو x_i سره په نڅېنه شوی په محورونو د پرېوستون ارزښت
سره سم کړه کیدی شي. $X = (x_1, x_2, x_3)$. که ایندکس يا پیژندنڅېنه ونه کارول
شي، نو

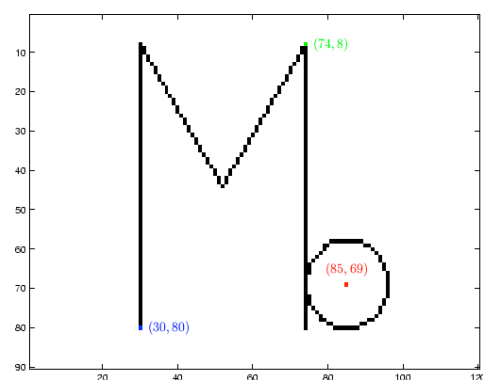
کوارډینات په ورسره بلد ډول د (x, y, z) او گڼونمخور د x ، y ، او z - محور په

نڅښه کيږي.

په ورته توگه د هوارې کارتيزي کوارډینات سیستم پیژنو یا تعریفوو.

پیکسل – یا د چوځوني کوارډینات Pixelkoordinaten

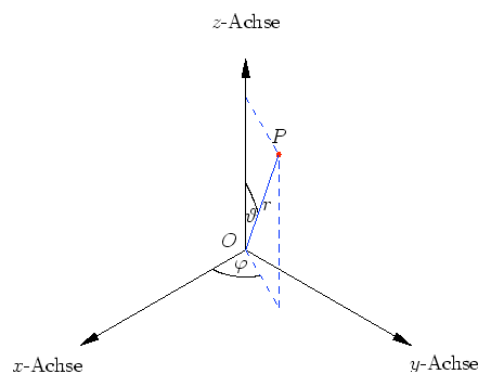
په یوه گرافیکي کرکۍ کې شیان د پیکسل- چوځونو کوارډینات (Pixel خورا کوچني څیره شوي ټکي) له لارې ورکول کيږي.. دا انځور شوی ولاړگودیز یوه کرکۍ ده د 90×120 چوځونو سره او د رنګه چوځونو کوارډینات پروت دی د څیرې گود په گوته کوي .



د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کوارډینات

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د سرچینې سره د واټن $r = |\overline{OP}|$ ، د کونج φ د x - محور او د هغه پرېوستون $\overline{OP}$ په xy - هواره او کونج $\vartheta \in [0, \pi]$ د $\overline{OP}$ او z - محور ترمنځ له لارې انځورېدلی شي. کونج φ ټیک تر 2π

زیاتخې پورې ټاکل کېدی شي. د ستاندارد په څیر په $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پرېکړه کېدی شي یا منل کېدی شي. (په لاندې او نورو ځایونو کې: محور = Achse)



باور لري:

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta$$

همداسې

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

د کوم سره چې د x, y او z نیونې سره سم د ارکوسټانجنټ یوه مناسبه څانګه د ټاکلو وي.

د اصلي څانګې- کونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري

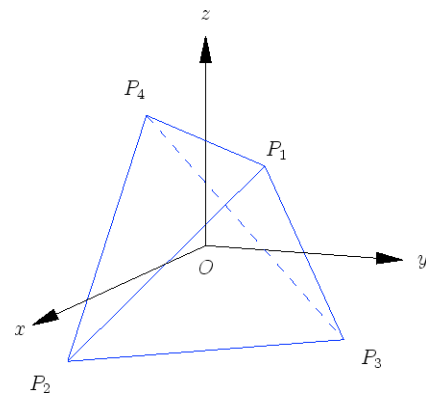
$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \text{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

لیکونکي: اپ، هولیک

په کارتيزي کوارډينات کې ټکي

$$P_1 = (1, 1, 1), \quad P_2 = (1, -1, -1), \quad P_3 = (-1, 1, -1), \quad P_4 = (-1, -1, 1)$$

د منظم ټيټرايډر کونجونه جوړوي د اړخ اوږدوالي $2\sqrt{2}$ سره او په O کې د دروند ټکي سره



په غونډاري کوارډينات (r, ϑ, φ) کې گوټکي يا کونج- لاندې کوارډينات لري

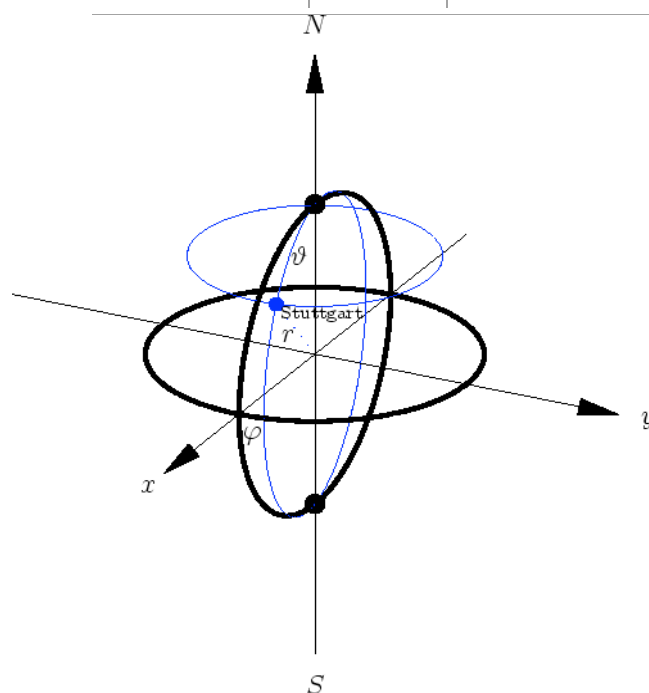
$$\begin{aligned} P'_1 &= (\sqrt{3}, \psi, \pi/4), & P'_2 &= (\sqrt{3}, \pi - \psi, -\pi/4), \\ P'_3 &= (\sqrt{3}, \pi - \psi, 3\pi/4), & P'_4 &= (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4), \end{aligned}$$

چېرته چې $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$ همداسې $\psi = \arctan \sqrt{2}$ دي

د اوږدوالي – او سور درجې (طول البلد او عرض البلد؟)

په ځمغونډاري (ځمغونډوسکي) يا ځمکې کره باندې د اوږدوالي – او سور درجې د کرې يا غونډاري کوارډينات دي، خو يواځې بل ډول کونجورشو گاڼې (کونجساحې) کارول کيږي:

ختيز اوږدوالی	$180^\circ - 0^\circ$	$\varphi = 0 \dots \pi$
لویدیز اوږدوالی	$180^\circ - 0^\circ$	$\varphi = 0 \dots -\pi$
شمالي سور	$90^\circ - 0^\circ$	$\vartheta = \pi/2 \dots 0$
جنوبي سور	$90^\circ - 0^\circ$	$\vartheta = \pi/2 \dots \pi$



په څیره کې اېکواتور (سور 0°) او صفري اوږدوالی غور کښل شوي دي، شمالي قطب (90° درجي شمالي سور) او جنوبي قطب (90° درجي جنوبي سور) هم په نڅېنه شوي دي. شنه اوږدې - او سور گردې د ستوتگارت (90° درجي ختيزي اوږدوالی، 49° درجي جنوبي سور) تېريږي

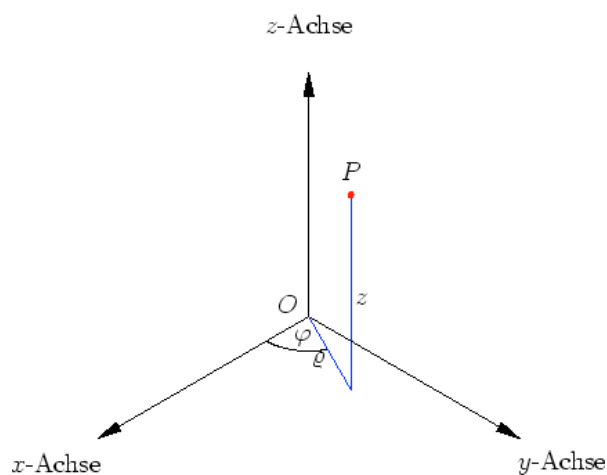
او $\varphi = \frac{1}{20}\pi$ (ختيز نیم غونډاری) او $\varphi = -\frac{19}{20}\pi$ (لویدیز نیمغونډاری په نڅېنه کوي)

$$\vartheta = \frac{41}{180}\pi \text{ او}$$

توته – يا استوانه کواوردیناتونه Zylinderkoordinaten

بوټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د یوه کونج φ له لارې، چې د x -مخور او د xy -هواره باندې د پریوستون (پروجکشن) $\overline{OP}$ ترمنځ پروت دی، پریوستون د اوږدوالي او د z -کواوردینات له لارې وټاکل شي.

کونج φ ټیک ترد 2π پورې ټاکلی. د ستانداردورشو پرېکړه زیات وخت تر $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پورې شوې.



باور لري

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

همداسې

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z,$$

د کوم سره، چې د x او y د مخنځینې پورې اړونده د ارکوستانجنت یوه څانګه ټاکل کېږي.

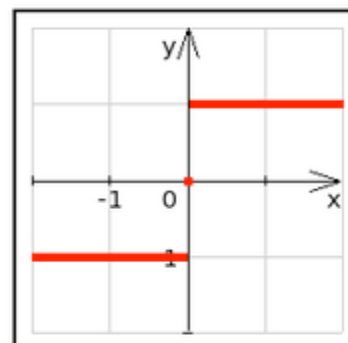
د اصلځانګې کونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري:

په لاندې کې Für د ... لپاره په مانا او sign سګنوم لوستل کېږي

د $x > 0$, لپاره	$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, \\ \text{sign}(y)\pi/2, \\ \varphi_H + \pi, \\ \varphi_H - \pi, \end{cases}$
د $x = 0$, لپاره	
د $x < 0 \wedge y \geq 0$, لپاره	
د $x < 0 \wedge y < 0$, لپاره	

سیګنوم (لاتین: Signum نڅېنه) فنکشن په ریيل ګڼونکړېنه:

د فنکشن د مخنځینو ګراف

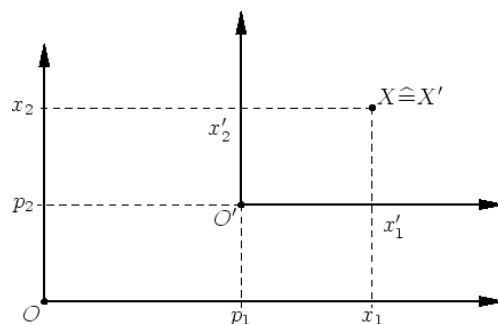


د ریيل ګڼونو څیره ونه ده په ډېرۍ $\{-1, 0, 1\}$ کې

وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) Translation

د سرچینې O کښولو سره و $O' = (p_1, p_2, p_3)$ ته د برابر پاتیکیدونکي لور سره د یوه ټکي $X = (x_1, x_2, x_3)$ کواوردینات په لاندې توګه تغیر خوري

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) .$$



خوزنده یا متحرک نسبي سیستم

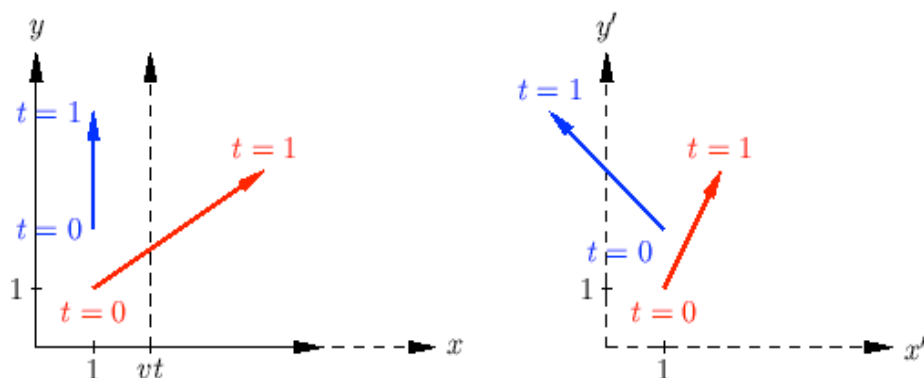
د پوه د x -محور په لور د v چټکتیا سره ځغلنده ګاډی په هواره (سطحه) برابر ډوله خوزښت

$$(x(t), y(t)) = (p + \alpha t, q + \beta t), \quad t \geq 0,$$

په پام کې نیسو ، نو کواوردینات یې په لاندې ډول تغیر خوري

$$x' = x - vt, \quad y' = y.$$

کتونکی یوه بله چټکتیا ریښتوني نیسي یا بله چټکتیا ګوري



د بیلګې په توګه د یوه شي لپاره باور لري، چې د یوه وخت په یوون (واحد) کې د $v = 2$ لپاره له ټکي $P = (1, 1)$ و ټکي $Q = (4, 3)$ ته خوزي (سور غشی)

$$P' = (1, 1), \quad Q' = (4 - 2, 3 - 0) = (2, 3).$$

د ریښتوني او کتونکي چټکتیا لپاره په ورته توګه باور لري

$$v_t = \sqrt{(4 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{13}, \quad v_b = \sqrt{5};$$

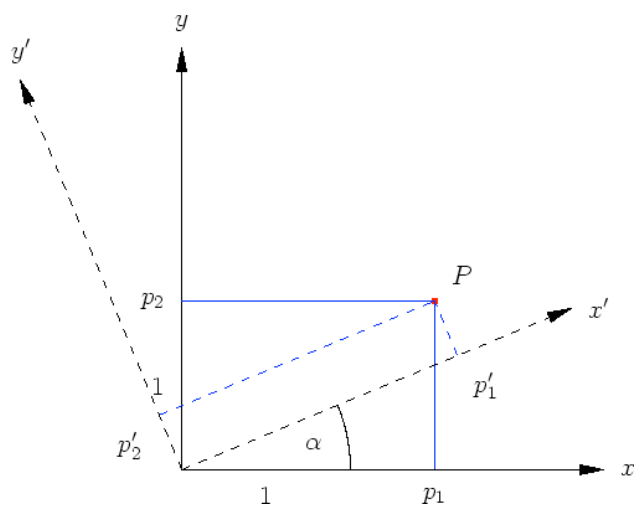
له دې خوزښت څخه خوزښت بټیاوالی برېښي.

لیکونکي: ایپ، هولیک

څرخون Rotation

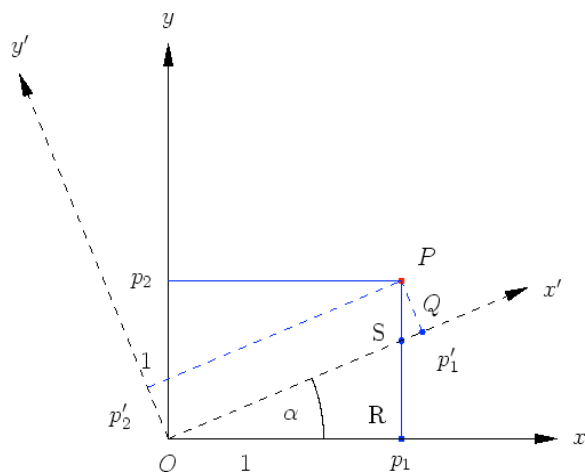
د xy -هوارې یا سطحې څرخون په z -محور د یوه ټکي $P = (p_1, p_2, p_3)$ کواورډینات د α کونج سره ترانفورمي کيږي د لاندې سره سم

$$p'_1 = \cos \alpha p_1 + \sin \alpha p_2, \quad p'_2 = -\sin \alpha p_1 + \cos \alpha p_2, \quad p'_3 = p_3.$$



په ورته توگه د yz - او zx - هوارو څرخون لپاره فرمولونه لاس ته راځي

ليکونکي: اېپ، هولېگ



لومړی پیژنو، چې

$$\angle(S, P, Q) = \alpha,$$

دایه دې معنا چې ولاړکونجیز درېځودی (مثلث) $\triangle(R, O, S)$ او $\triangle(Q, P, S)$ ورته دي.

په لومړي درېځوډي کې باور لري.

$$|\overline{OS}| = p_1 / \cos \alpha$$

او

$$|\overline{RS}| = p_1 \tan \alpha .$$

له دويم درېځوډي لاس ته راځي

$$p'_2 = \cos \alpha |\overline{PS}| = \cos \alpha (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \cos \alpha p_2 - \sin \alpha p_1$$

او

$$p'_1 = |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1 / \cos \alpha + \sin \alpha (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} p_1 + \sin \alpha p_2$$

ليکونکی: اېپ، هولير

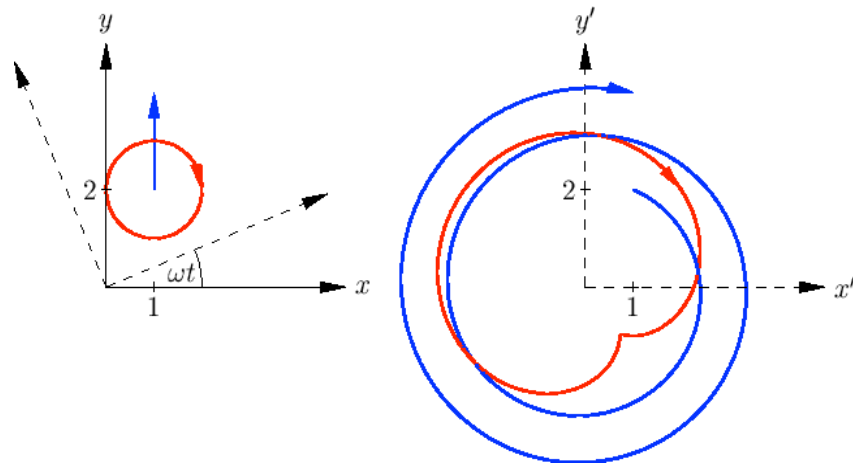
څرخنده يا څرخيدونۍ نسبي سيستم :

تابع کين د د سيده کرښيز او گردي ډوله خوزښتونو د د خوزښت منحني بنايي:

$$G: (x, y) = (1, 2 + t/(2\pi)),$$

$$K: (x, y) = (1 + \cos(t), 2 - \sin(t)).$$

بني لور ته دواړه منحنی يا کرې ديوهکونج سره څرخيدوني نسبي سيستم انځوروي، دا په دې معنا چې داسې لکه په يوه کاروسل (هغه څرخيدوني شيان دي، چې کسان په کې گرځي) کې يوه کتونکي ته برېښي.



د کواوډيناتو ترانفوميشن يا بدلون د سيده کرښيز خوزښت لپاره راکوي:

$$x' = c + (2 + t/(2\pi))s, \quad y' = -s + (2 + t/(2\pi))c$$

د لاندې سره

$$c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t).$$

يوه شپيرال منځ ته راځي، ځکه چې په نوکانو کې ضريب د جگيدونکي t سره لويږي.

دا جوړشوي 2 اوړونونه وخت انټروال $0 \leq t \leq 4\pi$ په گوته کوي. د بدلي شوي کواوډينات څخه د $\omega = 1$ سره د دايره ډوله خوزښت لپاره

$$x' = c(1 + c) + s(2 - s), \quad y' = -s(1 + c) + c(2 - s),$$

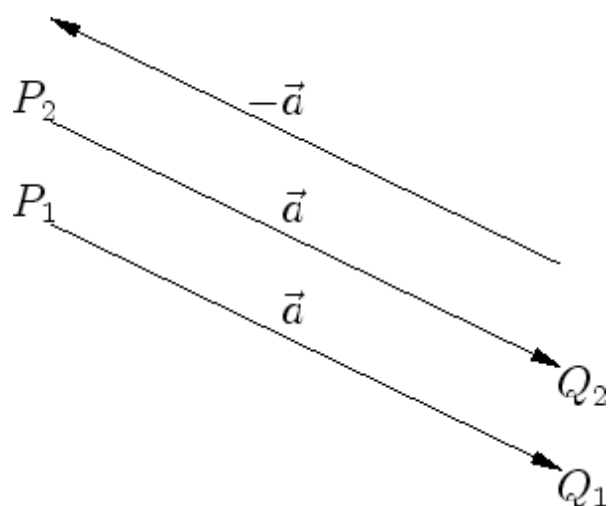
په څرخون سیستم کې د خوزبستمېنې بڼه نه پسې تړلې پېژندل کېږي. لکه دا بېلګه چې په ګوته کوي، کېدای شي د کتلو لور سملاسي تغیر شي. کېدای شي چې د کتلو خوزبست منحنی کې ګوډ یا ماتوالی راپېدا شي. په څرخېدونکي سیستم کې په یوه داسې زینګولار ټکي کې کتونکي چټکتیا صفر ده.

وکتورونه په فضا کې

یو وکتور یوه لوریزه ټوټه کرېښه ده:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

دا وکتور له ټکي P څخه و ټکي Q ته په نځېنه کوي. یا بڼایي. په بدیله توګه کېدای شي وکتور په فضا کې د P -راکېښې په توګه افاده شي او له یوه غشي سره په نځېنه شي.



لکه د څیرې څخه چې کتل کېږي برابر اوږده غشي په همغه (برابره) لور همغه (برابر) وکتورونه $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ انځوروي.

ځانګړي انځورونه نسبت و سرچینې ته ځای وکتور بلل کېږي او د وکتور کواوردیناتونه داسې تعریفوي:

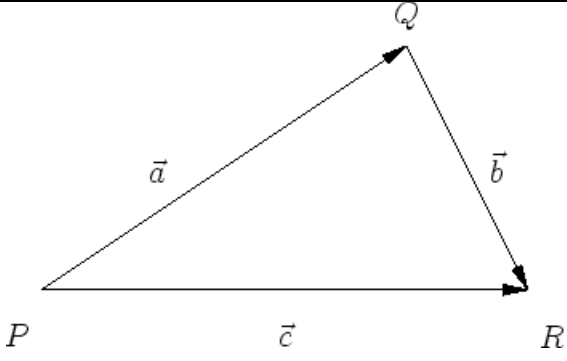
$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

د $\vec{a}$ کواوردیناتونه هم کیدی شي د د ټکو Q او P کواوردیناتونو په څېر و شمیرل شي. بالاخره د

$$\vec{OO} = \vec{PP} = \vec{0}$$

سره صفروکتور په نڅېنه کوو.

د وکتورونو جمعه (زیاتون):

د دوه وکتورونو جمعه د وکتورونو یو و بل ته یا یو بل پسې راکښنه ده $\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR}.$	
---	---

د کواوردیناتونو یا محورونو لپاره دا دي:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

د

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

سره و $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ته مخامخ يا په خټ (برعکس) راکښنه $-\vec{a}$ په نڅښه کيږي. په ځانگړې توگه باور لري

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

(ليکونکي: هولیک، موخ)

د ټکو $P = (1, 1, 1), \quad Q = (4, 2, 7), \quad R = (1, 4, 3)$ لپاره وکتورونه $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ او $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} + (-\overrightarrow{QR})$ شمير لکيږي	
--	--

لکه په څيره کې چې کښل شوي د کواورد ياناتو لپاره باور لري:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 4-2 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-4 \\ 7-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-\vec{c}}{c}$$

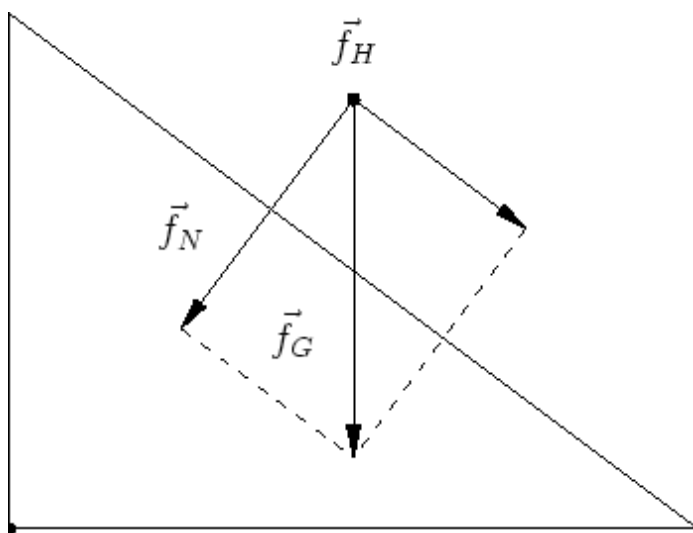
(لیکونکي: هولیک، موخ)

د یوې کُرې سطحې (هواری) لاندې داسې یوه سطحه پوهیږو، چې د پروتوالي لور ته میلان ولري.

لکه څنگه چې په څیره کې لیدل کیږي، کیدی شي د وزن زور $\vec{f}_G$ په دوه یو بل سره ولاړو یا عمود بوخو یا کمپوننتونو ټوټه شي (د زور ټوټه کونه د دوه زور غبرگ اړخیزې (موازی الاضلاع) سره).

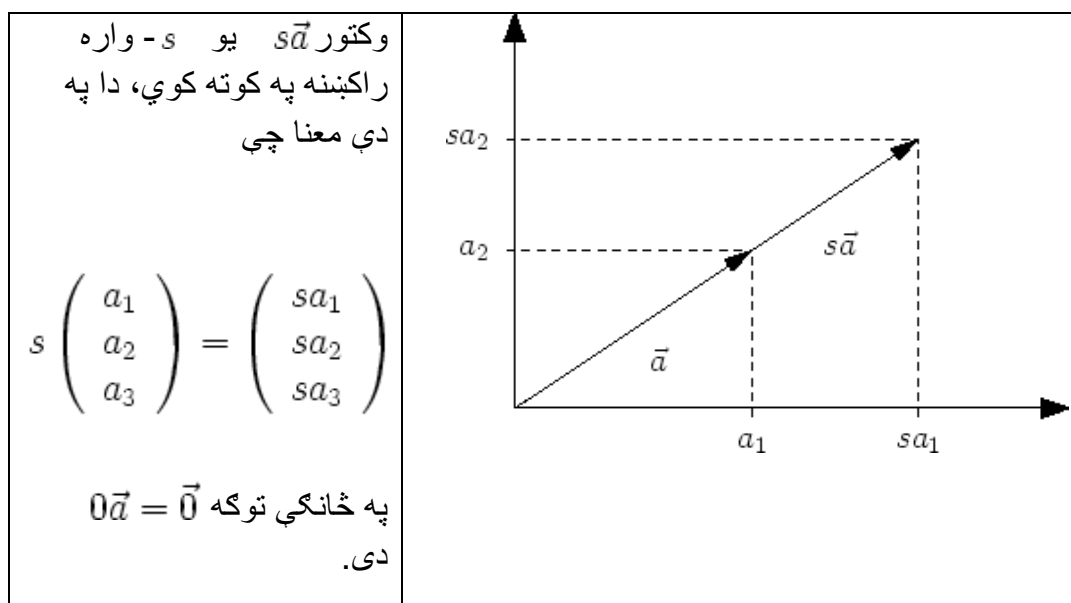
$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H.$$

مایلي سطحې سره عمود عمودي زور (ولاړ زور) اغیزه لري. او میلی هواری سره غرگ کښته لور ته لوریزه بیرته بیرته زورند زور $\vec{f}_H$ اغیزه لري.



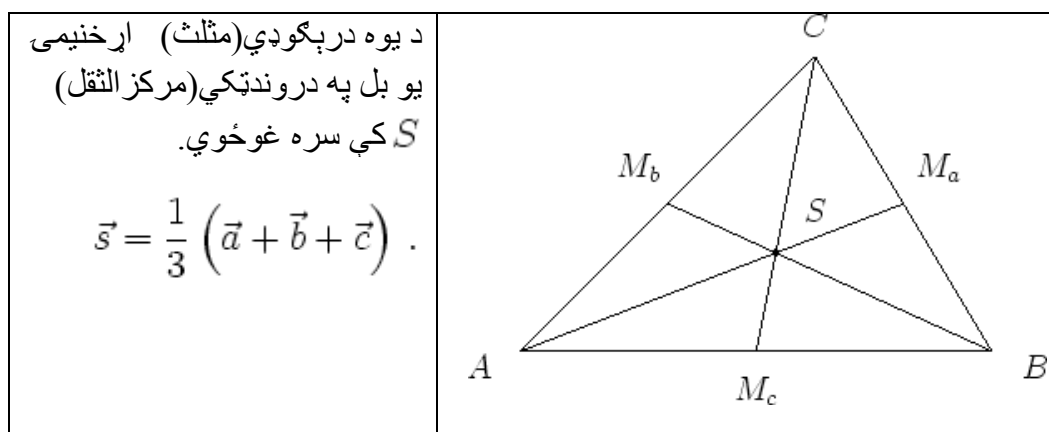
(لیکونکي: هولیک، موخ)

سکالار ضرب:



(لیکونکي هوټلیک، موخ)

د اړخنیمو غوڅتکي (نقاط تقاطع ناصف الاضلاع) :

ددې دښوولو لپاره ځای د وکتور د اړخنیم په ټکولیکو $\overline{AM_a}$ په لاندې بڼه:

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{m}_a - \vec{a}) = \vec{a} + t\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right), \quad t \in [0, 1].$$

د لپاره دی، نو دروندتکی $\overline{AM_a}$ په 1 : 2 نسبت وېشي

په ورته توگه اړخیميو $\overline{BM_b}$ او $\overline{CM_c}$ لپاره باور لري.
(لیکونکي هوليگ، موخ)

(مطلق) ارزښت

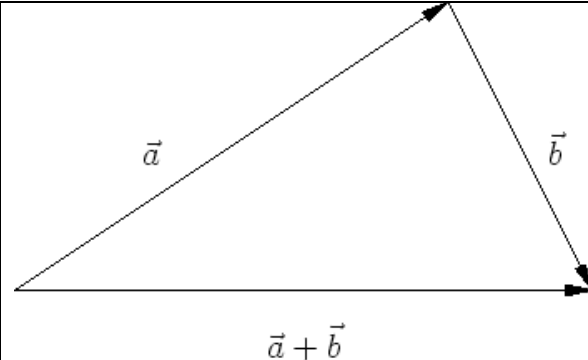
د $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ارزښت له P څخه د Q ته د غشي اوږدوالی دی همداسې له O و A ته، دا په دې معنا چې

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

په ځانگي توگه $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$ دي.

يو وکتور د 1 (مطلق) ارزښت سره یوونوکتور (واحدوکتور) بلل کيږي.

درېگوډيز (مثلثاتي) نامساوات :

د دوه وکتوونو د جمعي (زياتون) لپاره باور لري $ \vec{a} + \vec{b} \leq \vec{a} + \vec{b} $ د برابروالي سره ټيک هلته ، چې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ غبرگ(موازي) وي، دا په دې	
---	--

معناچې $\vec{a} = s\vec{b}$ دي.	
---------------------------------	--

(لیکونکي هوليگ، موخ)

د شمیرني قوانین:

د وکتورونو لپاره لاندې شمېر قوانین باور لري:

• Kommutativgesetz کموتاتیو قانون

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

• Assoziativgesetz اسوخیاتیو قانون

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

• Distributivgesetz دېسټریبیوټیو قانون

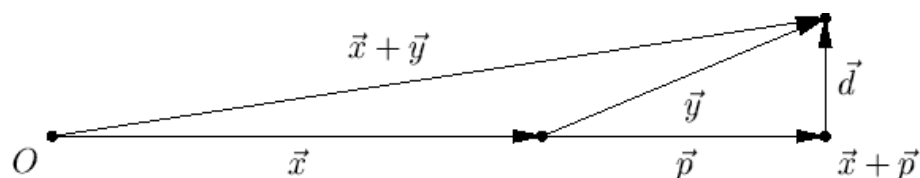
$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

(لیکونکي هوليگ، موخ)

(له باد را پیداشوي د لویو اوبو یا بحر په سر) هوا جریانات

Drift eines Flugzeugs

یوه الوتکه په 800 km/h چټکتیا ختیز لور ته الوزي د یوه باد 50 km/h چټکتیا سره له WSW .



که پروت محور د ختیز سره او ولاړ محور د شمال سره په نڅېنه کړېښ یاوېښايي، نو له

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سره د الوتکې چټکتیا او

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50 \cos(\pi/8) \\ 50 \sin(\pi/8) \end{pmatrix}$$

د باد چټکتیا ښايي.

د یوه ساعت وروسته الوتکه تر

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 800 + 50 \cos(\pi/8) \\ 50 \sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

پورې الوتې. که له $\vec{p}$ سره په کرښه د $\vec{y}$ عمود یا orthogonale پرېوستون د $\vec{x}$ په لور وېښايو، نو ټولیزه چټکتیا له کمپوننتو څخه

$$\vec{x} + \vec{p} = \begin{pmatrix} 800 + 50 \cos(\pi/8) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د ختیز لور ته او دریفت څخه

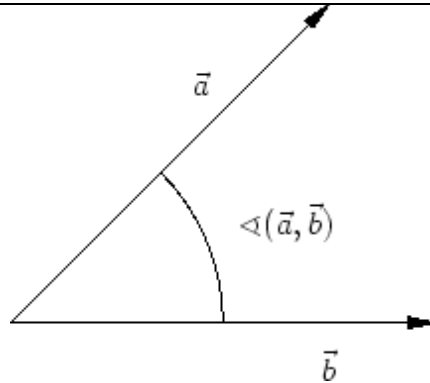
د شمال لور ته

$$\vec{d} = \vec{x} + \vec{y} - (\vec{x} + \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

جوړيږي.

(ليکونکي هوليگ، اپې)

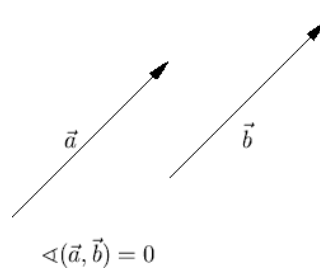
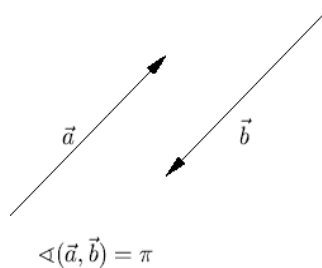
کونج يا زاويه :

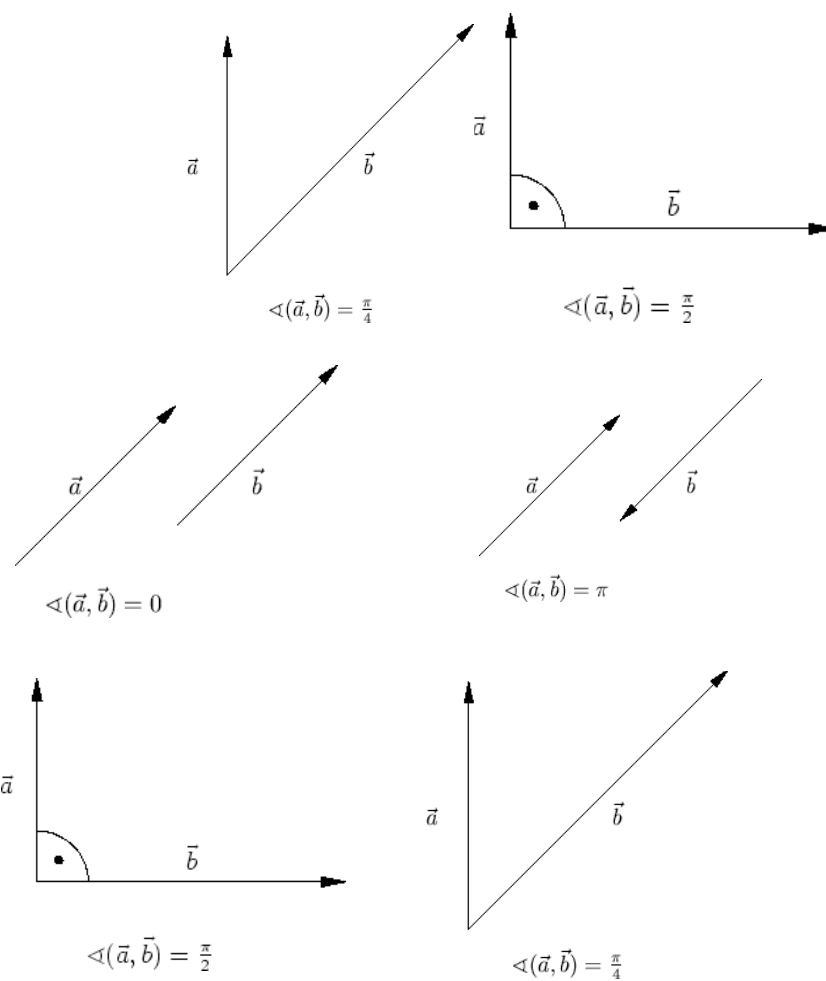
د $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ لپاره سړی د $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$ د دواړو کونجونو کوچنی کونج ښايي، چې د وکتور سره په نڅېښه شوي غشي سره گډ ککړۍ ټکی د رأس نقطه جوړوي.	
---	---

دواړه وکتورونه عمود دي، $\vec{a} \perp \vec{b}$ ، که کونج له $\pi/2$ سره برابر وي. له دې سره
قرار دادکيږي، چې صفروکتور په هر وکتور عمود يا ولاړ درېدلی.

(ليکونکي هوليگ، موخ)

لاندې څيرې يو څو نمونه يي حالتونه د ليد کوي.





د کوساین جمله :

په یوه درې‌ګوډي کې په کوم چې د اړخ $\overline{AB}$ مخامخ کونج γ پروت دی باور لري $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$	The diagram shows a triangle with vertices labeled A, B, and C. The side opposite vertex A is labeled 'a', the side opposite vertex B is labeled 'b', and the side opposite vertex C is labeled 'c'. The angle at vertex C is labeled with the Greek letter gamma (γ).
---	---

نو په ځانګړې توګه لاس ته د $\gamma = \pi/2$ لپاره د پیتاګوراس جمله راځي:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(لیکونکي هوليګ، موخ)

د ښوونې لپاره یې د پیتاګوراس له جملې کار اخلو.

باور لري $c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$ همداسې $q = b - p, \quad p = a \cos \gamma.$ له دې سره لاس ته راځي $c^2 = (a^2 - p^2) + (b - p)^2$ $= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$ څه چې د ښوولو وو. (لیکونکي هوليګ، موخ)	
---	--

سکالار ضرب :

د دوه وکتورونو ضرب د

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

د له لارې تعريف دی

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

او

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

د سکالار ضرب د کواورډینات د انځورولو له لارې لاس ته راځي

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

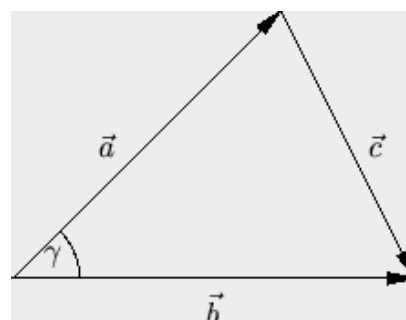
همداسي

$$(s\vec{a} + r\vec{b}) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c},$$

دا په دې معناچې د ضرب ورسره بلد قوانین باور لري.

(لیکونکي هولیک، موخ)

د دواړو ورته والیو انځورونه د کوساین جملې له لارې لاس ته اځي:



$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma.$$

که دایره مربع وي کين لور ته راوړل شي، نولاس ته راځي

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

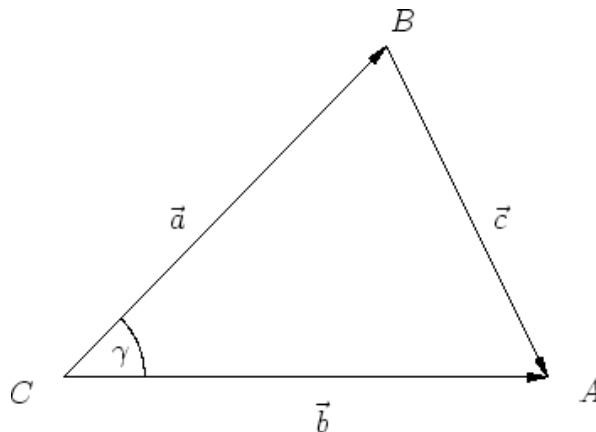
د بدلون $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$ څخه وروسته دواړه مربع وي يو بل سره پورته کوي يا سره له منځه ځي، او پاتې گډ ترمونه د (-2) - ځله سکالار ضرب سره يو بل سره سر خوري.

دا څېره شوی مثلث لاندې گوډونه لري

$$A = (6, 0), \quad B = (4, 4), \quad C = (0, 0)$$

او دی

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



د γ کونج د سکالار ضرب په مرسته شمېرل کېدی شي.

$$\cos \gamma = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

لاس ته راځي $\gamma = \pi/4$ ، لکه ترلي له کواوردیناتونو څخه د لیدني دي. د دې راوړل شوي بېلگې په بنسټ کېدی شي د کوساین جمله هم وشمېرل شي. باور لري

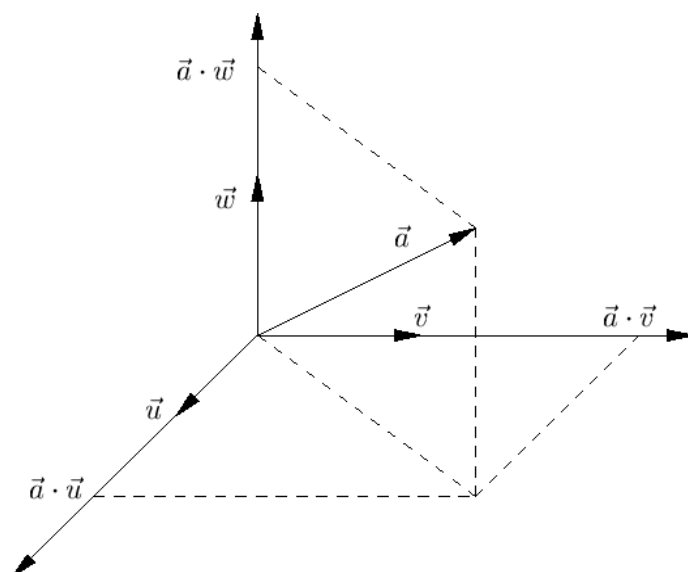
$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48,$$

او هم د $-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \gamma = -2(4\sqrt{2})6/\sqrt{2}$ سره توفیق مومي یا سر خوري.

(لیکونکي هوليگ، موخ)

اورتوگونال یا یو په بل ولاړ (عمودي) بنسټونه Orthogonalbasis

اورتوگونال بنسټ له درې جوړه اورتوگونال وکتورونو $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. څخه جوړ دي.



لکه په څیره کې چې کښل شوی دی، کیدی شي هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمپینیشن

$$\vec{a} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}|^2} \vec{u} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})}{|\vec{v}|^2} \vec{v} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{w})}{|\vec{w}|^2} \vec{w}$$

له لارې انځور شي. د زیاتوونو (د جمعې برخو) د بنسټیزو وکتورونو تولید شوی پرېستونونه دي، او د ضریبونو لپاره باور لري

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a} \cdot \vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a} \cdot \vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2.$$

که وکتورونه $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ نورمي یعنې یو په بل ولاړ (عمود) وي، نو د اورتوگونال بنسټ څخه غږېږو. په ځانګړې توګه لرو:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \vec{e}_x + a_2 \vec{e}_y + a_3 \vec{e}_z$$

د کارټیزي کواوردینات سیستم د کانونیکي اورتوگونال بنسټ

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لپاره

(لیکونکي هوليګ، موخ)

دا چې هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمپینیشن

$$\alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$$

له لاري انځورېدلای شي، هندسي تړلی لیدل کیږي

د ضریبونو د ټاکلو لپاره د بنسټ وکتورونو سره سکالار ضرب جوړیږي. دا چې

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} = 1, \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{u} = 0,$$

د سکالار ضرب د کرښیزوالي له لاري لاس ته راځي:

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = \left(\alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right) \cdot \vec{u} = \alpha.$$

په ورته توګه د β او γ لپاره ورته فرمول تصدیقوي. د ضریبونو د مربع جمعې فرمول لپاره سړی د لاندې ضربولو له لاري

$$|\vec{a}|^2 = \left(\alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right) \cdot \left(\alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right).$$

ښوول کیږي.

دا هم په ساده توګه لیدل کیږي، چې پرېستونو ته کمښت وکتورونه

$$\vec{a} - \alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}, \quad \vec{a} - \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}, \quad \vec{a} - \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2},$$

هر یو په اړونده بنسټ وکتور باندې عمود یا ولاړ دی:

$$\left(\vec{a} - \alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} \right) \cdot \vec{u} = \left(\beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right) \cdot \vec{u} = 0.$$

(لیکونکي هوليګ، موخ)

نسبت اور توگونا ل بنسبت ته

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وكتورونه

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$$

لاندي ضربونه لري.:

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$	=	$\vec{a} \cdot \vec{u}$
$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{3}$	=	$\vec{a} \cdot \vec{v}$
$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$	=	$\vec{a} \cdot \vec{w}$

له دي سره انځورونه لاس ته راځي:

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{u} + \sqrt{3}\vec{v} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\vec{w}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب ، صليبي يا چليپا ضرب:

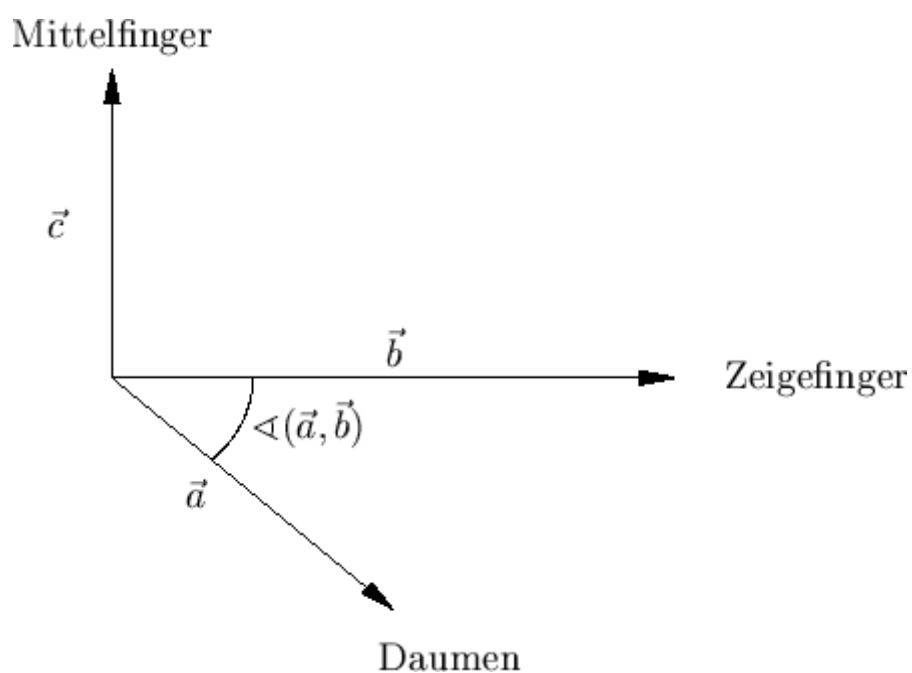
وکتور

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتوگونال دی، د ،، بني —لاس- قانون، لوريز دی او اوږدوالی

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})).$$

لري. (د څيري د الماني پښتو: منځکوته، کوتلکه، غټه کوته)



شکل کي الماني: پورته: منځگوته، ښی لور ته: نخښ گوته، کښته لور ته غټه گوته

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

په ځانگړې توگه باور لري د لپاره او د $\vec{a} \perp \vec{b}$ لپاره .

بدیل يي وکتور د

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

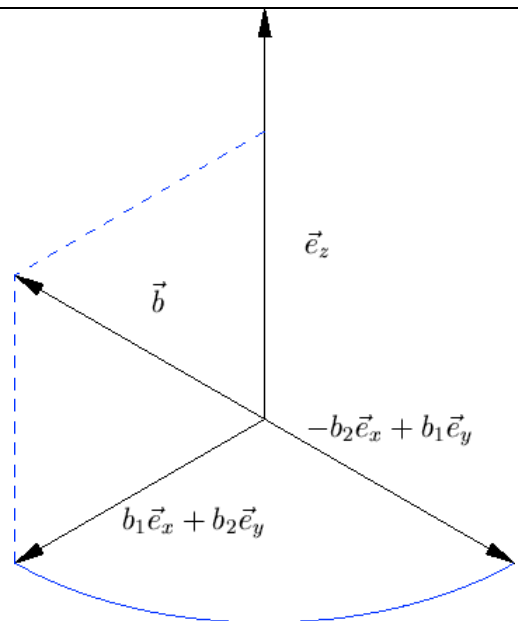
سره تعريفوي.

(ليکونکي : هولیگ، اپپ)

د دې لپاره چې د دواړو تعريفونو ورته والی وښايو، لومړی په پام کې نيسو، چې دواړه انځورونې په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ کې گربښي دي، دا په دې معنا چې سکالار ضرب او وکتور جمعې سره زعمور دي. د کواورديناټ انځورونې لپاره کيدی شي دا تړلی پسي وشميرل شي. فقط زیاتونوالی(جمعه کيدنه) د هندسي تعريف لپاره څرگنده توگه روښانه دی.

لومړی ښايو، چې .

$$\vec{e}_z \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$



لکه له څیرې چې لیدل کیږي، وکتور ضرب لاس ته راځي، داسې چې که وکتور $\vec{b}$ په xy -سطحه پرېوتل شي او بیا په کونج $\pi/2$ و څرخول شي. دا چې د پرېوستون اودوالی

$$|\vec{b}| \sin(\angle(\vec{e}_z, \vec{b}))$$

دی، نو پورتنی فرمول لاس ته راځي.

د ځانګړې انځورونې څخه په دویمه کمپوننت کې د سیده پسي شمېرنې کرښیزوالی لاس ته راځي، ځکه چې بې د ټولیز محدودیت څخه د لومړي وکتور لور د $\vec{e}_z$ په حیث ټاکو.

په ورته توګه لومړی کمپوننت هم همداسې کاروو.

بسیا کوي، چې د $\vec{e}_x$ ، $\vec{e}_y$ ، $\vec{e}_z$ کانونیکي بنسټ وکتورونو کمبینیشن لپاره وراته والی و ازمایل شي.

(لیکونکي: هوليګ، اپپ)

د تعریف یا پیژند د څرګندونې لپاره د وکتورونو

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{او} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب $\vec{c}$ شمیرل کیږي.

یو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتونال وکتور دی

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \parallel \vec{c},$$

کوم چي همدا اوس ټيک لوريزوالی لري. له

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لاس ته راځي: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$. له دې سره

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

دی او ورپسې

$$\vec{c} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

په بديله توگه په ساده توگه تحليلي تعريف

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته اځي

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(ليکونکي: کلاوس، هولیک)

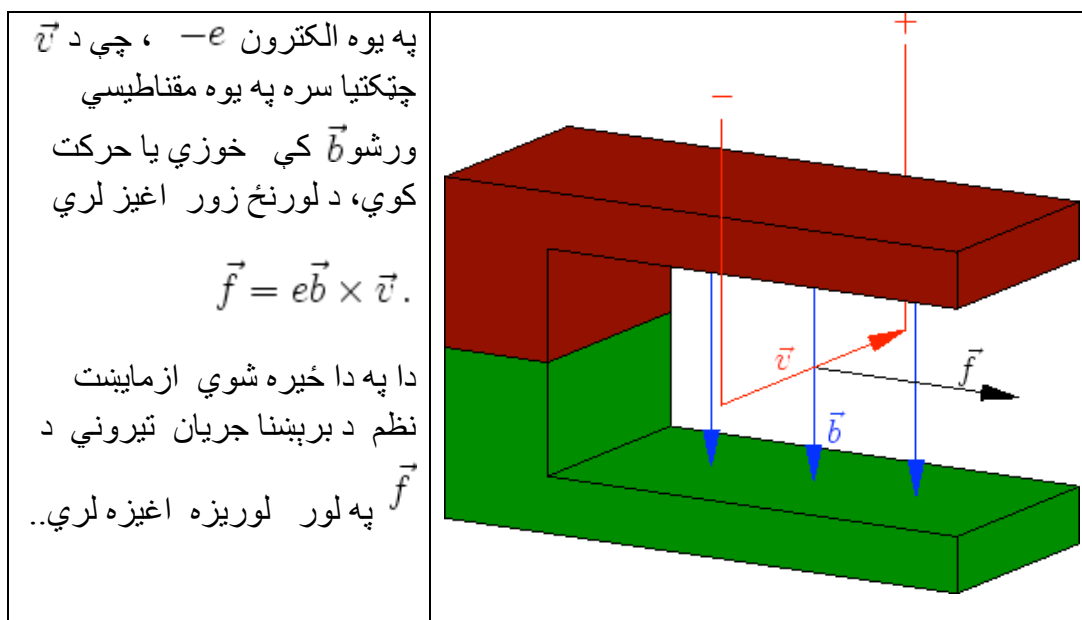
د ستاندارد بنسټ لپاره باور لري

$$\begin{aligned}\vec{e}_x \times \vec{e}_y &= \vec{e}_z, & \vec{e}_y \times \vec{e}_z &= \vec{e}_x, & \vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y \\ \vec{e}_x \times \vec{e}_x &= \vec{0}, & \vec{e}_y \times \vec{e}_y &= \vec{0}, & \vec{e}_z \times \vec{e}_z &= \vec{0}.\end{aligned}$$

اړونده فرمولونه د په خوښه ، د ،، بنې-لاس-قانون،، سره سم لوريږي اور توگونال بنسټونو لپاره باور لري.

(ليکونکي : هوليگ، اپپ)

د لورنڅ زور Lorentzkraft



(ليکونکي : هوليگ، اپپ)

د وکتور ضرب لپاره قانونونه:

د وکتور ضرب لپاره لاندې قوانين باور لري:

• Antisymmetrie اسوځياتيو قانون

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

• Linearität کرښيزوالی

$$(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) \times (\beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2) = \alpha_1 \beta_1 (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) + \alpha_1 \beta_2 (\vec{a}_1 \times \vec{b}_2) +$$

$$\alpha_2 \beta_1 (\vec{a}_2 \times \vec{b}_1) + \alpha_2 \beta_2 (\vec{a}_2 \times \vec{b}_2)$$

• غبرګارځيز يا موازی الاضلاع ډ سطحی مساحت، هغه چي له وکتورونو a او b غزېدلې، د هغه د ضرب مطلق ارزښت دی، نو $|a \times b|$.

• د ګراسمن کټمتوالی Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

• د لاګرانج کټمتوالی Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(لیکونکي: اپې، هولېګ، کیمرلي)

انتیسیومتری او کرښيزوالی د وکتور ضرب د کواورډینات انځورونې څخه تړلی لیدونکی دی.

د کټمټوالي د بنوونې لپاره کیدی شي بی له ټولیزو بندیزونو $\vec{a} = \vec{e}_x$ ونيول شي او باید په $\vec{b}$ کې د کرښیزوالي په بنسټ فقط حالتونه $\vec{b} = \vec{e}_y$ او $\vec{a} = \vec{e}_x$ وخیږل شي، د $\vec{a} = \vec{b}$ لپاره د کټمټوالي دواړه اوڅونه په ساده توګه صفر دي.

په لومړي حالت کې د کینې اړخ د ګاسمن کټمټوالی لاس ته راځي

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

دا د ښي اړخ

$$c_1 \vec{e}_y - c_2 \vec{e}_x$$

سره یوڅرښ کيږي. په دې راورل شوي ځانګړي حالت ($\vec{b} = \vec{e}_y, \vec{a} = \vec{e}_x$)

کې د لاګرانژ کټمټوالی

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix} = c_1 d_2 - c_2 d_1,$$

هم ټیک دی.

په ورته توګه د $\vec{b} = \vec{e}_z$ لپاره هم دلیل راورل کيږي.....

کرښیزوالی کیدی شي د غبرګیزوالی لپاره وکارول شي. دا لاندې یې بیلګه ده.

$$\left(3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د گراسمن - او لاگرانژ کتوتوالی وکتور ضرب په ساده توګه د شمیرلو سکالار ضرب ته بیرته بیایي. د بېلګې په توګه دی

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right) \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

او

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right) \cdot \left(\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right) = 0 \cdot 6 - 12 \cdot 1 = -12.$$

(لیکونکي: اپې، هولیک)

د ایپسیلون - تنزور Epsilon-Tensor

د ε -تنزور

$$\varepsilon_{i,j,k} \in \{-1, 0, 1\}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\},$$

د دوه برابر وپیژندنځینو (اینډکسونو) سره صفر دی او دوه جوړه ډوله مختلفو اینډکسونو سره لاندې ارزښت لري:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,2,3} &= \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = 1, \\ \varepsilon_{1,3,2} &= \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1.\end{aligned}$$

نو دا د څيکليکي پرموتيشن (ځای بدلون) لاندې اينوارينانت (تغير نه خوړونکي) دی او د پېژندنځېنو يا ايندکسونو د بدلون سره مخنځېنه بدلوي.

(ليکونکي: اېپ، هولېگ)

د -تنروز په مرسته کيدی شي د وکتور ضرب $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ په لاندې بڼه وليکيل شي.

$$c_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

(ليکونکي: اېپ، هولېگ)

شپات ضرب

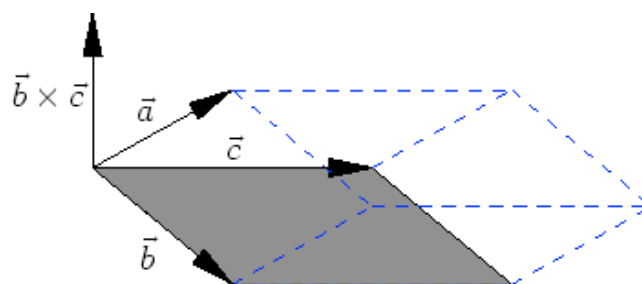
شپات ضرب

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ترمخنځېني پورې د له درې وکتورونو $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ څخه غزول شوی شپات ډکي يا حجم سره يو غبريز شي يا برابر شي.

(غبرگ سطحيز)



د ε – تنزور په مرسته کېدی شي د غبرګخواييز يا شپات ضرب په لاندې بڼه هم وليکل شي:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

(ليکونکي: اېپ، هولېگ)

$$\vec{d} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$$

سره

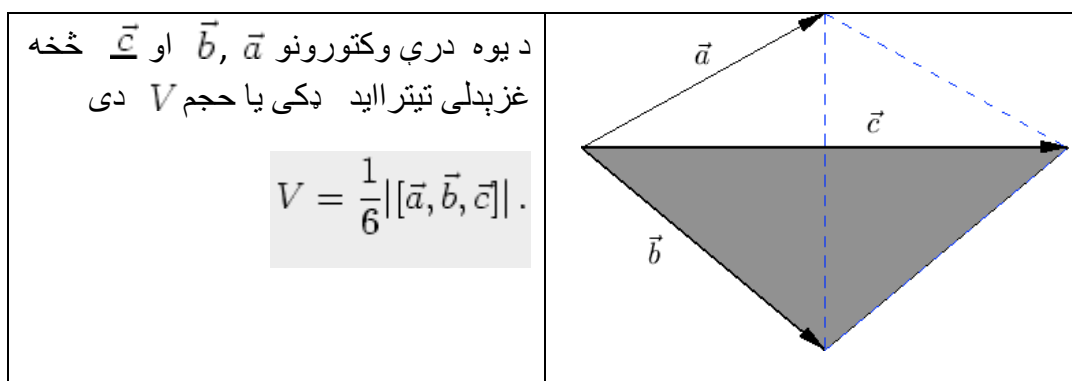
د

$$h = |\vec{a}| \left| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{d})) \right| = |\vec{a} \cdot \vec{d}|$$

د شپات يا غبرګ سطحيز جگوالی دی. دا چې $f = |\vec{b} \times \vec{c}|$ د کرښيز شوي غبرګ اړخيز د سطحې خونديونه ده، د ډکي يا حجم لپاره لاس ته راځي:

$$hf = \left| \vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \right) \right| |\vec{b} \times \vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|.$$

د يوه څلور سطحيز (حجم) شميرنه Volumen eines Tetraeders



(لیکونکي: اېپ، هولیګ)

د یوه تیترااید (څلور سطحیز) ډکی V داسې شمیرل کیږي

$$V = \frac{1}{3} Gh,$$

چیرته چې G بنسټ سطحه ده او h جگوالی په گوته کوي. که په بام کې ونیول شي، چې G نیم دومره لوی دی، لکه د غبرګسطحیز G_{Spat} سطحه، چې له درې وکتورونو غزېدلی، نو لاس ته

$$V = \frac{1}{6} G_{\text{Spat}} h = \frac{1}{6} V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

راځي، د غبرګسطحیز V_{Spat} په مرسته.

(لیکونکي: اېپ، هولیګ)

د څلور سطحیز V ډکی، چې له وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

غزېدلی ، دی

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

د غبرګسطحيز يا ذونقي خويونه Eigenschaften des Spatprodukts

د غبرګسطحيز ضرب په هر Argument کې کرښيز دی او سربيره پردي دا لاندې نور خويونه لري

- ځيوکليکي – يا تل بيرته راګرځيدونی بدلون : zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

- کرښيز بلواکوالی يا تابعيت

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c},$$

د لږ ترلږه يوه سکالار α, β, γ سره د 0 سره نابرابر.

• Orientierung: لوريزونه

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$$

د هر بني سيستم لپاره

(ليکونکي: اپپ، هولیک)

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ارزښتونو شمیرنه

وکتورونه $\vec{u}$, $\vec{v}$ او $\vec{w}$ یو ریښتونی غیرگهواریز (سطحیز) غزوي، نو یو په خوښه وکتور $\vec{x}$ کیدی شي د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$$

په څیر انځور شي د لاندې ضریبونو سره:

$$\alpha = \frac{[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}, \quad \beta = \frac{[\vec{x}, \vec{w}, \vec{u}]}{[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]}, \quad \gamma = \frac{[\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}]}{[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]}.$$

(ليکونکي اپپ، هولیک)

د

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$$

لپاره سکالار ضرب د $\vec{v} \times \vec{w}$ سره جوړوو، نو لاس ته راځي

$$\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \alpha \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

همداسي

$$\alpha = \frac{[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]},$$

داچې $\vec{u}$, $\vec{v}$ او $\vec{w}$ یو ریښتونی غبرګسطحیز غزوي، داپه دې معنا چې $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$ دي. د β او γ لپاره سړی په روته توګه مخ ته ځي. (لیکونکي اېپ، هولیک)

که وکتور

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د وکتورونو

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د کرښیز کمبیشن په څیر انځورول غواړو، نو لاس ته راځي

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = 2$$

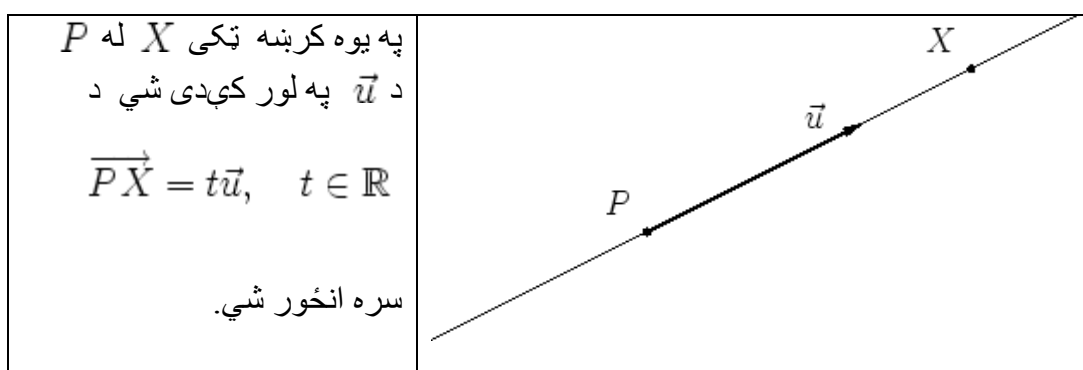
$$[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}] = 4, \quad [\vec{x}, \vec{w}, \vec{u}] = -4, \quad [\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}] = 8$$

او له دې سره

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{4}{2}\vec{u} - \frac{4}{2}\vec{v} + \frac{8}{2}\vec{w} \\ &= 2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}.\end{aligned}$$

(لیکونکي اپ، هوليگ)

ټکي - لور - بڼه:



په ورته توگه باور لري

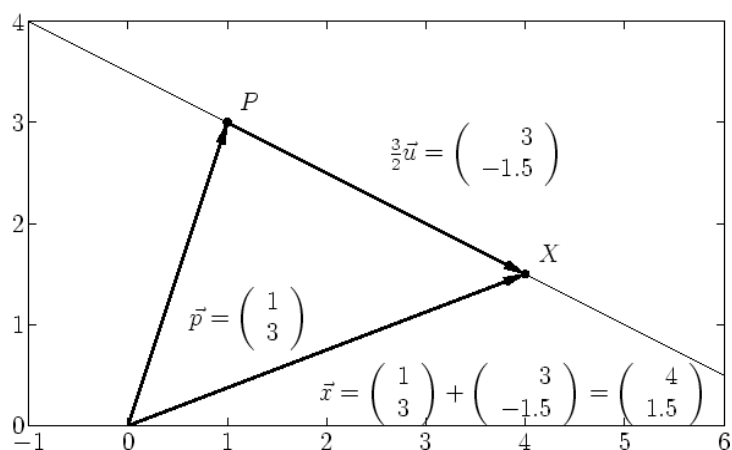
$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

د ځای-وکتور $\vec{x}$ کواوردیناتو لپاره.

(لیکونکي، هوليگ، هیورنر)

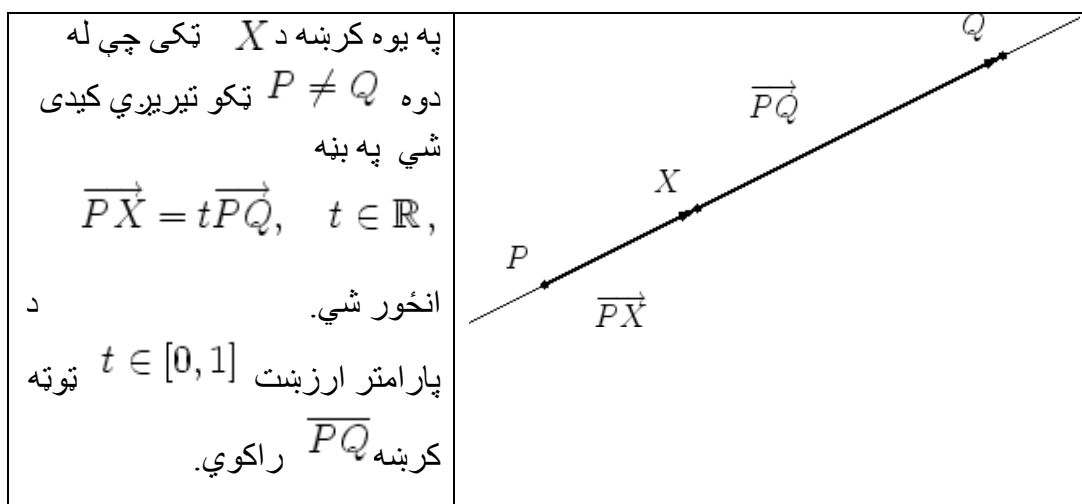
څېره د یوې کرښې د ټکي-لور-بڼه د لیدلو کوي د په د پاسه ټکي $P = (1, 3)$

او $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ لور سره. د کرښې د X ټکي پارامتر $t = 3/2$ لري.



(لیکونکي، هولیک، هیورنر)

دوه - ټکي - بڼه :



په ورته توگه

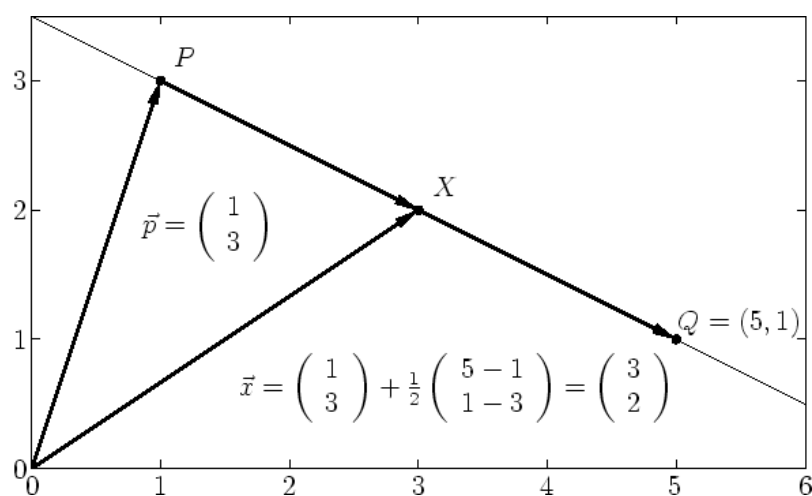
د ځای-وکتور $\vec{x}$ د کواورډینات لپاره باور لري

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

(لیکونکي، هولیک، هیورنر)

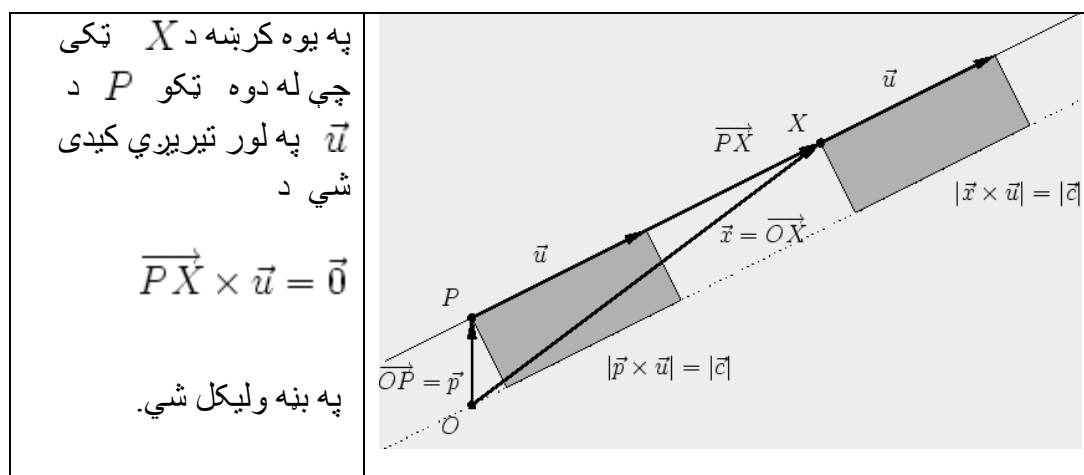
د $t \in [0, 1]$ لپاره د دوه-ټکو-بڼې سره ټکی X ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ په $(1-t) : t$ نسبت ویشي.

په ځانګړې توګه د P او Q ټکو ترمنځ منځ ټکو پارامتر $t = 1/2$ په ګوته کوي.



(لیکونکي، هولیک، هیورنر)

لحضوي – یا سترګورپ بڼه Momentenform



په ورته توګه د ځایوکتور لپاره باور لري.

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p} \times \vec{u}.$$

(لیکونکي، هوليګ، هیورنر)

د یوې کرښې لحظوی —بڼه کېدی شي استعمال شي، چې ایا یو ورکړ شوی ټکی X په یوه کرښه پروت دی. د دې څیره شوې بیلګې لپاره د X_1 ټکي لپاره ورکوي:

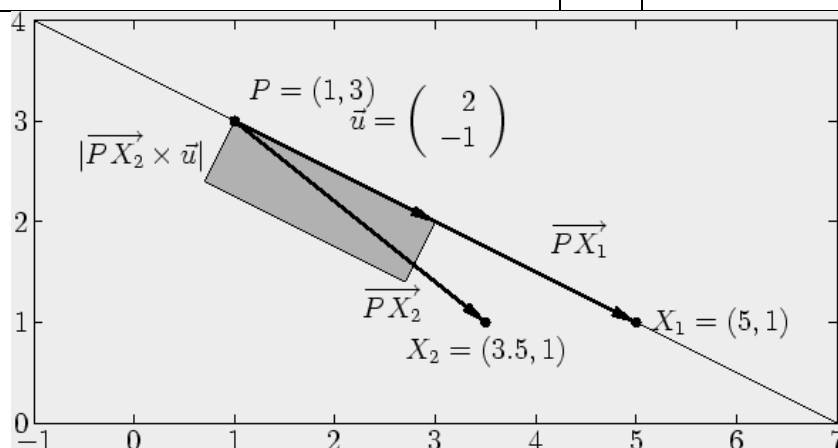
$$\overrightarrow{PX_1} \times \vec{u} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

د دې برعکس د X_2 ټکي لپاره لاس ته راځي:

$\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	=	$\overrightarrow{PX_2} \times \vec{u}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$	=	



د ټکي کرښې واټن:

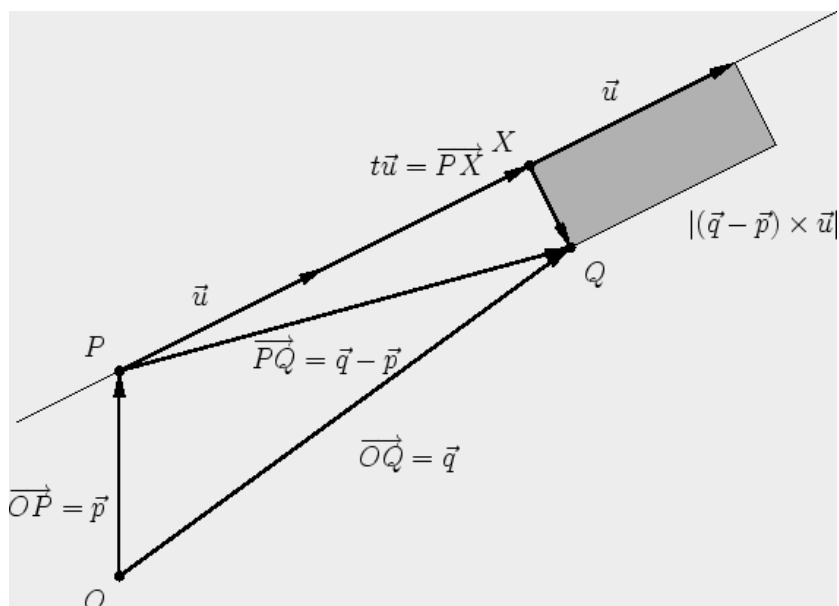
په یوه کرښه د یوه ټکي Q پروجکشن (پروېکشن) X چې له P تیرېږي د لور سره لاندې پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}.$$

له دې څخه د په حیث

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

واټن لاس ته راځي .



(لیکونکی، هولیک، هیورنر)

په کرښه د ټکي Q پرېستون X لپاره وکتور $\overrightarrow{XQ}$ په $\vec{u}$ عمود-یا نیغ ولاړ دی.

دا د سکالا ضرب له لارې ازمایل کېدی شي:

$$\overrightarrow{XQ} \cdot \vec{u} =$$

$$\left(\vec{q} - \left(\vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} \right) \right) \cdot \vec{u} = (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u} - \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} |\vec{u}|^2 = 0.$$

د چلیپا یا وکتوري ضرب تعریف له مخې باور لري

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \left(\angle (\vec{a}, \vec{b}) \right)$$

او له دې سره د واټن d لپاره:

$$\begin{aligned}
 d &= \left| \overrightarrow{XQ} \right| = \left| \overrightarrow{PQ} \right| \sin \left(\angle \left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u} \right) \right) = \\
 &= \frac{\left| \overrightarrow{PQ} \right| |\vec{u}| \sin \left(\angle \left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u} \right) \right)}{|\vec{u}|} \\
 &= \frac{|\left(\vec{q} - \vec{p} \right) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.
 \end{aligned}$$

(لیکونکی، هولیک، هیورنر)

که ټکی $Q = (3, 3, 3)$ په کرښه پرېستل شي

$$g : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د پروجکشن په حیث د ځای وکتور سره ټکی لاس ته راوړي

$$\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

واتمن

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2}{3}} = \sqrt{2},$$

د

$$|\overrightarrow{XQ}| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}.$$

سره یو غریز دی.

(لیکونکي: هولیک، هیورنر)

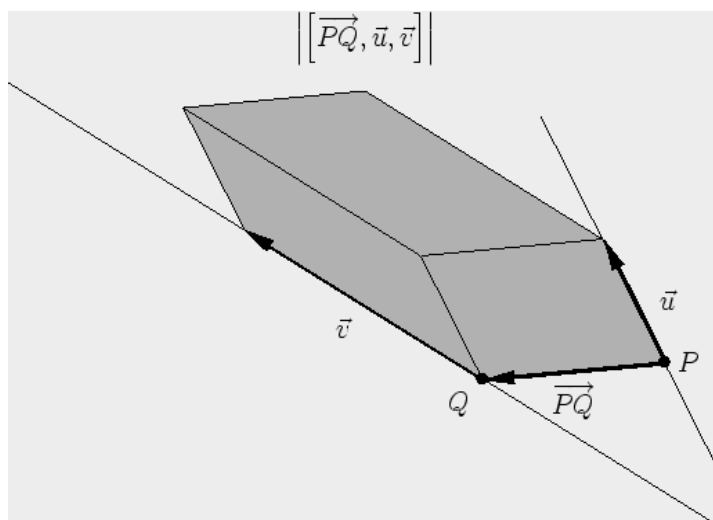
د دوه کرښو واټن :

د دوه کرښو ، چې له ټکو P ، Q او د لورو $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ سره ورکړ شوي دي واټن دی

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

که $\vec{u} \parallel \vec{v}$ وي. د غبرگو کرښو پاره باور لري

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$



دوه کرښې بادمايلي windschief بلل کيږي، که غبرګې نه وي او مثبت (زياتيز) واټن ولري..

(ليکونکي: هولېګ، هيورنر)

که

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

د ټکو ځای وکتورونه وي د خورا لنډ واټن سره، نو

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}$$

دواړو لورو وکتورونو سره عمود يا ولاړ دی، يعن غبرګ وه

$$\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}.$$

ته.

دا چي د يوه وكتور اوږدوالی د هغه مطلق ارزښت ضرب يوون (واحد) وكتور سره برابر دی لاس ته راځي:

$$d = |\overrightarrow{XY}| = \left| (\overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}) \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \right| = \left| \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \right|,$$

او له دې سره غوښتونکی فرمول.

د غبرگو کرښو لپاره هغه د يوه ټکي واټن له کرښې سره فرمول و کاروي.
(ليکونکي: هولېگ، هیورنر)

کرښې

$$g : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h : \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دا لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left| \left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v} \right] \right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(1 - (-2))^2 + (1 - 1)^2 + ((-2) - 1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(لیکونکي:هولیک، هیورنر)

د الوتنې لارې Flugkorridore

په ساده توګه نیسو، چې الوتکه په سیده لار له الوتنځای څخه و موخې ته الوزي او د التتار له سیده کرېښتو څخه جوړه ده، نو د یوې الوتنې لپاره له شتوتګارت (S) Stuttgart څخه و کوپنهاګن ته د جګیدني لار

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 8]$$

او د یوې الوتنې لپاره له فرانکفورت (F) څخه قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3].$$

که د ساده وینا څخه مخ ته لاړشو، چې الوتکه په سیده لار د د الوتنځای څخه و موخه ځای ته الوزي او د الوتنې لار له سیده کرېښتو څخه جوړه ده، نو د شتوتګارت S څخه د کوپنهاګن ته د یوې الوتنې د جګیدني الوتنلار ده

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 8]$$

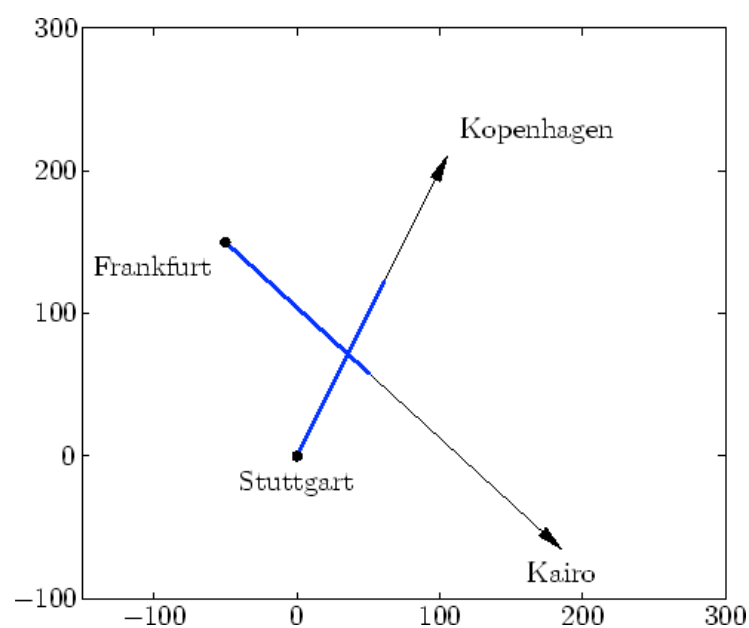
او د یوې الوتنې لپاره له فرنکفورت F څخه و قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3].$$

که د کواوردینات پیل شتوتگارت و ټاکل شي، نو کواوردیناتونه $F = (-50, 150, -1/4)$ لرو، په کیلو متر کچ شوي.

دواړه د الوتنلارې لاندې واټن لري:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33. \end{aligned}$$

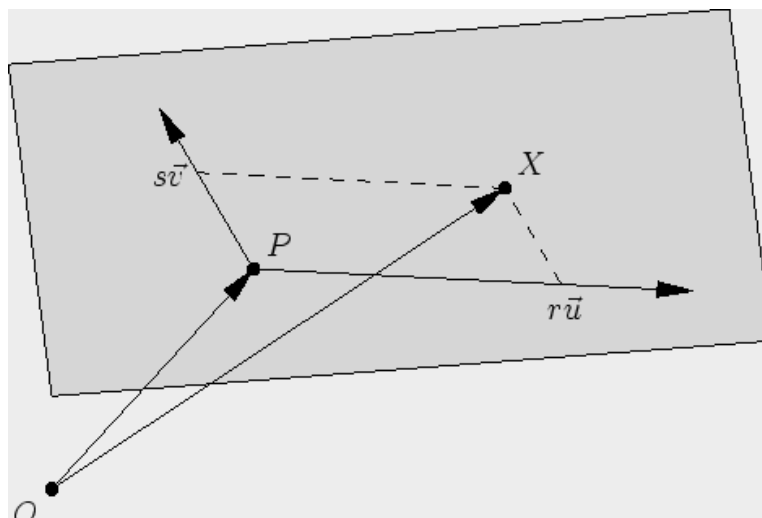


(لیکونکی: هولیگ، هیورنر)

د یوې سطحې پارامتریکې انځورونه Parameterdarstellung einer Ebene

له ټکي P تېره ، چې له دوه نه غبرگو لورو $\vec{u}$ او $\vec{v}$ غزېدلي سطحه باندې ټکی X پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$



په ورته توگه د ځای وکتور $\vec{x}$ د کواوډیناتو لپاره باور لري

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

(لیکونکي: هولیک، وایس)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

یوه سطحه دې د ټکي $P = (1, 2, 3)$ او وکتورونو

سره روکړ شوې وي. نو $X = (1, 1, 2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

له بلې خوا $X = (0, 0, 0)$ په سطحه پروت نه دی، ځکه چې

دی او د مساوات سیستم

$$s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

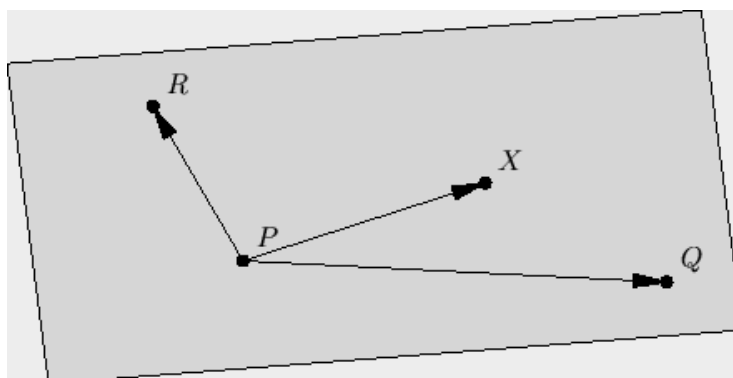
حل نه لري، که لومړی او دویمي لیکي ته وگورو .

د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه Drei-Punkte-Form einer Ebene

د ټکي X لپاره چې په یوه سطحه پروت دی، کومه چې له ټکو P, Q, R تېرېږي او یو اصلي درې‌څوکۍ جوړوي د غبرځوايزو ضرب ورکيږي .

$$[\vec{PX}, \vec{PQ}, \vec{PR}] = 0.$$

$$[\vec{PX}, \vec{PQ}, \vec{PR}] = 0.$$



(لیکونکي: هولیک، وایس)

یوه سطحه دې د ټکو $P = (1, 2, 3)$, $Q = (3, 2, 3)$ او $R = (2, 3, 4)$ له لارې ورکړ شوې وي.

نو $X = (1, 1, 2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

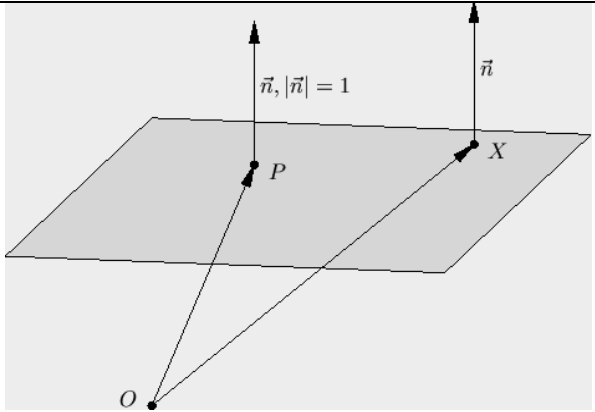
$$[\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

له بلي خوا $X = (0, 0, 0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې باور لري

$$[\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

(لیکونکي: هولیگ، وایس)

د یوې سطحې د هیسی -نورمال بڼه Hesse-Normalform einer Ebene

په یوه سطحه د یوه ټکي X ځایوکتور $\vec{x}$ په یوه سیخه په P کې اورتوگونال و یوه نورمالوکتور ته پوره کوي $\vec{x} \cdot \vec{n} = d, \quad d = \vec{p} \cdot \vec{n}.$ په نورمال بڼه نیول کیږي چې $\vec{n} = 1$ او $d \geq 0$. په دې حالت کې d د سطحې واټن دی و سرچینې ته	 (لیکونکي: هولیگ، وایس)
--	---

یوه سطحه E دې د ټکي $P = (1, 2, 3)$ له لارې ورکړشوي وي او نورمي نورمال وکتور

$$\vec{n} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دی

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3,$$

دا په دي معناچي سطحه لاندې نورمال بڼه لري

$$E : \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3.$$

نو $X = (4, 0, 1)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8 + 0 + 1) = d.$$

له بلې خوا $X = (0, 0, 0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې پاور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d.$$

(لیکونکي: هولیک، وایس)

د سطحو انځورونو ترمنځ د شمیرنې بدلون یا اړول

لومړی: یوه سطحه دې د ټکي P له لارې ورکړ شوې وي همداسې دوه نه غبرگ وکتورونه $\vec{u}, \vec{v}$.

سړی نور دوه ټکي Q او R لاس ته راوړي، چې دا هم په سطحه پراته دي او له P سره، د $\vec{q} = \vec{p} + \vec{u}$, $\vec{r} = \vec{p} + \vec{v}$.

له لارې کرښه نه جوړوي

د نورمالو وکتور $\vec{n}$ په $\vec{u}$ او $\vec{v}$ نېغ ولاړ دی یا نېغ عموددی، یعنې $\vec{u} \times \vec{v}$ ته غبرگ دی.

له دې دا نورمي نورمالو وکتور د هېسې-نورمال بڼې لپاره دی

$$\vec{n} = \sigma \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

د له کوم سره چې مخنښه $\sigma \in \{-1, 1\}$ داسې باید وټاکل شي، چې $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ مثبت (زاتیز) وي.

دویم: یوه سطحه دې د درې ټکو Q, P, R له لارې ورکړ شوې وي، چې یو اصلي درېګودی (مثلث) جوړوي.

دوه وکتورونه لاس ته راځي، چې سطحه غزوي یا جوړوي د لاندې وکتورونو له لارې

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR}.$$

له دې وکتورو څخه لکه په لومړي کې کېدی شي د هېسې-نورمال بڼه لاس ته راوړل شي.

دریم: یوه سطحه دې د یوه ټکي او یوه نورمالو وکتور $\vec{n}$ له لارې ورکړ شوې وي.

دوه وکتورونه لاس ته راځي. چې يوه سطحه داسې و غزول شي پخ کږمه کې چې دوه کرښيز خپلواک وکتورونه چې $\vec{n}$ باندې عمود يا و لار وي، و پلټل شي.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u},$$

چېرته چې $\vec{x}$ يو په خوښه وکتور $\vec{n} \neq \lambda \vec{n}$ دی.

له دې وکتورونو څخه کېدې شي، لکه په لومړي کې دې-ټکي-بڼه لاس ته راوړای شي.
(ليکونکي: هولېگ، وایس)

لاندې ټکي دې ورکړ شوي وي

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

له دې څخه شمېرو

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د هېسي-نورمال بڼې لپاره د نورمال وکتور لپاره اوس دالاندې شمېرو

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24 + 20 \\ -16 + 18 \\ 60 - 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

او له دې سره

$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{6}.$$

ځکه چې $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ باید مثبت (زیاتیز) وی، له لاندې لاس ته راځي

$$d = \vec{p} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -4$$

$\sigma = -1$ او له دې سره

$$\vec{n} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

نو سطحه نورمال بڼه لري

$$E : \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 4.$$

(لیکونکي: هولیک، کرایخ)

د ټکي – سطحې واټن :

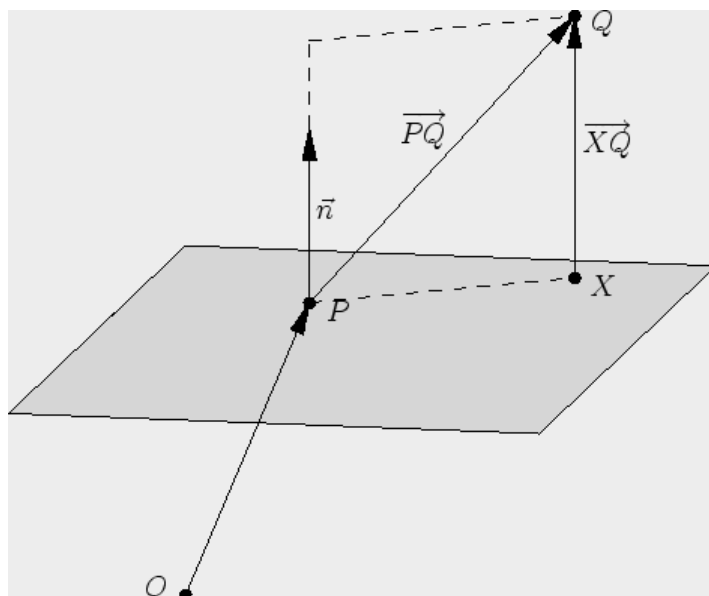
د یوه ټکي Q ولاړ برېوتلی وکتور په یوه سطحه په ټکي P د نورمال وکتور $\vec{n}$ سره دی

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}.$$

د دې اوږدوالی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

د سطحې واټن دی و ټکي Q ته.



(لیکونکي: هولیک، وایس)

سکالار ضرب

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = \cos \alpha |\overrightarrow{PQ}| |\vec{n}| = \pm d |\vec{n}|$$

خڅه دا $|\vec{n}|$ -واره د ټکي Q او سطحې ترمنځ واټن لاس ته راځي، د کوم سره چې

$$\vec{PQ}$$

مخنځبنه دا راپه گوته کوي، چې ايا په همغه خوا بڼايي، لکه يې چې $\vec{n}$ بڼايي.

له دې سره دی

$$d = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

او

$$\vec{XQ} = \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}.$$

ليکونکي: هيوليگ، وایس

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

له ټکي $P = (1, 2, 3)$ تېيره سطحه د نورمالوکتور سره دې د

$Q = (3, 2, 3)$ ټکي واټن d همداسې په سطحه پرې ولارټکی X وټاکل شي.

لومړی دی

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{PQ} \cdot \vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3.$$

له دې سره لاس ته راځي

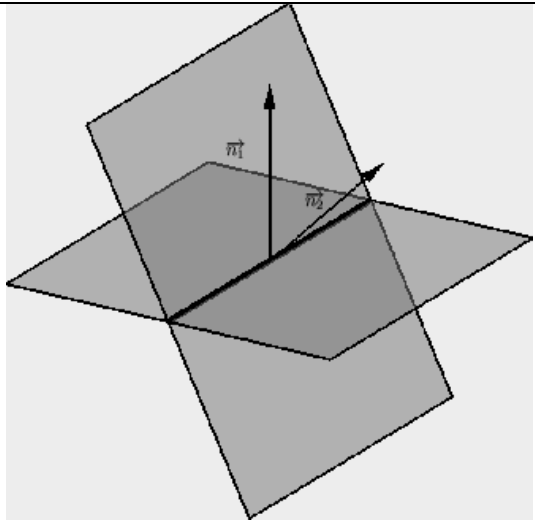
$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

او بالاخره شميرل کيږي

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 19 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

(ليکونکي: هولېگ، وایس)

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع:

د دوه سطحو د نورمال وکتور $\vec{n}_i$ سره د دواړو کونجونو (زاویو) $\varphi \in [0, \pi/2]$ هغه کوچنې کونج یې د $\cos \varphi = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \vec{n}_2 }$ له لارې یواځنی ټاکلې او $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ د غوڅکړنې لور ده.	
---	---

(ليکونکي: هولېگ، وایس)

د دوه هوارو لپاره، چې هره یوه یې له ټکو $P_2 = (0, 1, 3)$, $P_1 = (1, 2, 0)$ او نورمالوکتورونو

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سره تعریف دي، د کونج او د دواړو سطحو د غوڅکړنې سره جوړ کونج (زاویه) φ دې وټاکل شي.

دی

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

او له دې سره

$$\varphi = \pi/3.$$

پسې هم

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

د غوڅکړنې لور ده.

د دې لپاره چې یو غوڅتکی (نقطه تقاطع) وشمیرو، و

$$d_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = -1, \quad d_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_2 = 2$$

ته اړتيا شته او يو ټکی S ته، چې مساوات

$$\vec{s} \cdot \vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{s} \cdot \vec{n}_2 = d_2$$

پوره کوي. د بېلګې په توګه $S = (2, 3, 5)$ پيدا کيږي او له دې سره غوڅکړبڼه لاس ته راوړو:

$$g : \vec{x} = \vec{s} + t\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ليکونکي: هوليګ، وایس)

د منظم تترايد (څلور سطحيز) د کونج ټکو

$$P_1 = (1, 0, 0), \quad P_2 = (-1, 0, 0),$$

$$P_3 = (0, 1, \sqrt{2}), \quad P_4 = (0, -1, \sqrt{2})$$

د دوه سطحو ترمنځ کونج يا زاويه دې پيدا شي.

موږ د بېلګې په توګه د سطحو څخه چې له P_1, P_2, P_3 همداسې له P_1, P_2, P_4 جوړې وي يا تېريږي کار اخلو.

د نورمال وکتورونو لپاره باور لري

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

همداسي

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

له دي سره دی:

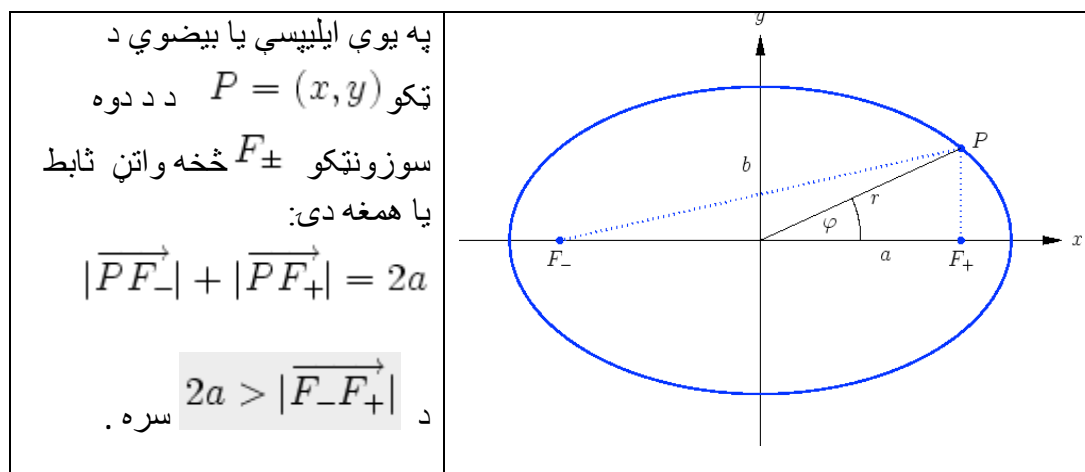
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

او لاس ته راوړو

$$\varphi \approx 70,59^\circ.$$

(ليکونکي: هولیک، وایس)

هګی (بیضوي) Ellipse



که وي $F_{\pm} = (\pm f, 0)$ ، نو د کواورديناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2,$$

او

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواورديناتونو لپاره.

د هگي پارامترې کونه ده

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

د $t \in [0, 2\pi)$ سره.

(ليکونکي: اېپ، هولیک)

د انځوره ونو ورته والی کیدی شي د سیده پسي شمیرني له لارې و ازمایل شي.

د دې لپاره چې وښايو، چې

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

مربع (څلورۍ) کوو

$$\underbrace{2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2}}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

او دې کين مساوات ته ورته مساوات لاس ته راوړو

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته نوې مربع کول يا بيا مربع کول راکوي

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2.$$

د بدلون $f^2 = a^2 - b^2$ له لارې د بڼې بدلون وروسته د کواورديناټ بڼه راکوي.

د قطبي بڼې پيدا کونې

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

لپاره د مخرج(ماتلاندي) سره ضربولو سره او په پام کې نيسو

$$x^2 = (x^2 + y^2) \cos^2(\varphi).$$

له دې سره لاس ته راځي

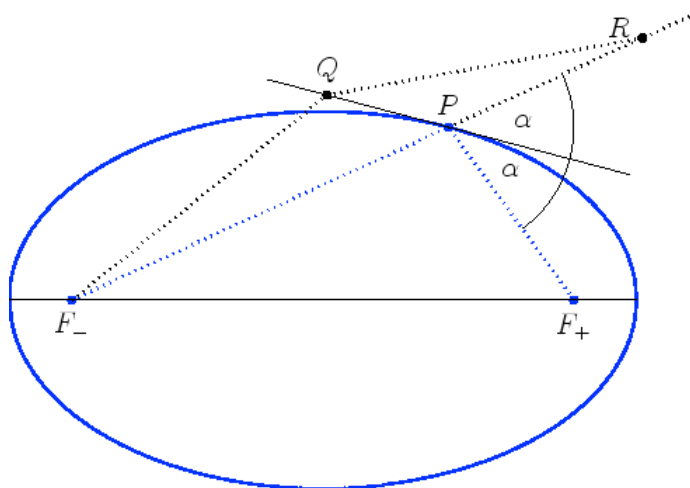
$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 = b^2$$

او د b^2 سره وېش له لارې د کواورديناټ بڼه.

(ليکونکي: اېپ، هولیک)

د سوزونتيكي وړانگه (شعاع نقطه محراق):

د سوزونتيكو وړانگي (په سوزونتيكو كي راگرځي) (رفلكت كونه يا بيرته راگرځيدنه)



د ښوونې لپاره د مرستندوی ټکي په حیث په تانجنت g د سوزونتيكي F_+ همداره شوې څیره R ټاکو او په g یو په خوښه ټکي $Q \neq P$ ټاکو. دا چې Q دهگۍ یا بیضوي دباندې پروت دی، نو دی

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}|.$$

که د ټوټه کرښو $\overrightarrow{PF_+}$ او $\overrightarrow{QF_+}$ په ځای یې همداره شوې څیرې کېږدو، نو لاس ته راځي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}|,$$

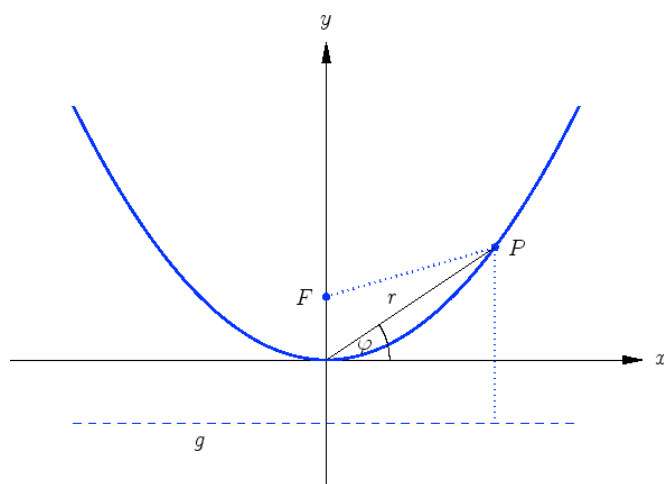
او پسې یا تعقیب باید F_-, P, R په یوه کرښه پراته وي. له دې سره $\angle(F_-PQ) = \alpha$ دی.

دا هندارون خويونه د پختورگو تيگو توتنه کوني لپاره په کار راځي. په سوزونتيکي F_- کې د يوې راديال (د وړانگې په لور) سرچينې څخه وړانگې کېدې شي د يوه هگۍ ډوله يا بيضوي ډوله رفلکتور له لارې په سوزونتيکي F_+ کې کوده شي يعنې سره غوڅ کړي..

(ليکونکي: اېپ، هولېگ)

پارابول Parabel

په يوه پارابول د تکی $P = (x, y)$ د سوزونتيکي F او يوې وړونکې کرښې g څخه برابر واټن لري.



که $F = (0, f)$ او $g : y = -f$ وي، نو کواورديناټونو لپاره باور لري

$$4fy = x^2$$

او

$$r = \frac{4f \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

د ټکي P قطبي کواورډيناتونو لپاره

(ليکونکي: اپپ، هولیک)

د انځورونې ورته والی یې ترلی څرگند دی. د مربع شوي واټن د برابر ایښوونې له لارې

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y - f)^2 = (y + f)^2 = (\text{dist}(P, g))^2$$

د کواورډينات بڼه لاس ته راځي. د

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

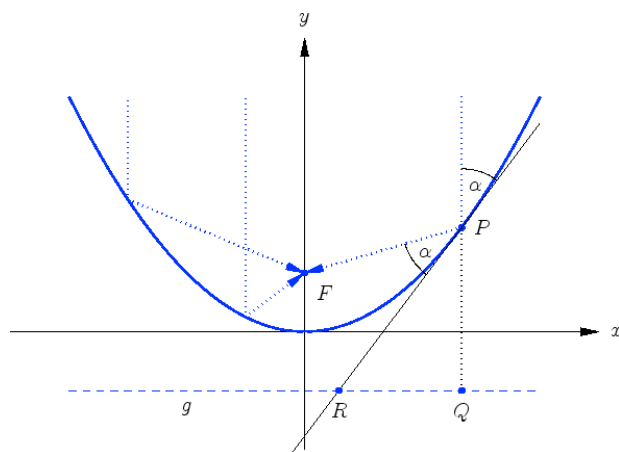
بدلون مو قطبي بڼې ته بیايي.

(ليکونکي: اپپ، هولیک)

د ساتلايت تلوېزيون Satelliten-TV

غبرگې کرښې، وړونکريښو سره ولاړې يا عمود غورځېدونکې وړانگې په سوزونټکي کې سره کوده کيږي.

داد د ساتلايت په کاسه او تېلېسکوپ کې کارول کيږي، چې پريوتي سيگنالونه قوي کړي.



د ښوونې لپاره په بام کې نيسو، چې

$$\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{QP} = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -f \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$$

په ټکي $P_t = \begin{pmatrix} 1 \\ x/(2f) \end{pmatrix}$ کې د تانجنت د لور سره غټگ دی. دا چې

$$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{QP}|,$$

له دې څخه د کونج $\sphericalangle(F, P, R)$ او $\sphericalangle(R, P, Q)$ مساوات لاس ته راځي، د کوم

سره چې R د تانجنت غوڅټکی دی د g سره.

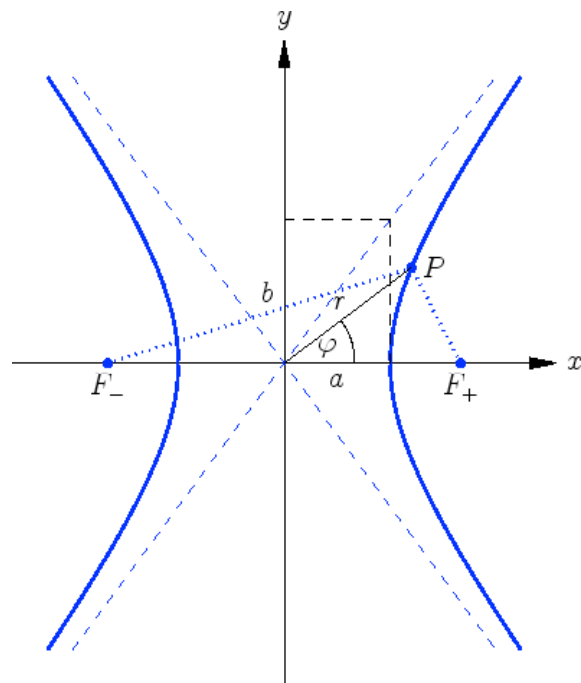
(ليکونکي: اېپ، هولیک)

های پاربول Hyperbel

په یوه های پاربول د یوه ټکي $P = (x, y)$ د سوزون ټکو $F_{\pm}$ سره د واټنونو کمښت ثابت دی:

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

د $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .



که $F_{\pm} = (\pm f, 0)$ وي، نو کواورديناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2,$$

او

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواورديناتونو لپاره . اسپیټوتي $\pm b/a$ جگوالی لري.

د هایپرابول د بڼاخونو پارامترې کونه

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t$$

ده د $t \in \mathbb{R}$ سره.

(لیکونکي: ایپ، هولیک)

د انځوره ونو ورته کېدی شي سیده یو په بل پسې وازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو ، چې لرو

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2,$$

نو

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2 + y^2}}_{>0} \pm 2a = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

مربع کوو او دې و کین مساوات ته ورته اړیکې لاس ته راځي

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = \pm 4a \sqrt{(x+f)^2 + y^2}.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته له نوې مربع کونې څخه لرو

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2.$$

د $f^2 = a^2 + b^2$ بدلون سره د بني بدلون وروسته د کواوډيناتونو بڼه لاس ته راځي.

د قطبي بڼ لاس ته راوړلو ته

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د مخرج سره ضربوو او په بام کې نيسو

$$x^2 = (x^2 + y^2) \cos^2 \varphi.$$

له دې سره لاس ته راځي

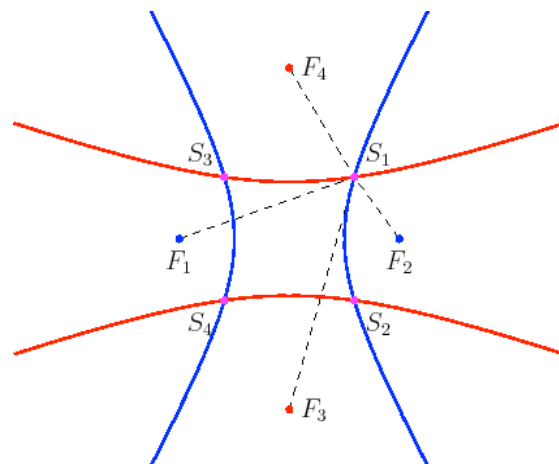
$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 = -b^2$$

او د $-b^2$ سره ضربولو له لارې د کواوډيناتونو بڼې راکوي
(ليکونکي: اېپ، هولیک)

ناويگيشن Navigation

د يوې کيشټۍ ځای Position معلومولو P لپاره د وخت کمښتونه $2a_{j,k}$ د

سينکرون راډيو سيگنالونو د مختلفو خورونکو سټيشنونو F_i څخه سره پرتله کيږي. نو په دې توگه کيدی شي P د هايپرابول د سوزونتيکو F_k, F_j سره د غوڅتيکي په څير لاس ته راړل شي.



یوه څرگنده بیلگه کیدی شي

$$F_1 = (-2, 0), F_2 = (2, 0), F_3 = (0, -3), F_4 = (0, 3)$$

او $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$ و ټاکل شي. اړونده هاپرابول مساوات دي

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \quad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1,$$

او د څلر غوڅتکو S_i د کواودیناتو لپاره لاس ته راځي

$$x^2 = \frac{32}{23}, \quad y^2 = \frac{27}{23}$$

لکه د څیرې څخه چې ه م لیدل کیږی، څلور اوبیوني (حلونه) لاس ته راځي. د ناوېگیشن لپاره دا بی پرابلمونو دی، ځکه چې یو کفتان باید وپوهیږي، چې کیښتی نږدې یا ت قریباً چیرته پرځای ده، دا په دې معنا چې کوم د منلو اوبی یا حل دی.

(لیکونکي: اپپ، هولیک)

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې
شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابرېون (دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا
ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکټر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک
- ۲ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک
- ۳ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک
- ۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت
پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

- ۶ - اناليزی ۱
- ۷ - اناليزی ۲
- ۸ - کرښيز الجبر
- ۹ - د شميرپوهنې بنسټونه
- ۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرښیز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنې گډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳- د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴- د شمیرپوهنې پښتو انګریزي ډکشنري

۲۵- د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶- د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي).

۲۷- د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتګارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د بنوونځي لپاره فزیک د برینګمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library