شمیر پوهنه

(ریاضـــي)

ستر کتاب

Ketabton.com

لومړی برخه

دویم غځېدلی چاپ

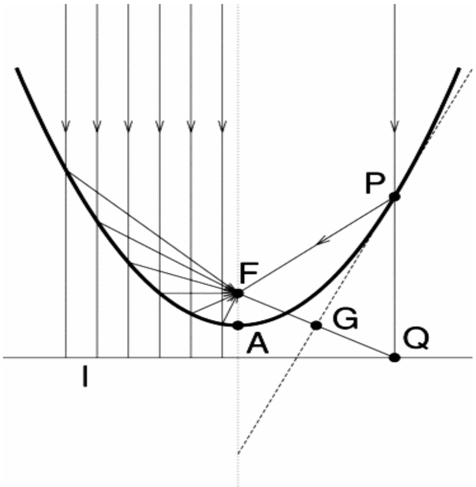
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میرې) شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(ریاضي)

سترکتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرړي شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسي لږ ونده اخستي وي.

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: د شمیرپوهنه ستر کتاب(لومړی برخ)

لیکونکی: ډاکتر ماخان،، میری،، شینواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپریدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولته

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندویي ټولنې تخنیکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې لیکونکي یا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیوادوالو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودریږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کڅه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندي ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زمونږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زمونږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوي سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

۱ . ۰	د شمیرپوهنې سم اند یا منطق	۱
۱ . ۰ ۱	پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه	۱
۱ . ۰ ۲	د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې	۳
۱ . ۰ ۳ . ۰ ۱	ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه	۳
۱ . ۰ ۲ . ۰ ۲	وینا	۵
۱ . ۰ ۲ . ۰ ۳	د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ	۷
۱ . ۰ ٤	وینا فورم یا ۰بڼه او کوانتورونه	۱۳
۱ . ۰ ۵	اړیین او پوره کیدونکي شرطونه	۲۸
۱ . ۰ ٦	د شمیرکلیمه یا د لغاتو	۳۱
۱ . ۰ ۷	برابرون او نابرابرون	۳۳
۱ . ۸	تمرینونه	۳۸
۲ . ۰	ډیر ۍ پوهنه	۳۹
۲ . ۰ ۱	د ډیرۍ پوهنې کلیمه	۴۰
۲ . ۲	د ډیریو ترمنځ اړیکې	۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

	برخدېرۍ	۴۶
	د یوې ډېرۍ توان یا توانډېرۍ (توانسټ)	۴۸
۲ ۰ ۳	په ډیرۍ کې کارونې یا عملیې(۱)	۵۰
	غوځدېرۍ یا متقاطعډېرۍ	۵۲
	د یوې ډېرۍ یا سټ کمپلیمنت	۵۷
۲ ۰ ٤	ځیرونه	۵۸
	تمرینونه	۶۷
۳ ۰	د ریيل ګڼونو سره د شمیرلو بنسټیزې...	۷۰
۳ ۰ ۱	د ګڼونو- یا اعدادو سیستم جوړښت	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱	پیداینښتي یا طبیعي ګڼونه	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ الف	د پیداینښت یا طبیعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ب	د پیداینښت ګڼونو انځورونه او شمیرنه	۷۲
۳ ۰ ۱ ۰ پ	د شمیرنې بنسټیز قوان ین	۷۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	الف د ویش تیوري	۸۶
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب	غټ ګډ پرویشونی(بزګترین مقسوم علیه ...)	۸۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ ۰ ۱ ۰ ٤	ریيلګڼونه	۱۰۸
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشمیرنه	۱۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳	تمرینونه	۱۳۰
٤ .	پوتنڅ یا توان ، ریښه یا جذر	۱۴۱
٤ . ۱	توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت	۱۴۱
٤ . ۲	ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره	۱۴۴
٤ . ۳	توان د رییلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره	۱۵۱
٤ . ٤	ټولګه	۱۵۲
٥ .	لوګاریتم	۱۵۸
٥ . ۱	د لوګاریتم کلیمه	۱۵۸
٥ . ۳	ټولګه	۱۶۶
٦ .	ګونومتري	۱۶۹
٦ . ۱	بنسټیزه څمککچپوهنه یا هندسه	۱۶۹
٦ . ۱ . ۱	ټکی او کرښه	۱۶۹
٦ . ۱ . ۲	کونج	۱۷۱
٦ . ۱ . ۳	درېګوډئ	۱۷۴
٤ . ۱ . ٤	کونکروانیڅ او ورته والی	۱۷۸
٦ . ۱ . ٥	ولاړکونجیز دریګوډئ	۱۸۴
٦ . ۲	په ولاړکونجیز دریګوډئ کې د ...	۱۸۸
٦ . ۳	په یوونګردئ کې د کونج بلواک ..	۱۹۰
٦ . ٤	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ٥	تریګنومتریکي کتمتوالی	۲۰۵
۶ . ۵	تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
۷ ٠	کمپلکس ګڼونه	۲۲۲
۸ ٠	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۲۳۵
۸ ٠ ۱	سیده ښوونه	۲۳۵
۸ . ۲	ناسیده ښوونه	۲۳۷
۸ ٠ ۳	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
۹	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
۹ ٠ ۱	لاینیز برابرون	۲۴۴
۱۰	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
۱۰ ٠ ۱	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
۱۰ ٠ ۲	د بینوم ځله ونه	۲۶۷
۱۰ ٠ ۳	د بینوم جمله	۲۷۰
۱۰ ٠ ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
۱۰ ٠ ٤ ٠ ۱	پرموتیشن	۲۷۵
۱۰ ٠ ٤ ٠ ۲	واریيشن	۲۸۰
۱۰ ٠ ٤ ٠ ۳	کمبینیشن	۲۸۶
۱۰ ٠ ٤ ٠ ٤	د پرموتیشن، واریيشن او	۲۹۱
۱۱ ٠	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰ ۱	لانيز برابرون له دوه اوړيدونو يا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دويمه درجه ديترمينانت او د كرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوريتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زيات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاينيز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	يو برابرون له درې ناپيژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دريمه درجه ديترمينانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲. ۴	د ګاوس لګوريتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې ديترمينانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوريتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاينيز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلوری ئيز يا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۰ ۲۰ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وييتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلوری برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ ۰ ۳	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
۱۲ ۰ ٤	د ریښې برابرونونه	
۱۳	ترانسڅیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۱	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۲	اکسپوننشل- یا په جګګې برابرونونه	۳۸۰
۱۳ ۰ ۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱٤ ۰ ۱	نابرابرونونه	۳۹۶
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۱	بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین	
۱٤ ۰ ۱ الف	اینتروال	۳۹۷
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۲	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۳	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
۱٤ ۰ ۱ ۰ ٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
۱٤ ۰ ۲	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۱	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۲	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۳	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰
۱۵ ۰ ۱	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

١٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶

۱ ۰ ١٦ کرښه ۴۶۶

۲ ۰ ١٦ ګردۍ ۴۷۵

۳ ۰ ١٦ ایلیپسې ۴۸۲

٤ ۰ ١٦ هیوپربول ۴۸۷

۵ ۰ ١٦ پارابول ۴۹۲

٦ ۰ ١٦ ټولګه ۴۹۴

١٧ وکتور شمیرنه ۵۰۲

۱ ۰ ١٧ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲

په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲

۲ ۰ ١٧ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹

۳ ۰ ١٧ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲

٤ ۰ ١٧ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷

۵ ۰ ١٧ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....

۱ ۰ ۵ ۰ ١٧ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱

۲ ۰ ۵ ۰ ١٧ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴

۵ ۰ ١٧ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸	پرلپسې او پرلپسې لړۍ	۵۳۳
۱۸ ۰ ۱	پیل	۵۳۳
۱۸ ۰ ۲	د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه	۵۳۴
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱	مونوتوني پرلپسې	۵۴۲
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲	اریتمیتیکي پرلپسې	۵۴۵
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳	هندسي پرلپسې	۵۴۷
۱۸ ۰ ۲الف	لړۍ	۵۵۰
۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱	هندسي لړۍ	۵۵۵
۱۸ ۰ ۲ الف ۲	اریتمیتیکي لړۍ	۵۵۷
۱۸ ۰ ٤	د پرلپسې او لړیو د پولې ...	۵۵۸
۱۹	د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه	۵۷۸
۱۹ ۰ ۱	بنسټیزې کلیمې	
	د پولو یا حدونو خویونه	۵۸۶
	د راشنل، کسري یا نسبتي	۵۹۲
	د مشلثاتي یا درېکوڼي کچ توابعو پولې	۵۹۶
	ناپرېکیدنې	۶۰۴
۱۹ ۰ ۲	په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې	
۱۹ ۰ ۳	د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه	۶۱۰
۱۹ ۰ ٤	د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځپرکي ټولګه ۶۱۶

۲۰ دفرنځیالشمیرنه ۶۲۶

د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت) ۶۲۶

په یوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸

د لحضوی(سترګورپ) تغیر... ۶۳۰

کمښتوېش (تقسیم تفاضل؟) ۶۳۱

دفرنشلوېش یا رابیلیدنه یا مشتق ۶۳۳

کمښتوېش او مشتق یا رابیلیدنه ۶۳۶

د x_o په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳

د تانجنت پیژند او خویونه ۶۴۷

د تانجنت او عمود یا ولاړ تولیز مساوات ۶۵۰

په بیدیا کې جګوالی ۶۵۲

۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت یا جګیدنې غوره والی

۲۰ ۰ ۲ د فرنځیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې ۶۵۶

د درېګوډیزو یا مثلثاتي ۶۶۲

د اکسپوننشل یا په جګ توابعو.... ۶۷۰

د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې ۶۷۶

د ایمپلیځیت توابعو مشتف ۶۸۳

د بنسټیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه ۶۸۸

د یوې تابع د مشتق قابلیت ۶۹۱

د معکوس- - یا په څټ توابعو مشتق ۶۹۸

۲۰ .۳ د بنسټیزو بلواکو رابیلېدنه ۷۰۱

د رول قضیه ۷۱۰

د وایرشتراس قضیه ۷۱۱

۲۰.٤۰ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی

د دفرنشل منځ ارزښت قضیه ۷۱۲

یوعړیزې توابع ۷۱۵

ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰

د انعطاف – یا اوړونټکی ۷۲۴

د کوږ یا منحني بحث یا خبرې ۷۳۳

ناټاکلي حدونه یا پولې ۷۴۶

د برنولي او د لو پیتال ۷۵۰

۲۰ ۰ ۵ د غټو ګټو پرابلم ۷۵۷

تمرینونه ۷۶۷

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸

۲۱ انتیګرالشمیرنه ۷۸۷

پیلراوړنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنستیزه یا لومړنی تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنی تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال ځخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالوني قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالوني لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲
	د انتیګرالشمیرنې استعمال	۸۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مهربان او بخښونکی خدای(ج) په نامه

سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چي پیل لري نو پاي هم باید ولري، د داسی یوه کار پیل او پای ته څما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چی مېښت یی زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چی په یوه کار پیل وکړي، څکه چی سملاسی ورته څرګندیږي، چی په هیڅ شي کی څمونږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوي په جوړښتیزه لور، په ورانی کی مو د نړی سرکښي ځانته ګټلی.
مونږ ګورو چی په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چی تراوسه حتی هغه بنستیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چی مسلك ته اسانتیاوي پیښبوي. له کومه ځاي چی ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دي هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او سنتونځي یي نه دي ګاللي، چی دلته طبعاً افراد ملامت نه دي، بلکه څمونږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنی او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودي دنده د حکومتونو ده، چی څمونږ په هیواد کی څمونږ حکومتونو خپل ځانونه د دي کار جوګه نه دي ګڼلي، کیدی شي چی ووایو چي په ریښتیني یي ددي کار مخه هم نیولی ده، چی په افغاني ژزبه دي څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار څکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چی زه په مسلکي اړخ کی یواځي، په علمي توګه په الماني ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

نومونه چې له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچې په ښوونځي کي ځما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمي په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومی او یا کومي چي ماته معلومی دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکی ښکاریدلی .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتی څانګی لري. دا چې ځما په فکر دا متآسفانه نه یواځي زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبی په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چې په دې بنسټیزه توګه په درسي او تمریني ډول سرته رسیږي.

نن نړی او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چې پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستوځوبیو (د ستونځو حل باندې) پیل نه دی کړی ، که دا په هره څانګه کی هم وي. ځموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چې په ټولو پوهنو کی تغبنتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کی د پوهیدلو بنسټیزه ریښه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعی (پیدایینتی) یعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك. بیله شمیر پوهنی یی وده او په پوهیدنه ناشونی ده. شمیرپوهنه له بلی خوا یواځني خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کی ونیوه او لیکل یی د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متاَسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسی یوه کتاب لیکنی مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسی لیکنی څخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چی څمور د هیواد ستنځي نورې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چی خپلی د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم
- د لیکونکی راهڅونی دلیلونه یا د شوق رابیداروِل
- دداسی کتاب لیکنه په هغه وخت کی شوني کیږي، چی د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یي هم نه لرم چي پیسی وګتم.

- وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چی له دې د مخه می په سیاسی هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس می خپل مسلك ته رامخه شوه.

- ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلی ټولنی او د خپلی ټولنی د خلکو سره مینه ولری او په همدې ډول، د خپلی ټولنی او د ټولنی د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چی یواځی د خوبونو ریښتیا کولو لپاره په داسی کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځی په پوره مینه په غاړ واخستلی او دا کار می په پوره مینه سر ته ورساوه.
-په دې برسیره لیکونکی دې وظیفی ته هم باید شعوري وي، چی دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسی لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کور کې هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنې یو غړوالی باید په کورنۍ کې وي، که داسې هم نه وي ، خو د داسې کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیو (ستونځو حل) په خاطر، چې موږ افغانان یې په ځانګړې توګه اقتصادي اړخ کې پوره لرو، چې نه یواځې د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کې ددې امله نه کوته چې امکانات یې ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځې:

د داسې کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چې زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

۱ – دا کتاب په داسې ژبه لیکل کیږي چې له مرې څخه نیول شوې، ژیندۍ شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځې په غرو او رغو کې ژوندۍ پاتې شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چې دا کرښې دا مطلب نه لري، چې ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلې ژبې په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چې خپلې ژبې، د خپل ولس ژبې ته ، چې کړېدلې او وروسته پاتې ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پرېښوولې چې ولس یعنې د یوه هیواد د ژبې دپرېښوولو حق څوک نه لري، نه دولت او نه افراد . دا کار متاسفانه د افغاني ژبې په ضد او بیا د ټولو په سر کې پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوک باید ګیله من نه وي.

افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چې یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشي یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژبه یواځې د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کې پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لاربښودې او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهې د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبې پرمخوده یو بل باندې سیده او په ځپ اغیز من دي، چې ولس وروسته پاتې وي، ژبه یې وروسته پاتې ده او که یوه ژبه وروسته پاتې وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد ځان کې نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چې کم له کمه بنسټیزې کلیمې په افغاني واړوم، چې دا کار مې په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله مې زیات فکر هم په کار اچولی چې مسلکي بنسټیزې کلیمي په روانه افغاني راواړل شي. هغه نومونه چې ټاکل شوي، داسې نومونه دي، چې د هغه شي ماهیت په کې روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چې په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.

په پوهنه کې له بلې ژبې تیریدنه ناشونې ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چې افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځې هلته کیږي، چې یوه ژبه له پوهنې وروسته پاتې وي.

د پوهنیزې ودې سره ژبې ته د نورو ژبو لغات راننوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چې که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهانی مروجه لغاتو ولیکم.

دا چې افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم زیندی شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبې ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبې د زیندی څخه خلاسون یا د افغاني ژبې څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغې باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوک د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسې یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.
دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولي، چې هغه مې په ټول کتاب کې شاید اصلاح کړې نه وي، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځې نه پیښیږي لکه د بیلګې په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلې وه، چې وروسته مې شمیر پوهنې بانده واړوله. شاید په ټولو ځایونو کې مې نه وي شمیرپوهنه کړې. دربڅوډې ما لمړی دریکونجې لیکلې وو، چې دا هم شاید د کتاب په اوږدوکې نه وي اصلاح شوي، داسې نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چې د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځې ه پیښنوي.

۲ – تخنیکي ستونځې:
د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځې، چې څمړ لپاره د داسې کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکي ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودي، نو له دې امله مې د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته مې سریښ کړې، چې کله کږې هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چې دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکې او چاپوونکې به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښې څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطۍ به شوي وي،، خو په پوهیدلو کې به ستونځې پیښې نه کړي، د هغې بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.
ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

حرکت کې برکت اېښوولی دی.
لنډه دا، چې ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چې زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیټو سمولو لپاره مې نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کې د ملګرو په فشار ما ، خما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چې دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیدایښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
څنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنسټیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځاي کړم.
ما د بنسټیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله مې برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي څیړل شوی.
خما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اومه اتمه او نهمه برخه څمونږ په هیواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیري پوهی سره اشناییینه هم خورا ضرور ده

شپږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کي د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومی خوبنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوبنتنه، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.

ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراګټوره مشوره هم راکړې.
زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاتړ کاوه، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یی کله کله ویل، چی ګوندې پیسی می باید ګټلی وی ، خو په دې پوهیږي، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنګه شوه نو ویل به یې چی نور دا د چرګانو ټونګي باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن بناپیری څخه هم د زړه له کومی خوبنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی بنه تکړه ورته د لوي خداي(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

المان د پنځم ټولګی ځخه هندسه په کی راغلی د ځه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی ترلی چاپ ته ورکړي شي.
زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.
که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په ځانګه کی ځه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهځوم. د هغو دوستانو سره چي د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. ځما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما ځخه لټ بل څوک نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

افغاني ، یوناني او الماني الف بی

ا	ب	پ	ت	ټ	ث	ج	چ
څ	ځ	څ	ح	خ	د	ډ	ذ
ر	ړ	ز	ژ	ږ	ص	ض	ط
ظ	ع	غ	ف	ك	ګ	ق	ل
م	ن	و	ه	ي	ى	ې	ئ ۍ

یوناني الف بی

Α α	$A\ \alpha$	Alpha
Β β	$B\ \beta$	Beta
Γ γ	$\Gamma\ \gamma$	Gamma
Δ δ	$\Delta\ \delta$	Delta
Ε ε	$E\ \varepsilon$	Epsilon
Ζ ζ	$Z\ \zeta$	Zeta
Η η	$H\ \eta$	Eta
Θ ϑ	$\Theta\ \vartheta$	Theta
Ι ι	$I\ \iota$	Iota
Κ κ	$K\ \varkappa$	Kappa
Λ λ	$\Lambda\ \lambda$	Lambda
Μ μ	$M\ \mu$	My
Ν ν	$N\ \nu$	Ny
Ξ ξ	$\Xi\ \xi$	Xi
Ο ο	$O\ o$	Omikron
Π π	$\Pi\ \pi$	Pi
Ρ ρ	$P\ \varrho$	Rho
Σ σ	$\Sigma\ \sigma$	Sigma
Τ τ	$T\ \tau$	Tau
Υ υ	$Y\ \upsilon$	Ypsilon
Φ φ	$\Phi\ \varphi$	Phi
Χ χ	$X\ \chi$	Chi
Ψ ψ	$\Psi\ \psi$	Psi
ω ω	$\Omega\ \omega$	Omega

الماني الف بي

A a	𝒜 𝒶	𝔄 𝔞
B b	ℬ 𝒷	𝔅 𝔟
C c	𝒞 𝒸	ℭ 𝔠
D d	𝒟 𝒹	𝔇 𝔡
E e	ℰ ℯ	𝔈 𝔢
F f	ℱ 𝒻	𝔉 𝔣
G g	𝒢 ℊ	𝔊 𝔤
H h	ℋ 𝒽	ℌ 𝔥
I i	ℐ 𝒾	ℑ 𝔦
J j	𝒥 𝒿	𝔍 𝔧
K k	𝒦 𝓀	𝔎 𝔨
L l	ℒ 𝓁	𝔏 𝔩
M m	ℳ 𝓂	𝔐 𝔪
N n	𝒩 𝓃	𝔑 𝔫
O o	𝒪 ℴ	𝔒 𝔬
P p	𝒫 𝓅	𝔓 𝔭
Q q	𝒬 𝓆	𝔔 𝔮
R r	ℛ 𝓇	ℜ 𝔯
S s	𝒮 𝓈	𝔖 𝔰
T t	𝒯 𝓉	𝔗 𝔱
U u	𝒰 𝓊	𝔘 𝔲
V v	𝒱 𝓋	𝔙 𝔳
W w	𝒲 𝓌	𝔚 𝔴
X x	𝒳 𝓍	𝔛 𝔵
Y y	𝒴 𝓎	𝔜 𝔶
Z z	𝒵 𝓏	ℨ 𝔷

اومیګا په پښتو دینه ↑ په الماني دینه ↑

شمیرپوهنیزې نخښې

مساوي	$=$
نامساوي (نوروکتابونو کې)	$\neq$ ($=$)
کوچنی له	$<$
لوي له..........	$>$
کوچنی یا مساوي له	$\leq$
لوي یا مساوي له	$\geq$
ډیر کوچني	$\ll$
ډیر لوي	$\gg$
ورته یا متناسب...........	$\sim$
کونګروائنځ	$\cong$
همداسی یا ښایي یا په ګوره کوي	
کتیمټ..................	$\equiv$
غبرګ	$\parallel$
ناغبرګ................	$\nparallel$
ولاړ په	$\perp$
دریګوډی	$\triangle$
ګردی	$\bigcirc$
نیمی یا قطر............	$\oslash$
کونج	$\angle$
د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج	$\angle(g,h)$
کرښه، له A و B ته	$\overline{AB}$
له A و B ته لوریزه کرښه.....	$\overrightarrow{AB}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیندہ.................... AB

مطلقه ارزښت د .... |a|

ایماجینار یوون (واحد)....... i

د اویلرګڼ = ...2,7182818 e

پي د لودولف ګڼ π = ...3, 14149

د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي ->

ناپای.................... œ

د x فنکشن یا په واك چی بلواك مو بللی f(x)

(لوستل يي (f د x یا د f, x لنډ : fx)

د x څیرونه په f(x) : لیکو: x → f(x) f : x →

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن h(x); g(x)

لیمس یا پوله............... lim

	ساین	sin
تریګونومتریکي	کوساین	cos
بلواك	تانجنت	tan
	کوتنجنت...........	cot
	ارکوس ساین..........	arc sin
څیکلومتریکي	ارکوس کوساین	arc cos
بلواك	ارکوس تانجنت	arc tan
	ارکوس کوتانجنت.....	arc cot

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیدایښتي لوګاریتم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس گڼونه........... $\mathbb{C}$

رییلگڼونه .... $\mathbb{R}$

ټولگڼونه .... $\mathbb{Z}$

نامنفي ټولگڼونه یا

طبعي گڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي گڼونه .... $\mathbb{N}$

تعریفډېرى .... D

ارزښتډېرى........... W

حلډېرى L

د ډېري A پوتنځډېرى P(A)

ډېري............. M,N,A,B

تشډېرى .... $\emptyset$

برخه ډېرى............

پورته یا لویډېرى(چې بل ډېرى خوندي لري)

ټولنډېرى............ $\cup$

غوځډېرى .... $\cap$

د A کومپلیمنت ..... CA , A'

د ډېریو ورته والى ...... A~B

د ډېریو ځل........... $A \times B$

لوستل A اتیران B یا - ځل -

توپیرډېرى : A بي له B ده A\ B

دلته: a د b پرویشونې ده یا a b ویشي a | b

د a او b غټ گډ په ویشونى (لنډ : غ گ و) ggt(a,b)

د a او b کوچني گډ زیاتځله (لنډ : ك گ ځ) kgv(a,b)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته : a د M توکی دی .... $a \in M$

او a د M توکی نه دی .... $a \notin M$

ټولنخښه (د ټولو x لپاره باور لري) $\forall$

د موجودیت نخښه: یو x موجود دی $\exists$

کونیونکشن A او B لیکو $A \wedge B$

دیسینکشن A یا B لیکو $A \vee B$

(کله کله الترناتیو)

ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي $A \Rightarrow B$

نیګیشن یا نه والی $\neg$

د A او B ویناو ورته والی یا اکویوالنت $A \Leftrightarrow B$

له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.

ماتریکس......... A نورو کتابونو کي $\|A\|$

دیترمینانت $|A|$

د a څخه n–امه ریښه $\sqrt[n]{a}$

د x اکسپونتشلبلواك

د n – فاکولتیت یعنی $n!=1.2.3....n$ $n!$

بینومخلوونې $\binom{n}{p}$

لوستل: n په p باندې

له a تر b واز اینتروال $]a,b[$

$= \{ x \mid a < x < b \}$

له a تر b بند اینتروال $[a,b]$

$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

کیڼ واز اینتروال $]a,b]$

$= \{ x \mid a < x \leq b \}$

ښی واز اینتروال $[a,b[$

$= \{ x \mid a \leq x < b \}$

د زیاتون نخښه (سیګما) $\sum_{i=1}^{n}$

که د زیاتوننخښه داسی وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

ځلنخښه (پي) $\prod_{i=1}^{n}$

که داسی لیکل شوي وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

پرموتیشن یا بدلون

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چي اند(فکر) یا وی(لغات) ته وایی).

د وینا د تیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس(۳۸٤ تر ۳۲۲ ز۰ ک۰ ا)) له خوا کینبول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دئ او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله خټه کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دئ نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې(متن) لرودئ شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمې به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشوني ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهنی(علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور(په کومه لور) او یا ځو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګریتې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.

په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک ایښوولو (ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنی ژبی ویناودد څخه ګټه اخلي٠

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده٠

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي٠

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ایښوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي٠

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره (متصور؟) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسي په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغهٔ صفر دی, بلل کیږي. داسي نخښوني دبنسټیزو نخښو څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندی ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ .

١ ٠ ٢ د شمير پوهنی سم اند بنسټيزې کلمې

١ ٠ ٢ ٠ ١ ثابتی، متحولې او ترومونه(١)

Constants, variables, terms

په شميرپوهنه کې شيان ، د شيانو ترمنځ اړيکې او د شيانو تړنې په نخښو(سومبولونو) انځوريږي.

١ – شميرپوهنيزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې (علامې): دا د يوه کره ټاکلې مانا لپاره نخښې دي يانې تغير نه خوري، لکه ٧ ، ١٢ ، π ، e, او داسې نور

- د اووښتونو يا واريابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د يوې ورکړ شوې ډيرۍ يا سټ (په ډيرۍ پوهنه کی روښانه کيږي) داسې په زړه پورې توکی لپاره يوه نخښه ده، کومه چی د اووښتونويا متحولو بنسټسټ يا-ډيرۍ بلل کيږي، دا په لاتين تورو په نخښه کيږي او کله کله په اندکس(ز٠ ايندکسونو) يا پيژندنخښه index (ز٠ پيژندنخښې Indices) چې ايندکس د تورو پينو ته راځي په نخښه کيږي٠

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \dots$

- اړيکنخښې : دا د شيانو اوګڼونو يا اعدادو ترمنځ د اړيکو نخښې دي لکه $<$, $>$، $=$, $\leq$, $\geq$,

- د نښلونو،کارونو، تړنو يا عمليونخښې : لکه زياتون-(جمعه)، کمون-تفريق-) ، ځل-(ضرب-)، او ويش -يا تقسيم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library

- تخنیکي نخښی : لکه سیمیکولوم („ „)، نوکان ( ) او نور ډولونه یې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واریابلی(اووښتوني), ثابتی او د هغوي یوځاي ایښودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکی نخښو یوځاي ایښوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځي٠

(١) ثابتې((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتیزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړیدونی یا واریابلې او ترمونه

بیلګه :

الف : د 3.(1 + 2a) – a + 144 یوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 11x =6 – 3a).(b – 12) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

٢ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یواځې ثابتې (همغه)، اووښتونې(متحولې، واریابلې) نښلوني او تخنیکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړیکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پورې که واریابلی ولرې پیژندډیری یا تعریفسټ هم اړه لري، دا د داسي اووښتونو یا متحولو اصلی بنستسټ یوه برخډیری او یا هغې سره برابر برخه سټ یا - ډیری ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنسټډیرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې ناروني یا عملیې اجرا شي، که چیرې اووښتوني یا واریابلې د پیژندډیری د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو(اکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتوني ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتونې یا متحولې نه لري په Tسره په نخښنه کوو او

لیکو: T=126 + 3/4 یا $T = 126 + \frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتونې یا متحولې x لري یانې T(x) = 10 + 2x ۰ د اووښتونو بنسټیدیرۍ یا ـډیرۍ دې یا د طبیعي اعدادو ډیرۍ N°وي

تعریفډیرۍ د بنسټیدیرۍ سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتونې یا واریابلی x پهٔ ځای

یو پیدایښتې ګڼ یا طبیعي عدد 2 کیږدو، نو د ترم ارزښت دۍ : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x یا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دۍ چې دوه متحولې لري او په T(x,y) سره یې په نخښنه کوو۰ د اووښتونو یا متحولو بنسټیدیرۍ دې د پیدایښتي یا طبیعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعریفډیرۍ N° ده۰ د y لپاره N (پیدایښتی ګڼونډیرۍN° تعریفډیرۍ لپاره ترم نه دۍ تعریف یاپیژند نه لري)

د x = 0 لپاره ترم نه دۍ تعریف یا پیژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x یا $T(x,2y) = \frac{x+2y}{x}$

ارزښتشمیرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده :T(2,3) = (2+6) / 2 = 4

یادونه: د ګڼونو لپاره دې دریمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼونډیرۍ ورکړ شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې انسان د خپل چاپيريال د ټولو شيانو او پيدايښتونو سره لاس په ګريوان دئ، نو پوښتنې او هيلې رامنځ ته کيږي،غوښتنې لري او ويناوې کوي، په کومو ويناو کې،

چې شيان او ريښتونی(واقعيتونه) بيرته هنداره (منعکس) کيږي يا په يوه څه يا شي، چې وينا کيږي، نو موخه ترې د هغه څه ريښتون حالت يا ځاننيونه ده۰ يوه وينا په واقعيت کې ټيک هلته ريښتيا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت يا بهتره شي ځاننيونه په ريښتونې شته يا موجود وي، په بل حالت کې دا وينا ناريښتيا (غلطه) ده. مور نيسو، چې دا څه دې په شميرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پريکړه دې پرې کيدی شي۰

پژند(تعريف) ۱ ۰ ۱ :

وينا د يوه شی ، څرنګوالي (چې ځنګه دئ)، د هغهٔ بيرته هندارونه يا منعکسونه ده۰ (دا په دې مانا، چې وينا يو شی په وينا کې همهغسی ښايي لکه ځنګه چې دئ له دې امله شي هندارونه يامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کيږي يا په همدې ډول په نخښه کيږي۰

يا په بل عبارت وينا د کليمو داسې هدفمند يوځايوالی يا يوځاي ايښوول دي، چې د يوه شی حالت (ځاننيونه) يا شکل او د شيانو ريښتونې اړيکی بيرته هنداره يا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه دريښتياوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

يا په بل ډول :

د وينا لاندې سرې يو ژبنی يوون، يا يووالی (واحد unit ,Einheit)پوهيږي، کوم چې د شي اړيکی (د شي څرنګوالی) بيانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وينا په کومه ژبه، په پيدايښتي (طبيعي) او که په مصنوعي ژبه ويل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وينا د طبيعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځني ډول: يوه وينا يوه جمله ده يا فرمول دی، چې يا رښتيا او يا نارښتيا ده۰ داسې هم ويل کيږي، چې وينا يو «رښتيارزښت » ،، رښتيا يا نا رښتيا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنې : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « رېښتیا ارزښت»(رښښتیا یا نارښتیا) دئ۰ نور خویونه په راتلونکی کې نه څېرل کیږي۰

وېناوې د لاتین په لویو تورو A , A* په نخښه کوو او داسې نور۰

۱ ۰ ۲ ۰ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یواځی یو ممکن « رېښتیا ارزښت» لرودئ شي، دا په دې نامه، چی وینا یا رېښتیا ده او یا نارېښتیا. (د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ)۰

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دئ. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنۍ افاده یا وېینه د وینا په څېر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چی د ویناارزښت حتماَ باید څرګند یا معلوم نه وي۰ که بالاخره ټوله پوهنه د رښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم موږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چی د هغه شي حالت (ځاننیونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چی پریکړه وشي۰

ټولې وېناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کیږي، د رښتیا ویناو ټولګی او د نارښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف)۰

که وینا رېښتیا وي، نو رېښتیا ارزښت یې رېښتیادئ او په w سره یې ښایو، که وینا رېښتیا ارزښت نارېښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا رېښتیا ارزښت نارېښتیا دئ

تکرار : هره جمله، چی « رېښتیا ارزښت» (رېښتیا یا نا رېښتیا) ولري، وینا بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیز سم اند(منطق) د ویناو سره سر او کار لري..

بیلګې:

غونډاله (جمله)

الف : » د کابل سین د کونړ له سین سره ګډیږي«رېښتیا وینا ده۰

ب : 7 = 4 + 3 رېښتیا وینا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا ناریښتیا- یا ناتیک وینا ده۰(د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد یاګڼونه کتلکیدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو یې ؟ « نه شي کیدی یو ریښتیا ارزښت باندې تنظیم شي۰ له دې امله وینا نه ده۰

نورې بیلګې :

ویناوې دي:

(دپیتاګوراس (فیثاغورس) جمله۰

د کاتیتونو یا د یو بل سره ولاړو یا عمودو اړخونو یا ضلعو مربعګانو (څلوریو) زیاتون(جمعه) د هیپوتینوزې(اوږده اړخ قایمې زاویې ته مخامخ ضلعه یا قطر) د څلورۍ یا مربع سره برابر دئ.

نورې بیلګې :

سرک لوند دئ

ټول سپي خطرناک دي

$3 > 5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې که يو کاربن له دوه اکسيجنه سره يوځاي يا زيات شي، نو کاربن دوه اکسيډ CO_2وښايي

د دې پرڅنګ يا مخامخ يا پر خلاف يا برعکس : ويناوې نه دي:

د کابل ښار;NaCl ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په ديرش کلن جنګ کې

لاندې ويناوې

کيميا يوه طبيعي يا پيدايښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دريو بی له پاتې (باقي) نه ويشل کيږي

د وينا «ريښتيا ارزښت » ريښتيا لري

لاندې ويناوې

برلين يو کوچنی ښار دئ

3 < 5 پنځه له دريو کوچنی دئ

ټول لومړني اعداد ياګنونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سين پروت دئ

هره يوه له دې ويناو « ريښتيا ارزښت » نا ريښتيا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد يو جوړه وليکه، نو طاق ته ناجوړه وايو٠

په لاندې کې به وڅيرو، چی ويناوې شته، چې نورې ويناوې د خپلې برخی په څير په ځان کې خوندي(لنډ : خوندي) لري٠ داسې ويناوو ته يوځاېشوې يا يوځای ايښول شوې يا ځنځيري ويناوې وايو او که غواړئ ! مرکبې ويناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بیلګه راوړو » کهٔ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشوړ وي، نو داعدد یا ګڼ په 3 ویشوړ دی، یانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ویشوړ ده له دې لاس ته راځي، چې پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ویشوړ دی۰

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشوړ یا ټوټه کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي۰

لکه : سپین غر یوه خورا جګه څوکه لري

یوه بله بیلګه د یوځای شوې(ځنځیري) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي۰

څرګنده ده، چې دواړه ساده جملې د برخویناو په څیر یوځاي شوي ویناوې دي: » سپینغر خورا خواریکښ دی« همدا ډول » هغه (سپیغر) پوهیږي، چې نور کارته وهڅوي«۰

دا ویناوې کیدی شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیاارزښت یې همغه پاتې شي۰

د بیلګي په توګه:

۱ - سپینغرخورا خواریکښ دی۰ یا هغه پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چې هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی۰

۳ - دا چې سپینغر پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي ، نو سپیغر خورا خواریکښ دی۰

٤ – سره له دې، چې هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دی۰

ګورو، چې په دې ډول یو له بل توپیریدونکی تړلې یا ځنځیري، یا یوځاي شوی ویناوې جوړیږي، چې په خپله رښتیاارزښت کې یو له بل توپیر کیدی نه شي۰ د دوي توپیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوي یو له بل سره تړلو ځرنګوالي له لارې مخ ته پروت دئ یا رامنځ ته شوی دئ۰
په لاندې کې به ممکنه« ویناترنه» (یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر څیړنې لاندې ونیول شي.

پیژند ۱ ۰ ۲ :

یوه «ویناترنه» یا یو «ویناتړاو» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنۍ وینې(افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډیرو وینا ؤ څخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

مور د سم اند یا منطق ستېپرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یې یوازې او یوازې د «برخویناو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي۰

بیلګې

الف: سپین ډیر خواریکښ دی، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي۰

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي۰

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمي ولید۰

۱ ۰ ۲ ۰ ٤ ویناترنه یا ویناېلواک (- فنکشن یا – تابع)

د ویناترنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که څوک د ترنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځاي شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځاي غواړو «ریښتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپیژنو. مور پریکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو (ویناواریابلو یا وینا اووښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه p,q,r,... او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. مور دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاينيونکی(يوځائيز يا يوګوني) بلواک يا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه٠

يادونه: د بلواک يا تابع کلمه وروسته ځيړل کيږي، دلته د بلواک يا فنکشن پرځاي ويناتړنه يا عمليه بسيا کوي. دا ځنی ويونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي يې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وينا تړاو يا ويناتړنی(عمليې) «نه والی»: ديوی ويناP نه والی هغه وينا ده، چې هلته او يواځی هلته د رينتيا ارزښت ناريښتيا لري، چیP رينتيا ارزښت رينتيا ولري٠

موږ د وينا P نه والی نفی په Pنه سره ښايو ، شميرپوهنيزه نخښونه يې په لاندې توګه ده ¬p په يوه جدول کې رينتيا فنکشن يا رينتيابلواک کې داسی څرګند وو(دا چې زه کله کله هغه شميرپوهنيز سومبول د نه p لپاره ¬p نه شم ليکلی، نو دا به همغسې p نه وليکم.

P	Pنه يا ¬p
w	F
f	w

د يوې وينا P تکرار نه والي يا بيا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې يې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

p	p¬	p¬ ¬
w	f	w
f	w	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه واره نه والی د همغې لومړنۍ وينا رښتیاارزښت لري

په پيدايښتي ژبه کی نه والی په«نه» يا « نا » خپل رښتينوالی مومي٠ «اباسين هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی٠ دا د اباسين خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی٠

نه والی ته بيلګه : د وينا ¬A نه والی : "7 < 3 ,, وينا نهA ده: دا چی A رښتيا ده، نو ¬A نارښتيا ده٠

ترنه(عمليه) يا کنجنکشن Conjunction (لاتين: ترنه، دلته د « او (and)» ترنه يا تړاو):

وينافورم يا – بڼه:

د وينا په څېر يا - مخامخ يا - برعکس وينا بڼه رښتيا ارزښت نه لري، د وينافورم يا – بڼې لپاره بيلګی دي لکه پوښتنې، امرونه او نظرونه ياعقيدې:
۱ – هوا څنګه ده ؟

۲ - کورته لاړ شه

۳ – شين يو ښه رنګ دی٠

که په ترمونو کې، چې واريابلی يا اوښتونې لري، اړيکنخښی وليکل شي، يوه وينابڼه منځ ته راځي٠ يوه د نخښو لړۍ کم له کمه د يوې اووښتونې يا متحولې د بيلګې په توګه

3 + x <5 د بنسټيزورشو N کې نه ريښتيا ده او نه ناريښتيا٠ دا له دې امله وينا نه ده٠ که چيرې د واريابلې يا اووښتونې يا متحولې پر ځاي ۰ او ۱ وليکل شي، نو بيا يوه رښتيا وينا ترې منځ ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ځاي يې نور د پیدایښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بیا ناریښتیا ویناوې منځ ته ترې راځي۰

دا چی اووښتوني یا متحولي د بنسټیزو یا بنسټ سټ ځخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک یا ازاده اووښتوني(متحولي) په نامه یادیږي۰

پیژند :

یوه وینابڼه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اوښتونې(متحوله) لري او د

- د دې اووښتوني په ځاي د بنسټیزې ورشو یا ساحې او یا
- د دې اووښتوني ترلو ځخه د کوانتیفیکاتورونو(کوانتورونو) په مرسته یوه وینا جوړیدی شي.

یادونه :

که په لاندې کې د تړاو یا تړني کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه یاکنجنکشن conjunction دی۰ له ګرامر سره په توپیر، چې هلته تړنه یا تړاو یو « تړونتیکی، تړاولغات» ښایي په سم اند کې تړنه یو ځرګند(دوه ځایلرونکی یا دوه ځاییزیا نوره هم ښه دوه ګونی) جملې ترل یا په بل عبارت دوه ځاینیونکې (نوره هم ښه : دوه ییز یا دوه- ګونی) فنکشن یا تابع(بلواک) تعریفوي یا پیژنی۰

د « او» تړنه او نخښه یې $\wedge$

پیژند ۱ ۰ ۳ :

$p\wedge q$ دوه ویناوې p او q یانې د «او » یوځایوالیp او q یواځې او یواځې هلته یو رښتیا ارزښت رښتیا لري، چې p اوq دواړه رښتیا ارزښت رښتیا ولري۰ که له دې ځخه یوه وینا هم نارښتیا وي، نو بیا د « او » تړنه نارښتیا ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترړني نخښنه ددوه ويناو qاو p ترمنځ ليکل کيږي p∧q او ويل کيږي p اوp

موږ د « او » ترړنه په لاندې جدول کې روښانه کوو يا انځوروو:

يادونه: په لاندې کې w رښتيا او f نارښتيا په معنا دي

p	q	p∧q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

د « او » ترړني ته بيلګه :

د دوه رښتينو ويناو د A وينا : ,, 7 > 3 ,, او د B وينا : 3 يو لومړنى ګڼ دی رښتيا وينا A ∧ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

يادونه: موږ ګران لوستونکي به سره يوځاي فکر وکړو، چې دا پريمګڼونه لومړي او که لومړني ګڼونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګڼونه لومړني نه دي۰ دا ځکه لومړي ګڼونه دي، چې له دوي له زياتون او يا کمون څخه لومړی ګڼونه جوړيږي۰ موږ به يې زياتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ويناو دا ترړنه يا کنجنکشن، چې مختلف رښتياارزښتونه ولري ياني د A وينا: 3 ,, 7 > ,, (رښتيا او د B وينا: « ۳ يو جوړه ګڼ دی (نارښتيا)، نو A∧B وينا : چی ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « (نارښتيا) ده۰ دا ويناترړنه ويناارزښت نارښتيا لري۰

د دوه ويناو د « او» ترړنه دA وينا: 7 > 3 او د B وينا « ۳ يو جوړه ګڼ يا جفتعدددی» يوه نارښتيا وينا ده : ۳ يو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ومو لیدل، چی د « او » تړنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده (عادي) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټۍ «پټیدځاي» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » تړنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښايې»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځاي پیدا کړ« او » دا پټیدځاي یې پټ واسته۰

۱) هلمند موږ(بډا) شو او هیواد یې پریښود ۰

۲) سره له دې، چی برلین کوچنۍښار دۍهلته د منی د المپیک لوبې کیږي

۳) ۱۵ ګڼ جوړه دۍ، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونۍدۍ

په ټولیزه توګه د « او » تړنه هلته ربښتیا ارزښت ربښتیا لري، چی د جملی ټولی برخې ربښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا تړنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخی سره په تړنه « او » وتړل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او بریۍ یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» تړنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « تړنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله تړنه» تل ژوروالی ته راهڅوي: باید جوته شي، چی ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»تړنی پیژند یا تعریف یواځنۍ دۍ او دا $\vee$ د یا تړننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p اوq ترمنځ ځایول کیږي p∨q او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول څرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

p	Q	p\/q
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيږي، چې ديسجنکشن يا د « يا » ترړنه p\/q يو داسې ربښتياتابع (-بلواک يا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته ربښتيا فنکشن ربښتيا اخلي، کله چې کم له کمه د « يا » ترړنې يو غړی د ربښتيا ارزښت ربښتيا ولري يا واخلي۰ که د ديسجنکشن دواړه غړي نارښتيا وي نو p\/q هم نا ربښتيا دی۰ دا د ربښتيا فنکشن کې د ځايونې « يا» څخه بل څه نه دي۰ يوه د «نه خونديکونې» يا « نه ځايونې» يا « په برکې نه نيونې» د « يا » وييبنه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « يا۰۰۰ او يا ۰۰۰» ليکل کيږي۰

بيلګه (د « يا » ترړنې ته):

د دوه ربښتينو ويناو د « يا» ترړنه د A وينا: „ 7 > 3„ اود B وينا: « ۳ د ٦ پرويشونی دی» يوه ربښتيا وينا A\/B ده : «۳ له ۷ کوچنی دی او د ٦ پرويشونی هم دی»۰

د دوه ويناو ترړنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا „ 7 > 3 „ ربښتيا او د B وينا: „ 7 =3 „ (نارښتيا) ، نو A \/ B ده، چې 7 > 3 يا 7 = 3 دا وينا ترړنه د ربښتيا ارزښت ربښتيا w لري۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه نارښتیا ویناو د « یا »(" Or") تړنه:

د A وینا : "7 > 3" او د B وینا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دئ یوه نارښتیا وینا $A \lor B$ ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دئ»

الترناتیوAltenative یا انتیوالنخ Antivalenz ویناوې : دا د » یا « ویناتړنه باید د « یا ... او یا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتیا ده، که چیرې دواړه ویناوی رښتیا وي۰

بیلګه : (دوه الترناتیو ویناو ته ، چې رښتیا وي)

د وینا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دئ» د الترناتیو په نامه داسې دئ « ۳ یا له ۷ کوچنئ دئ او یا یو لومړی ګڼ دئ» نارښتیا دئ۰

بیلګی : (نه والي، کنجنکشن، دیسجنکشن ته)

یادونه: په لاندې (Wahr) w د رښتیا او(Falsch)f د نارښتیا لپاره کارول شوي.:

ویناتړاو

A	π پي ټولګڼ دئ	f
B	π ایراشنل ګڼ دی	W
C	صفر له پي π کوچنی دئ	W
D	π پي له دری کوچنی دئ	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

<u>A</u>	π ټولګڼ نه دی	W
<u>C</u>	π کوچنی برابر له صفر	F
A∨C	π ټولګڼ او له صفر لوي دی	f
B∧C	π ایراشنل او له صفر لوي دی	W
A∨C	π پي ټولګڼ یا له صفر لوي دی	W
A∨D	π ټولګڼ یا له ۳ کوچنی دی	f

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغۀ فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم٠ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دی، یانې د » او یا « امکان شته٠ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي٠ یانې دوه نرخونه باید ورنه کړای شي٠

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځیره دې يې په پام کې راولی٠ په شالت یا سرکټ الجبر کې د کجنکشن یا د »او« ترنې« ریښتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه ترل شوي دي،

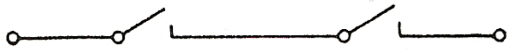


Bild 7.1

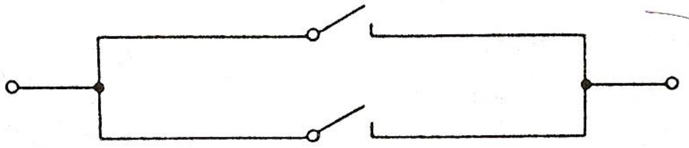


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس ربښتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستیبیلګه په ګوته کوي، چې داسی یوځاي شوي ویناوې جوړیدئ شي، په کومو کې چې له یو زیات تړوني موجود وي۰

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملی کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی (ربښتیا - بلواک یا ربښتیا فنکشن » نهp p\/ دی۰ د دې لپاره هم د ربښتیاارزښت فنکشن ورکول کیږي۰ د ربښتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا p نه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp\/p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دئ

د یوې وینا نه والی

p	Pنه	p\/pنه
w	f	W
f	w	w

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکپک کوونکي نه ده یوه وینا نهp\/p تل ربښتیا ده، بی له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم ربښتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغې ربښتیابلواک کټمټ یا (identisch(identic ربښتیا دئ(دا په دې مانا، چې که د ویناؤوښتونکې یا واریابلې ته هر ربښتیاارزښت ورکړ شي یانې ربښتیا یا نارښتیا تل د ربښتیا ارزښت ربښتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغو ربښتیاارزښت بلواک کټمټ نارښتیا دئ (دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتوني په هره وینا ارزښت وینا نارښتیا ارزښت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction (د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

رښتیاارزښت دې د وییني یا افادې نه(p∨q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د نهp∨q رښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$\begin{array}{l} p...q....p \vee q....\neg(p \vee q)......\neg p...\neg q...\neg p \wedge \neg q \\ w...w......w.........f.............f.....f.........f \\ w...f.......w........f.............f......w........f \\ f...w........w........f............w.......f.........f \\ f...f........f.........w............w........w.........w \end{array}$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو وییني یا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه رښتیا بلواک یا –فنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه رښتیا - (او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکې جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو -وینا تړنه) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعاً همغه نه پاتیږي، لکه د بې نوکانو عملیې.

ایمپلیکیشن implication (لاتین: وررا ګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظیم یا ترتیب شي اپیلیکیشن سومبول<= چې دا سومبول د دواړو ویناو Aاو B ترمنځ ولاړ دئ: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدیډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion (لاتین: پاي لاس ته راوړنه) وایي۰ د دوه ویناو ایمپلیکیشن ټیک هلته نارښتیا دئ، چې پریمیسس ربښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي۰ په بل ډول ربښتیا دئ۰

د دوه ویناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرګندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول <=

P	q	p=> q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسی یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ویناو A اوB ټیک هلته یو نارښتیا یوځاي شوې ویناچې په p=/>qسره ښایو)۰

کله چې لومړۍبرخه ویناربښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوتري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا ویینې په دې ربښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځېدلی شي. په ښکاره ډول د بېلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلويزيون کتلو ته کورته راځي.

ناریښتیا ده، که د جملې لومړئ برخه رښتیاوي او دويمه نارښتيا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بېلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې څلورمه کرښه سره يو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې رښتيا همداسې نا رښتيا وي) پرابلمونه نه پيښوي، په دې حالت کې ټوله وينا رښتيا ده، که لومړئ برخه وينا نارښتيا او معکوس دويمه برخه رښتياوي، نو په دې حالت کې به د بېلګې په توګه جمله نارښتيا ونه ليدل شي(که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلويزيون ليدلو ته راشي)، نو بيا د دوه ارزښتوالي پرينځيپ له مخې يواځې دا ارزښت ،، رښتيا،، باقي پاتې کيږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg(p \vee \neg q)$ ټيک بيرته بيا(بيرته د ايمپليکيشن د رښتيا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې يې: q که p، او يا هم p ، د q لپاره پوره کيدونکی شرط دی(په بل ډول يې: qد p لپاره اړيين شرط دی)

ورته والی :يوارزښتوالی(برابرارزښتوالی) Äquivalent

که دوه ويناوې qاو p خپله ترنه په » ټيک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که» تنظيم کړي، دې ته ورته والی يا ايکويوالنت وايي۰ د ايکويوالنت سومبول دی ≈ د دواړو ويناو qاوp ترمنځ دا سومبول پروت دیq ≈ p په دې مانا، چې p ټيک هلته که q ۰ ايکويوالنت سومبول يې په دواړو خواو ايمپليکيشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ويناو ايکويوالنت ټيک هلته رښتيا دی، که دواړه ويناوې رښتيا يا دواړه ويناوې نارښتيا وي۰

دا شي ځرنګوالی يا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

p	q	P⇔q
w	w	W
w	f	F
f	w	F
f	f	W

سیده او مخامخ یا په ښځ دي په دې مانا وي، چی له p څخه q لاس ته راځی او په ښځ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د وینابلواکو یا ـفنکشنونو ترمنځ اړیکي

د دوه وینا و تړنه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د وینا و رښتیاارزښت د تړنویناارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي۰ دا د یو وینا ارزښت جدول له لارې ځرگندیدی شي۰ ومو لیدل، چی ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دئ۰ په لاندې جدول کی به وگورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنگه یو بل سره ځان نیسی یا گورو، چی سره یوارزښته دي۰

p	q	p ⇔ q	p=>q	q ⇒ p	(p ⇒ q) (q ⇒ p)
W	w	w	w	w	...........W
w	*f*	f	f	*w*	..........*f*
F	*w*	*f*	*w*	*f*	..........F
f	*f*	w	w	*w*	.........*w*

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

(p <=>q) <=>(p => q) (q => p)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ورته والي ویناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې یو بل سره بدل کړو یانی د یوه ځاي د بل سره بدل کړو۰ له دې ځخه پیچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کیږي۰

د دې ورته والی ویناتړنې غوره بیلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$

$$(2)......(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او دیسجنکشن لپاره دیستریبوتیو قانون:

(3) [p/\(q\/r)] □ [(p/\q) \/ (p/\r)]

(4) [p\/(q/\r)] □ [(p\/q) /\ (p\/r)]

۱ ۰ ٤ وینافورم یا - بڼه او کوانتورونه

وینا سم اند په لاندې ډول ساده ټولیز کیدی شي۰ د بیلګي په توګه که مختلف شیان همغه خویونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وویلي - - یا افاده کړای شو: دلته د ویناو پر ځاي د وینافورم ځخه خبري دي، یا غږیږو۰ دا داسی ژبنی وییني یا افادې دي، چې د شیانو لپاره واریابلی یا اوونتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته یوه وینا شي۰ بیلګي یی په لاندی ډول دي

لومړی : xپر دوه ویشونی دئ »

دویم : » z یو هوار څلورګوډی(څلورضلعي) » دئ۰

دریم : «u له v څخه لوي » دئ او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته رښتیا یا نارښتیا وینا لاس ته راځي٠ که په دویم کی دz پرځاي «ډیرګوډی» (کثیرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو یوه رښتیا وینا لاس ته راځي٠

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو یوه نارښتیا وینا لاس ته راځی٠ دریم یوه اړیکه(ریلیشن(ده، چې هلته د انفرادیو د ایښولو ترتیب هم یو رول لري٠ دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا رښتیا وینا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي٠د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل٠(له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وایي٠

بیرته داسی لیکو P(x), Q(z), R(u,v)

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بڼي ځخه وینا جوړوي٠ چې کوانتیفیکیشن Quantifikationبلل کیږي٠ دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بڼی افراد همغه خویونه ولري، چې ټولوینا (Allaussage) ورته وایو٠یاچې په پوښتل شوي چاپریال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خویونه ولري، دې ډول وینا ته موږ د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وایو٠ زموږ په بیلګه کې یی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پیدایښتی یا طبیعي) ګڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کیږي

پنځم : ټولې څلوری (مربع) هوارې ډیرګوډی یا کثیرالاضلاع دي٠

د ټولکوانتور یا ټولوینا لپاره نخښه∀

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتونوینا لپاره نخښه ∃

یادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څیر ده په پام کې دې وي، چی د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې (ویاریابلی یا مجهولی) ورکول کیږي٠

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی یي لولو، چی یوx په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځه ۱ : $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دئ (یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه)

دا سومبول $\exists$ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰ ۰۰ شته»د وینابڼی او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیرئ کې، په کوم کې چې کم له کمه یوه داسې اووښتونې ځاي په ځایونه شته وي کومه چې وینابڼه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی (د رښتیا شتون - موجودیت وینا وي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له(په) (کې) R شته ،د کوم لپاره چې$x+1=0$ باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیرئ یا ریل ا عدادو سټ R توکی دئ او $\in$ په دې مانا دی، چې توګي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$$x^2 + 4x = 0$$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x=0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلګنونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (2، -2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$$\exists x \notin R: x^2+1=0$$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې وینابنې هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډیرۍ یا واریابلډیرۍ ټولو توکو لپاره رښتیا وینا شي٠

بیلګه: وینابنه « x په 2 ویشونی دئ » د جوړه ګڼونو هریوه لپاره رښتیا ارزښت لري په

دا سومبول $\forall$ په دې مانا دئ، چې « د ټولو x لپاره» د وینابنې او په همدې پورې اړوند د وینا متحولو ډېرۍ یا سټ (ویناااووښتونډیرۍ یا واریابلډیرۍ) ترڼه له دې سومبول سره یوه Universalaussage یونیورزالوینا یا ټولوینا منځ ته راځي٠ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرۍ(اووښتونډیرۍ) هر توکی لپاره د وینابنې څخه یوه رښتیا وینا جوړیږي٠

جمله : (دUniversalaussage یونیورزال- یا ټولیزې وینا یا ټولوینا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ویشونی دئ)

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو رییلاعدادو x لپاره, کوم چې له یوه لوي وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د نارښتیا ټولیزې وینا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وینا نارښتیا ده، ځکه چې دا د $1 \le x \le 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وینا د ټولو ریل عددونو لپاره باور نه لري٠

۱ ۰ ۵ اړین – یا ضروري- او پوره کیدونکي شرطونه

د ایمپلیکیکشن سومبولA=>B (« کهA نوB » « له A څخه Bلاس ته راځي»)یا په بل ډول : که A باور ولري، نوB هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته۰

الف) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دئ»

ب) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دئ»

فرمولونه الف) وايي، چې د A ربښتینوالی د B ربښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چی آ پوره شي۰

بیا : وینا باور لري۰

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دئ یا پوره کیدونکی دئ یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – ویناA : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دئ»

وینا B : « ګڼ n پر ۳ ویشونی دئ»

$$A => B$$

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دئ یا بسیا کوي، چې یو رییل ګڼ n پر ۳ ویشونی دئ، که دا پر ٦ ویشونی وي۰
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ۳هم ویشونی دئ ۰ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي۰ د بیلګي په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ویشونی دئ ، مګر په ٦ نه دئ ویشونی۰

۲ - وینا A : “n > 7„

وینا B :وي دې: n > 6

$$A => B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دا پوره کيدونکی دی، چې يو رييلګې ن له ٦ څخه لوي دی٠ که اړيکې، چې ن له ٦ لو دی، باور ولري

داسې رييلګنونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له٧ څخه لوي نه دي٠ د بيلګي په توګه ٥ ،٦ يا شپږنيم

د ب) فرمولبندي وايي، چې وينا ب باورلرل غوښتونکی يا اړيين يا ضرور دی، د دې لپاره، چی وينا A باور ولري٠

که وينا B باور ونه لري نو وينا A هم باور نه لري ٠

بيلګی د اړيين(ضروري) شرطونو لپاره:

١ – د دې لپاره، چې يوګې n پر 6 وويشل شي، اړين(ضرور) ده، چې دا ګې پر3 ويشونی وي٠ يو ګې، چې پر3 نه وي ويشونی، نو پر ٦هم ويشونی نه دی٠

٢ - ويناA : » څلور ګوډی يوه څلوری يا مربع ده«

وينا B : » څلور ګوډی څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې يوه څلورګوډی يوه مربع(څلوری) ده دا خويونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه يې ولاړ نه وي، نو مربع يا څلوری نه ده که يوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړين نه ده، چې څلوری يا مربع دې وي٠

د برابروالي يا برابرارزښتي (ايکويوالنت) سومبول«

A<=> B

(په دواړو لورو ايمپليکيشن) لپاره په شميرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وايي، چې A دB لپاره يو ضروري او پوره کيدونکی شرط دی٠ « دا وايي، چېA ټيک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – ویناA : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دی، که دا عدد پر۳ او ۲ ویشونکي وي۰

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعې»

A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه(ضلعې) ولري۰

۱ ۰ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم(ترې پوهیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې تیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي۰ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کې داسې نه ده۰

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د تیک څرګندې پوهنې یوه نه پرېښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله څه شی دی ؟

 ټولې ربښتوني ويناوې په شميرپوهنه کې جملې بلل کيږي، چې د پيژندنې لپاره ښوونې يا ثبوت ته اړتيا لري ۰

اکسيوم Axium څه شی دی؟

 بې ثبوته ربښتينې وينا ته اکسيوم وايي

شميرپوهنيزې يا د رياضي جملې زياتې نيونې(فرضيې) او ثابتول(غوښتنه،جوته ونه يا ښوونه) په بر کې- يا خوندي لري۰

که دا وينا داسی وي، نو پس داسی به هم وي۰ دلته که دا وينا داسې وي نيونه يا فرضيه ده او نو داسې هم ده۰ دا غوښتنه ده، چې بايد ثبوت يا وښوول شي۰

اکسيوم   : ۱ طبيعي عدد دی (پيانو Peano)

: ټکی هغه دی، چې پر ويشونی نه وي يانې په ټکی ويشل بند دي۰ (Euklid)

: حتمي پيښه د پيښي امکان ۱ درجه لري۰

جمله: که دريګوډی ولاړکونجيز وي، نو(پس) د پيتا ګوراس (pythagoras) درسي جمله باور لري

: يو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، بايد ناجوړه(طاق) وي

: په اخره جمله کې نيونه(فرضيه) ده (که يو پريم عدد له ۲ لوي وي۰۰۰) او ثبوت يې (هر له دوه لوي عدد په دوه ويشل کيږي پس لومړی ګڼ نه شي کيدی، نو دا تل ناجوړه ياطاق دی)په ځتوالي يا تضاد کې پيژندل کيږي۰
تل داسی نه ده، چې د جملی د ربښتينوالی ځخه دې د جملی په ځتوالی يا تضاد هم ربښتيا وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ۲٪ هم (ربښتیا)

جمله: که ۲ ٪ پس ٦٪ هم (ناربښتیا)

۰۰۰۰۰۰ټیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دننني کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دی۰

په ځټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دنننی کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزټیک هلته(هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځنې او یواځنې ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په ځټ) ولاړکونجیز دی، کله چې دننني کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي څخه هر یو څو کلن دی؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دی او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دی یانی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کیږي او ساده کیږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \quad \vee \quad 22x +3 = 113$$

په کېن ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزیات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا ګڼ ۲۲ ځله x بیا ۱۱۰ کیږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده یانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ۵ کلن پلار ۳٤ کلن او نیکه ۷٤ کلن دی۰

که ترمونه $T^\wedge$ اوT° د برابروننخښی = باندې یو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابرون پیداکیږي: $T^\circ = T^\wedge$ ۰

که چیرې ترمونه په دې نخښو $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ او(نابرابروننخښه =|) یو له بل سره وتړل شي یو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي یا مجهولو سره یوځاي شي، هغې ته د وینافورم یا نوره هم ښه وینا بڼه ویل کیږي۰

دا یا رښتیا یا نارښتیا وینا کیدی شي۰ که ناټاکلي، چې اوښتوني یې هم بولو(د بیلګې په توګه z , x , y) پر ځاي د بنسټېدیری ګڼونه ولیکل شي۰ په برابرونپوهنه کې له پیژند – یا تعریفېدیری څخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم یا بڼې یو برابرون یا نابرابرون رښتیا وینا کړي۰

د یو برابرون یا نابرابرون (مساوات یا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې ویناښه پیژند - یا تعریفېدیری پورې اړوند وي او دا وینا ریښتینې کوي، اوبیډیری یا حلېدیری L کې پروت دی یا د برابرون یا نابرابرون په ډکوونکو (پوره کوونکو) ډیریو پورې تړلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ریښتونې وینا ورکوي کټمټ یا (identisch, identic) وینا وایي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې :

الف) $5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او -4 = x لپاره رښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ ځخه لاس ته راځی او په ځت $3.4 = 48$ پس- $L = \{-4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 \Rightarrow L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب) $x < 3 \Rightarrow L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی : الف) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیرۍکې سره برابر وي(یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي اینول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیرۍ ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي۰

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نابرابرون	براون
۱) وینافورم کې کیدی شي،چې خواوې سره بدلې شي	$T° < T^\wedge$ $T^\wedge > T°$ $2x < 6$ $6 > 2x$	$T°=T^\wedge$ $T^\wedge = T°$ $3x=5y$ $5y = 3x$
۲) که وینافورم په دواړو خواووهمغه ترم زیات یا کم شي او د یوې ورزیات ترم پيژندډيرئ خوندې وساتل شي یا ځاي کړي	$T^\wedge < T°$ => $T^\wedge \pm T° < T° \pm T^\wedge$	$T^\wedge = T°$=> $T^\wedge \pm T° = T° \pm T^\wedge$
یا تغیر ونه خوري۰ مخامخ یا کینې لوربیلګه کې تفریفډيرئ تغیر خوړلی	$3y < 4x$ ⇔ ⇔ $4y \pm 2x < 4x \pm 2x$	$2z = 8$ => $2z \pm 3 = 8 \pm 3$

پر ځتې بیلګه

$2z=8$ |=> $2z+3-z=8+3-z$

دا چې $z=4$ دې نوي ورزیات شوي

ترم $3-z$نه دئ تعریف یا پيژندنه

لري، ځکه چې $3 - z$ یو پيدایښتي یا طبیعي ګڼ نه دئ

۳) د وینافورم دواړه $T^\wedge=T°$ ⇔ $T^\wedge.T > T°.T$ $T^\wedge < T°$ ⇔

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه کیدی شي چې	$T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow$	$T^\wedge.T = T^\circ.T$
له همغه مثبت ترم سره	$T^\wedge:T > T^\circ:T$	$\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$
ځل او یا په همغه ترم	$T > 0$ که	که $T > 0$ وي
وویشل شي	$3y - 12 < 30z - 90$	$4x+2 = 10x-6$
	$\Leftrightarrow y - 4 < 10z - 30$	$\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x - 3$
	$\Leftrightarrow 4y - 16 < 40z - 120$	$\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x - 30$
٤) د یوه برابرون	$T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow T^\wedge.T > T^\circ.T$	$T^\wedge = T^\circ \Leftrightarrow$
دواړه خواوې کیدی شي،	$T^\wedge < T^\circ$	$T^\wedge.T = T^\circ.T$
چې له یوه منفی ترم سره	$\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$	$\Leftrightarrow T^\wedge:T > T^\circ:T$
ځل شي یا دواړه خواوې په	$T < 0$	$T < 0$
همغه ترم وویشل شي٠	$-2y < -4$	$3x = 12$
که په دې فورم کې	$\Leftrightarrow y > 2$	$\Leftrightarrow -9x = -36$
نابرابرونونه وي نو د	$\Leftrightarrow 10y > 20$	$\Leftrightarrow x = 4$

برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي

یادونه :

په تولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه Tیو او T دوه په لاندځ توګه د ایندکس سره په نخښه کوي: T_1, T_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د رښتيا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښاياست.

۲ – د رښتيا ارزښت جدول له لارې وښاياست، چې لاندط ويناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - (A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ډیرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډیرۍ پوهنې یا سټ تیوري باید خپل ځاي په شمیرپوهنه او همدا ډول په نورو پیدایینتي- یا طبیعی پوهنو کې نیولي وي، نو له دې امله د لنډ تیر وخت را په دې خوا په پرمختللو هیوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځیو په لیکلوست کې پیل شوه، ځکه چې بي له ډیريپوهنې یا سټ تیوري شمیرپوهنه بې مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې لیکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پیدایښتي یا طبیعي ګڼونه یا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څیره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډیرۍ یا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډیري پوهنې (سټ تیوري)په پرمختللو هیوادونو کې هم د شلمې پیړۍ په دویه نیمه کې د میندو او پلرونو لپاره ستونځې پیدا کړي، ځکه، چې دوي د ډیرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنیانو سره یې مرسته نه شوه کولی۰

د ډیرۍ کلمه له عدددونو یا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښووله لکه اوس۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ يا ډېرئ پيژندل کيږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، يا په يوه ټولګی کې ميزونه او چوکی، يا لکه هغه نيزوړي، چې نيز راوړي او د سپين په پټي کې يې ډيرئ ډيرئ اچولي يا د هسکې مينې د ښوونځي په لسم ټولګی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکيو او ميزونو سټ يا ډيرئ۰

د ډېرئ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډيرئ له کليمې سره اوس بلد شوي يو که څه هم تربيلو بيلو پرديو نومونو لاندې، چی زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته يواځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چی د ډيرئ څو مختلف پيژندونه يا تعريفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چی د ډيري پوهنې (سټ تيوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوګرځي۰

ډيرئ پوهنه د شميرپوهنې سټه جوړوي او د شميرپوهنې ټولې څانګې په ډيرئ پوهنه ودانې دي۰ نن شميرپوهنه بې له ډيرئ پوهنې داسې ودانه شي کولی او سټه يې وزي۰

پيژند ۲ ۰ ۱

الف : ډيرئ يا سټ د ټاکلو شيانو يا کلمو ټولګه (يوځايوالی، مجموعه) ده، چې پخپله خوښه د يوې ټاکلې بنسټډيرئ يا بنسټ سټ څخه ، چې د پيژندلشويو اصولو يا کرکتريين له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شميرپوه کانتور(George Cantor 1845 – 1918) پيژند:

زموږ د خيال يا ليد څرګند ټاکلو ، ټيک يو له بل توپيرکيدونکو شيانو ټولګې (يوځايټولولو يا مجموعې) ته ډيرئ وايي او هر شي ته، چې ډيرئ يې جوړه کړې يا ډيرئ ترې جوړه شوې وي، د ډيرئ – يا سټ توکی وايی۰

(Set and elements of set ډيرئ او د ډيرئ توکی)

پ : د مختلفو شيانو ټولګې يوه يوون يا يووالی (واحد Einheit, unite) ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library

شميرپوهنه کې ډيرۍ وايی

يادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد يو يوون يا يووالی ښه نومه ونې دي٠ دا که څو واره وويل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلديږو٠

ت : څرگند شيان د گډو نخښو پربنسټ، چې تر څيرنې لاندې نيول کيږي او د دې نخښو له امله يوځاي ټوليږي يا ټولگه جوړوي، ډيرۍ يا سټ تشکيلوي٠ گډې نخښی کيدی شي ښکلا، کوچنيوالی او داسې نور وي٠

يادونه: د گرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پيژندونو کې يې غوره او د پام وړ پيژند ياتعريف د جورج کانتور پيژند دی.

بيلگه :

گڼونه يا عددونه، نومونه، او توري کيدی شي د ډيريو بيلگو په توگه راوړل شي٠

گورو، چې د ډيرۍ يا سټ کلمه په شميرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډيرۍ د څنو شيانو زيات يوځاي کول موخه ده، د ځانگړو شرايطو لاندې.

په شميرپوهنه کې ډيرۍ په لويو لاتين تورو ليکل کيږي لکه ..A,B, او يا M,N,
X,Y,.... د ډيريو توکي د لاتين په کوچنيو تورو ليکل کيږي، لکه a,b,c,…
او m,n,x,v,…

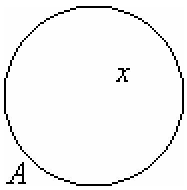
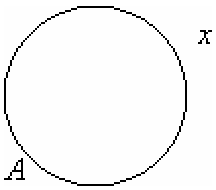
د دې لپاره، چې وپوهيږو، چې ايا توکی a د ډيرۍ A توکی دی که نه نو ليکو: $a \in A$

په پورته کې توکی a د ډيرۍ A توکی دی.

که a د A توکی نه وي ، نو ليکو: $a \notin A$ دلته a د ډيرۍ A توکی نه دی

دا پورته لينکدود له ښی وکيڼ لور ته هم ليکلی شو، چې پرلپسی لړۍ يې ساتلې پاتې شي٠ زه يې په څټ ليکنو سره ليکنيزې ستونځی لرم٠دا لاندې يې دياگرام دی، خو توکي يې بل ډول ليکل شوي دي، چې گرانو ستونکو ته به د پوهيدلو ستونځ پيدا نه کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	
$a \notin A$	$a \in A$
(a د A توکی دی)	(a د A توکی نه دی)

ډیری A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه یی لیکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډیری یا سټ نخښنه ده

یادونه : دا د ډیری کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چی ډیری د شیانو مجموعه یا ټولګه ده او په الماني کې ورته مینګې Die Mengeوایي۰ هغه بنسټیزه خبره یې په پیژند یا تعریف کې ده، که موږ یې چې هرڅنګه وبولو، خو د یو بل څخه کره توپیرکیدونکو شیانو ټولګی ته ۰۰۰ وایو. د ټکو پر ځاي ، چی هر څه لیکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو یې هغۀ مناسبه نوموه ونه ډیری ده، دا د کوټې کوټې څخه یا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاریږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي۰ زه بیا په دې ټینګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انګریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ دی۰ د سټ مانا که په ډکشنري کی وګوری ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دی. ګورووچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډېری یا ډېری خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۲ ۰ ۱

الف) M_1 (لوستل M اينډکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces اينډکش پيژند نخښې ته وايي) دې د لومړيو ګڼونو ډيرۍ (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دې د لاندې برابرونونو يا مساواتو د اوبيونو(حلونو) ډيرۍ وي

(x+1)(x-2) = 0

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بيلګه ۲ ۰ ۲ :

الف) د مساوات (x+1)(x-2) = 0 حل ډيرۍ M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو ياګڼونو ډيرۍ M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$

ډيرۍ لکه، چې ومو ويل د توکو د خويونو له لارې هم ځرګنديدی شي يا ورکول کيدی شي۰

M = { x | x د خوويونو ۰۰۰ سره }

(لوستل: M د ټولو x ډيرۍ ده له خويونو ۰۰۰۰۰ سره)

بيلګه ۲ ۰ ۳

الف) M = { x | x د ټولو سټ ، چې هلته x يو لومړنی عدد يا ګڼ دی }

b) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشډيرئ: ډيرئ، چې کوم توکی ونه لري تشډيرئ يا خالي سټ بلل کيږي او داسی يې
ليکو: θ يا $\{\}=\emptyset$
دا دې د يوې ډيرئ يا سټ سره، چې يوائی له صفر څخه جوړه ده، نه بدليږي يانې

$$\{\} = \emptyset \neq \{0\}$$

بيلګه ۲ . ٤

$$\{x \mid x \in Z, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرون يا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډيرئ

$$\{x|x^2+x-/4= 0 \} = \{ 1 / 2 , -3/2\}$$

کوم ټولګڼ يا تام عدد خوندي نه لري.

ټولګنونو پيژند ته دې پام وي، چې د راشنلګنونو برخډيرئ ده.دريمه برخه دې وکتلشي

بيلګه ۲ . ٥ : د ز. کال د دويمې نيمايې مياشتو سټ يا ډيرئ په Ju , aug sep ,
ok,no, de سره ښايو او ليکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو يا نوره هم ښه داسی ليکلی شو: $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دئ

بيلګه ۲ . ٦ : ټول منديزي، چې نن مازيګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون يا جماعت ته
ته راغلي.

بيلګه ۲ . ۷ : د هغو ميږو ، غواوو او وزو ډېرئ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بيلګه ۲ : ۸ د ټولو هغؤ ګڼونو ډيرئ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ويشي يانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې يې ليکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسي وايو، چې ډيرۍ يا سټ M د ټولو هغو توکو x - لکه پورته - جوړ شوې، چې ۳۰ ويشي او داسې يې ليکو: $M =\{ x \mid x$ د ۳۰ پرويشونی ګڼ$\}$

د ټولو پيداينښتي يا طبيعي ګڼونو ډيرۍ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې يې ليکو:

$$N = \{ 1,2,3,4\ldots.\}$$

دا نه پای لرونکی يا لايتناهي ډيرۍ(سټ) ده ، چې په لاندې ډول يې نخښه ده يا په لاندې ډول په نخښه کيږي: ∞

ګورو، چې په شميرپوهنه کی موږ پر پای ګڼونو برسيره ناپای عددونو سره هم مخامخ يو.

۲ . ۲ د ډيريو ترمنځ اړيکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړيکی د برابروالی او خونديونې يا خوندي لرنې (مساويوالی او يو په بل کې ځاي لرلو) اړيکې دي.

پيژند ۲ . ۲ دوه ډيري يا سټونه M_1 او M_2 يو د بل سره برابرې دي، يانې
$$M_1 = M_2$$

که چيرې د ډيرۍ يا سټ M_1 هر توکی د ډيرۍ يا سټ M_2 توکی هم وي او پر ځټ يا برعکس هر د M_2 توکی د M_1 توکی هم وي.

برابرې ډيرۍ برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګی په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دئ

برخډیرۍ(سبسټ subset)

پیژند ۲ ۰ ۳ :

یوه سټ M_1 د سټ یا ډېرۍ M_2 برخډیرۍ (لاندې ډیرۍ، خوندي ډیرۍ یا سب سټ) بلل کیږي یا M_1 په M_2 کې ځای ده یا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي ده، لیکندود یا لیکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډیرۍ M_1 هر توکی دسټ یا ډېرۍ M_2 توکی هم وي۰

کیدی شي، چې M_1 د M_2 سره برابر هم وي، که برابروالی یا مساوات نا شوني وي نو بیا د اصلي برخډیرۍ یا اصلي سب سټ څخه غږیږو۰

پیژند ۲ ۰ ٤ :

یوه ډیرۍ یا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډیرۍ ده او داسې یې لیکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

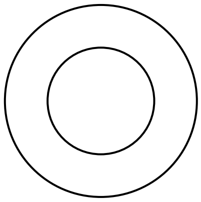
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 يو توکی د M_1 توکی نه وي۰

بيلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو M_1 په M_2 کې اصلی خوندي دی

ب) د ټولو څلوريو (مربعو) ډيرئ د ټولوڅلورګوډيو(څلور اضلاعو) اصلي برخډيرئ ده۰

پ) څيره ۱ ۰ ۱ په هواره يا سطحه کې ټکوډيرئ ښايي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډيرئ يا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څيره کې وګورو، نو يوه ګردئ (دايره) M_1 په بله لويه M_2 ګردئ کې خوندي ده۰

تشډيرئ په هره ډيرئ کې خوندي ده۰ هره ډيرئ په خپل ځان کې د نااصلي برخډيرئ په څير خوندي ده۰

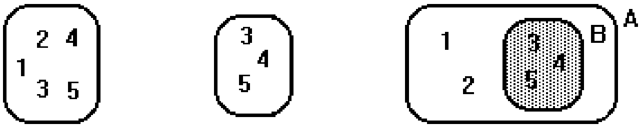
يا دا پيژند :

B⊆A که باور ولري : x ⇒ A∈ x ∈ B

بيلګه:

A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B⊆A

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډيرۍ، چې هيڅ توکی ونه لري تشډيرۍ بلل کيږي او داسې يې ليکو: $M=\theta=\{\}$

يادونه : پام دې وي، چې صفر ډيرۍ او تشډيرۍ سره بدلې نه شي يانې لاندې ته:
$\{\}=\theta\neq\{0\}$

د يوې ډيرۍ توان يا تواندېرۍ (توانسټ)

پيژند ۲ ۰ ٦ :

د يوې ډيرۍ M د ټولو برخډيريو ډيرۍ پوتنخډيرۍ يا په تواندېرۍ(-سټ) بلل کيږي او داسې يې ليکو:(P(M په تواندېرۍ توکي لري، چې هر يو يې بيا خپله ډيرۍ ده۰

بيلگه : د {M = { a,b.c ډيرۍ دا لاندې په تواندېرۍ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډيرۍ چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټيک n جگ 2n توکی لري يانی : n^{2n}

دا پورته د جملې په څير د پوره ايندکشن له لارې اوبی (حل-) کيدی شي(لومړۍ برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د گرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي يې۰

پيژند ۲ ۰ ۷ : د ډيرۍM زور |M| لاندې د ډيرۍ د توکو تعداد ياگڼون پوهيږو۰ که دوه ډيرۍ M اوN همغه زور ولري هغه ته يوزوريزه – يا برابرزوريزه ډيرۍ وايو او داسې يې ليکو: |M| = |N|

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرونونو یا مساواتو او خونديې ساتنو خویونه

الف) رفلکسیو- یا د انعکاس(هنداروني‌زې) اړیکېreflexivity

هغه اړیکي، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ رېښتونې وېناوې ورکړ شوې وي رفليکسيويا انعکاسي اړيکي بلل کيږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خوندي لرل اړيکې رفلکسيو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هيڅ ډېرۍ د خپل ځان اصلي برخډيرۍ یا برخسټ نه شي کېدی.

ب) سيومتريکې اړيکې Symetric relation

هغه اړيکې سيومتريک بلل کيږي، چې د شيانو ترمنځ چې کارول کيږي یا استعماليږي يو له بل سره بدليدلی شي.

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خوندي لرل سيومتريکې اړيکې نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړيکی $M_2 \subset M_1$ نارښتيا یا ناټيک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزيتيويتي Transitivity یا وړون اړيکي

ترانزيتيويتي هغه اړيکې دي، چې له يوه نه وبل ته يي د وړلو امکان شته یا موجود وي.

له $L = M$ او $M = N$ څخه لاس ته راځي $L = N$

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته داسې لولو: که M_1 د M_2 برخډيرۍ او M_2 د M_3 برخډيرۍ وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې M_1 د M_3 برخډيرۍ ده

برابونونه يا مساوات او په بل کې ځايه ونه يا خوندي ساتنه ترانزيتيو اړيکې يا خويونه دي

۲ . ۲ په ډيرۍ کې کارونې يا عمليې

ټولنډيرۍ (د اتحاد سټ)

پيژند۲ . ۸ :

د دوه ډيريو M_1 او M_2 ټولنډيرۍ(unionاتحاد سټ)، چې د ډيريو ټولنه ورته وايو ده:

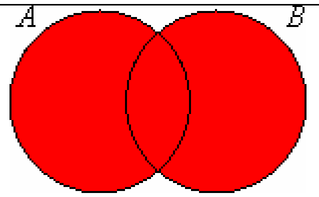
$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسې پوهيږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډيرۍ يا سټ ده، چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکي هم خوندي ولري.

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د M_1 يا M_2 توکی هم دی (پرتله ۱ -مه برخه د يا سره پرتله) يانې دا د ټولنډيرۍ توکی د M_1 يا M_2 او يا د دواړو توکي دي.

يا لاندې دياګرام

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A ? B$ $A \cup B$ (B تولنه A) (x د A سره B اړيکې لري

بيلګى

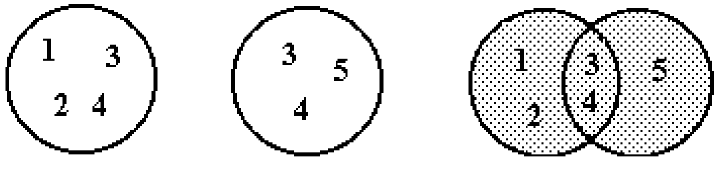
الف) M_1 دې د ځوانانو ډيرى وي، چې بکلوريا لري او M_2 دې د هغو ځوانانو ډيرى وي، چې مسلکي شهادتنامي لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډيرئ ده، چې بکلوريا او مسلکي شهادتنامي ولري او يا دواړه شهادتنامي ولري.

ب)

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

يا په لاندى توګه پيژند او بيلګه: Aاو B دې دوه ډيرى وي د دې ډيريو تولنه داسې ليکو

A∪B = {x | x∈A ∨x∈B}
A={1,2,3,4} B={3,4,5} A∪B={1,2,3,4,5}



تل په تکو تکي شوې تکيډيرى تولنديرى په ګوته کوي.

پ – خيره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې تکيډيرى په ګوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) ټکيپردۍ دي٠ ب) ګډ ټکی لري٠

پ) اړيکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره څيرې په لاندې کې په بيلګو کې راغلې دي٠

د ټولنې لپاره کموتاتيو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسي دلته(لنډ: لړۍ) د ډيريو په ټولنه کی رول نه لوبوي

يادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ٠٠٠ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بيا دا سره جمعه کړو لکۀ

1 , 1+2,1+2+3,1+2+3+4+,1+2+3+4++..+….

نو دا لړيپرلپسي يا لنډ: لړۍ بولو(پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زياتو ډيريو ټولنه لړۍپرلپسی(لنډ: لړۍ) رول نه لري٠

اسوڅياتيو قانون باور لري٠

$$(M_1 \cup M_2) \cup M \ = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډيرۍ (د ډيريو غوڅی يا –متقاطع سټ) intersection

يادونه : دا کړی شو، چې د ډيرو ګډغوڅی وبولو(دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټيکوالی په کې نه شته)

پيژند:

ډيرۍ M د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 غوڅډيرۍ يا د تقاطع سټ ده(لوستل: M_1

غوڅ(پرې)په M_2 (لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ډيرۍ M ټول توکي د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 توکی وي۰

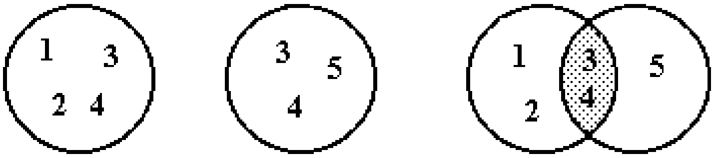
د غوڅډيرۍ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 توکي دي (د ۱ ــمې برۍ د هم او هم په مانا يا د «او» په مانا)

يا دا پيژند :

د ډيريوA او B غوڅۍ $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بيلکه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3, 4\}$



يادونه: دې پورته ډول دياګرام ته د ون دياګرام Venn-Diagram يا د Euler-Venn- Diagram وايی

بيلکې :

لومړی : يوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتيا څخه راځي، چې په M_1 يې په نخښنه کوو۰ يوه بله ډله ، چې په M_2يې په نخښنه کوود کندهار او همغه د پکتيا زده کوونکي، چې په M سره يې ښايو، دي۰ د دې دواړو ډلو غوڅډيرۍ

$M = M_1 \cap M_2$

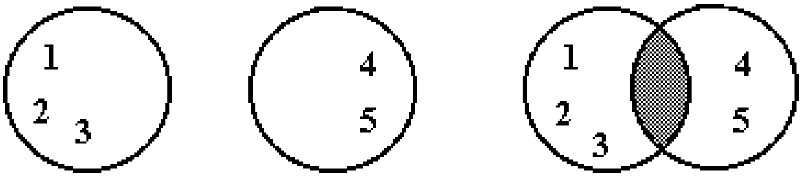
د پکتيا زده کوونکي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

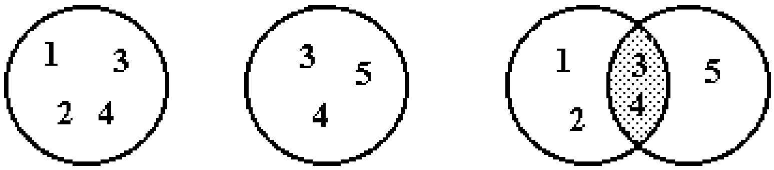
دويم:

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$
$$M = M_1 \cap M = \{r, l\}$$

دريم څيره ۲ ۰ ۳ په هواره یا سطحه کې ښايي، چې الف) ګنون پردي دي



ب) یو بل سره ګډ ټکی لري



پ) اړیکی

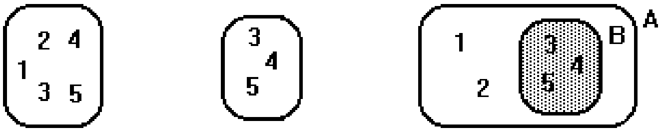
$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بيلګه:

A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B⊆A

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه ټکو باندې ټکي شوې ډيرۍ اصلي برخډيرۍ ده

دوه ډيرۍ، چې غوڅډيرۍ يې تشډيرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونيوله پردۍ بلل کيږي

د غوڅډيرۍ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډيرۍ لپاره کموتاتيو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوڅياتيو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډيرۍکارونو يا ډيرۍ عمليو يانې ټولنډيرۍ او غوڅډيرۍ لپاره دواړه ديستريبوتيو قانونونه پوره کيږي يا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د ګڼونو د شميرکارونو يا عمليو لپاره يواځې يو دستريبوتيو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټوليزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند :

کمونډيرئ يا تفريق سټ M_2 د ډيرئ M_1 او ډيرئ M کموالی يا فرق دئ او

داسې يې ليکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د M_1 ډيرئ کمه شوې

يا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډيرئ M_1 توکي نه وي٠

ليکندود ياليکنډول :
$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A او B توپيرډيرئ ياکمونډيرئ يا تفريقډيرئ له ټولو هغو توکوx جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دئ

بيلګې :

لومړئ : په يوه ټولګي کې M_1 د ټولو نارينه وو زده کړو ډيرئ ده او M_2 دټولو زده کړو ډيرئ (د نارينه وو او ښځينه وو) ، چې په شميرپوهنه کې لس نمرې وړي٠

M_1 / M_2

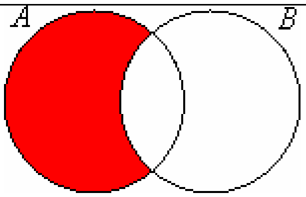
د هغو زده کړو ډيرئ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډيرئ ده، چې په شميرپوهنه کې يې لس نمرې وړي٠

که په ټولګي کې يواځې نارينه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

يا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A \backslash B$ (B بې له A) (x له A سره B اړيکې لري)

دويم :

$$M_1 = \{k, r, a, i\}, M_2 = u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k, a\}, M_2 / M_1 = \{u, s, a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون يا تفريق پيژند او بيلګي را په ګوته کوي په ټوليزه توګه باور نه لري:

$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

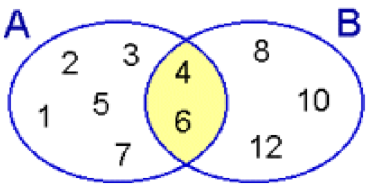
د يوې ډيرئ يا سټ کمپلمنت يا پوره کوونکی :

دا کارونه يا عمليه د نورو کارونو څخه توپير لري، چې په ډيرئ کې مو څيړلي٠ دا يوه يوځايزه کارونه ده او دا نورې دوه ځايزې کارونې يا عمليې دي٠

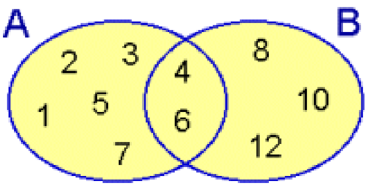
موږ بنسټډيرئ په U او د ټولو هغو توکو ډيرئ، چې U کې پراته دي ياني د U توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته ياني د M توکي نه دي پوره ډيرئ يا کمپليمنت بولو او د $\bar{M}$ سره يې په نخښنه کوو٠

په لاندې څيره کې بيا د ډيرئ غوڅې، - ټولنه او – کمون او برخډيرئ ته د ګرانو لوستونکو لا زيات پام را اړوو٠

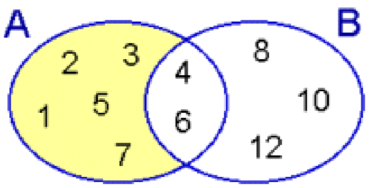
(c) ketabton.com: The Digital Library



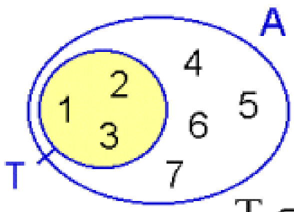
$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$



$T \subseteq A$

پیژند:

پوره کوونکی- یا تکمیلډیرۍ (یا د یوې ډیرۍ کمپلیمنت) د یوې ډیرۍ M پوره کوونکې ډیرۍ $\bar{M}$ تیک هغه توکي لري(د بنسټډیرۍ U څخه) ، کوم چې د M توکي نه وي.

دوه ځله کمپلیمنټډیرۍ جوړول خپلې لومړنی وینا ته ځي ، یانې $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلګه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنی د توپیر او برګ کورنی اوسیږي. که دا دوه کورنی یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیرۍ یا تکمیلډیرۍ بلل کیږي یانې دا کلی پوره کوي.

۲ . ٤ ځیرونه mapping یا اړیکې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع كلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو٠

په دې برخه کې لومړی د ډيرۍ ضرب كلمه پيژنو يا تعريفوو او بيا د ضرب كلمې كارونه څيړو٠

پيژند ۲ ٠ ۹ : د دواړو ډيريو M يو او2 M ډيريضرب(اتيرانضرب) هم ورته وايي، يانې په x سره ځليږي يا ضربيږي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظيم يا ترتيب شويو توكو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډيرۍ ده٠

بيلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظيم له مخې ځل په ډيريو کې كموتاتيو نه دی دا په دې مانا، چې

په ټوليزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو رييلګڼونو ډيرۍ وي٠ په هندسي مانا د كرښې د ټولو ټكو ډيرۍ٠ RxR د ټولو رييلګڼونو جوړو ډيرۍ ده، په هندسي مانا د هوارې يا سطحې د ټولو ټكو ډيرۍ ده٠

پيژند ۲ ٠ ۱۰ :

د څيرونې F لاندې د دوه ډيريو د ضربډيرۍ $M_2 \times M_2$ برخډيرۍ پوهيږو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس د جوړه تنظيم شوو توکو ډيرۍ، چې $x \in M_1$ له يوه يا ډيرو توکو $y \in M_2$ سره تنظيم يا بهتره په باندې ځيره شي۰

داسی هم ويلی شو: د1 M توکي د2 M په يوه يا ډيرو توکو تنظيميږي يا ځېره کيږي۰

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوريجنل يا اصلي توکی او y ځيره توکی بلل کيږي۰

د ټولو اصلي توکو ډيرۍ پيژندورشو يا تعريفورشو يا پيژنددېرۍ يا تعريفډيرۍ بلل کيږي
او د ټولو ځېره توکو ډيرۍ د ځېروني ډېرۍ، ارزښتورشو يا ارزښتډيرۍ بلل کيږي۰

بيلګی

$$M_1 = \{a, b, c, d\}, M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

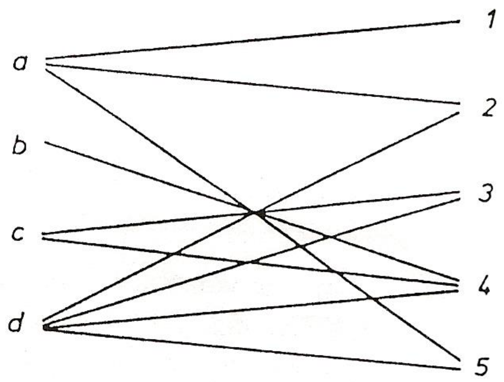
د جدول په توګه دM يو توکو ځېرونه ونه يا ځېره کوونه د M دوه په توکو

ځېره توکی	اصلي توکه يا ځيره کوونکی توکی
1 , 2 ,5	a
4	b
3,4	c
2,3,4,5	d

a -----------------------→ 1 , 2 ,5
b -----------------------→ 4
c -----------------------→ 3,4
d -----------------------→ 2,3,4,5

يا دا لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



څیرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

(د M یو او M دوه ډیریو د ټولو توکو جوړو ډیرۍ)

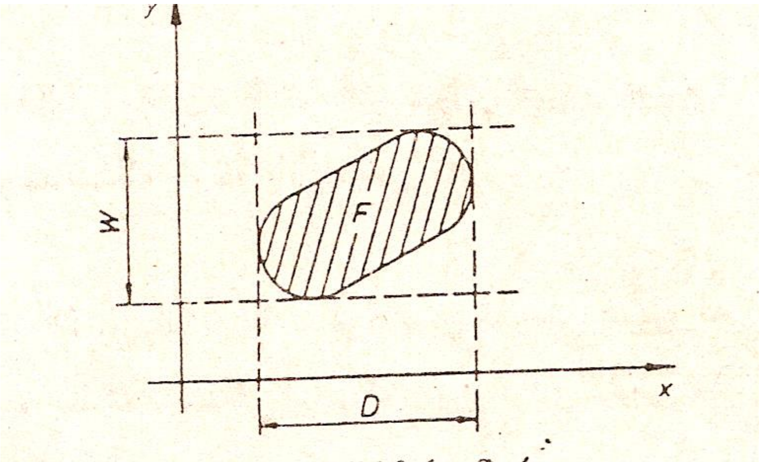


Bild 9.6 ځیره

دریم : هر پیدایښتي یا طبیعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې څیره کیږي۰ داسي پیژند شوې یا تعریف شوې څیره ونه په لاندې بڼه هم انځوریدلی شي۰

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم N د پیداینتي یا طبیعي ګڼونو ډیرۍ. پیژنددیرۍ یا تعریف- د ټولو پیداینتي ګڼونوډیرۍ ده او ارزښتډیرۍ د ټولو جوړه ګڼونو ډیرۍ ده.

څلورم : که M یو په یوه ښوونځي کې د ښوونکو ډیرۍ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګیو ډیرۍ وي نو ښوونکي، چې په ټولګیو کې درس ورکوي دا یوه څېرونه ده. د ښوونکو ډیرۍ د ځانګړو ټولګیو په ډیرۍ کې

موږ د څېره ونې څلور حالتونه توپیروو:

پیژندونه(دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بیلګه کې په څیره ونه F کې د1 M ، چې تعریفډیرۍ D سره برابر دۍ او M2 ، چې له څیره ډیرۍ , W سره برابر دۍ ، توکي مو مخ ته پراته دي.

له یوې څیروني Fغبرګیږو د1 M په M2 باندې. دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دویمه بیلګه کې ، نو د یوې څیره ونې F غبرګیږو له M1 په M2 کې (دلته دې « په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د یوې څیره ونې غبرګیږو د1 M په M2 کې دلته دې دریمه بیلګه په پام کې راواړل شي.

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د یوې څیره ونې غبرګیږو له M1 په M2 باندې. دلته څلورمه بیلګه د بیلګې په توګه راوړو. د دې نیونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګیو ته درس ورکوي.

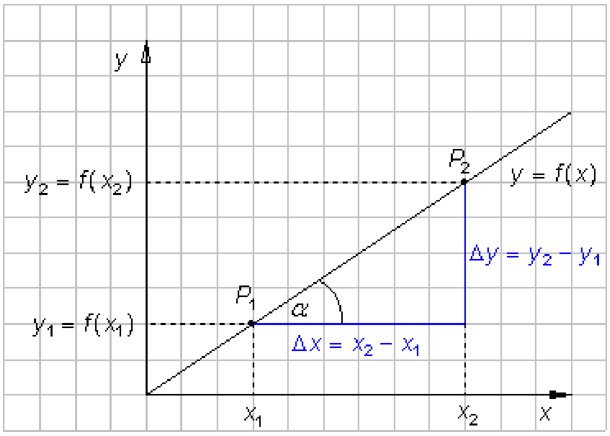
(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شاید ځیرې هم رانه شي، خو که لږ د شمیرپوهنې سره بلد شو، بیا پرې پوهیدل ساده دې. زه مخ ته لرم، چې په دې هکله لیکلی کتاب، چې چاپ شوی نه دی دلته پر لیکه کړم، چې هلته بیا دا موضوع لږ غزیدلې ده.

بیلګه ۲ ۰ ۵ : موږ په هواره یا سطحه کې څرګند شوي کږۍ د ډیریځل RxR په ځیر د برابرونونو له لارې رانیسو(R د رییلګنونو ډیرۍ د ګنکرښې ټکي دي(ګنونه دې وکتل شي)).

الف) $y = 2x$ یوه ځیره ونه ده د R په R باندې ، څکه چې باور لري

$$D=W=R$$



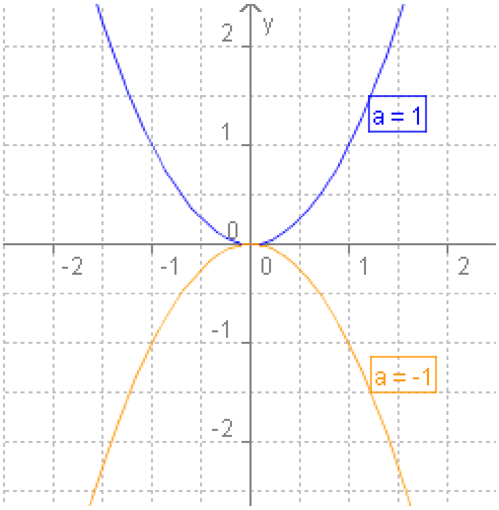
یادونه : په پورته ځیره کې برابرون $y = ax+b$ دی.

ب) $y = x^2$

یوه ځیره ونه ده د R په R کې ، څکه چې باور لري

$$D = R\ ,\ W = [0, \infty]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



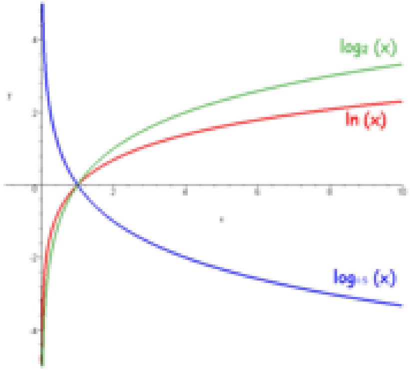
يادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ډول دی، چې b = 0 , c = 0 او a = 1 , a = -1
اينبول شوي دي٠

پ) y = log x

يوه خيره ونه ده له R په R باندې » ځکه چې باور لري٠

$D = (0, \infty) \wedge W = R$

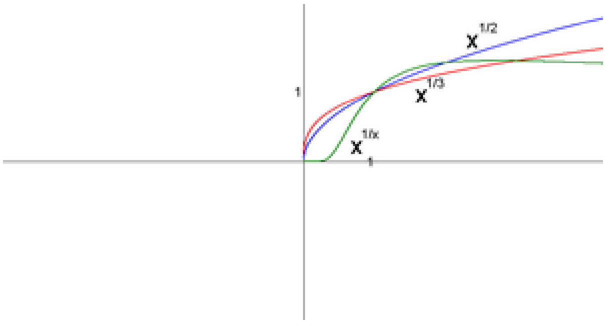


(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) $y = +\sqrt{x}$

یوه څیرونه ده له R په R ، څکه چې باور لري

$D = W[0, \infty]$



یادونه : پورته د دویې ،دریمې او په x -مې ریښې په مانا دی

څیرې له ویکي څخه په مننه راکښنته شوي دي٠

پیژند ۲ ٠

یوه څیره ونه E یواځنی بلل کیږي٠ که هر $x \in D$ په ټیک یوه $y \in W$

باندې څیره شي٠ دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ ټیک یووار په $y \in W$

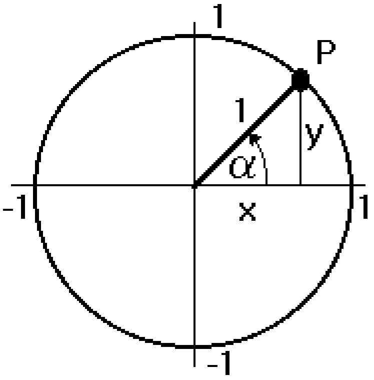
تنظیمدیرۍ یا جوړه ډیرۍ کې رامنځ ته کیږي٠ یوه یواځنی څیره ونه فنکشن

یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي٠

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنی څیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ۵ کې له الف تر ت پورې ټولې ځیروني فنکشنونه یا بلواک دي۰ د دې پر ځنډ لاندې برابرون (یوونګردۍ یاني ګردی، چې ورانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي ځیره ۰) انځور شوې ځیره ونه له R په R کې [1,1-]) D=W) فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه ځیرې لري یاني که په تنظیمجوړه کې د ځیره ونې لړي پرلپسې(لنډ:لړۍ) بدله شي، نو یوې پرځنډ ځیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : ځیره ونې F ته پرځنډ ځیرونه F^{-1} د ټولو جوړو (x,y) ډیرۍ ده له $(x,y)\in F$ سره ۰

پیژند ۳ ۰ یوه ځیره ونه یویواځنۍ بلل کیږي، که یواځنۍF او F^{-1} یوازنۍ ځیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x\in D$ او $y\in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د ځیروني نوم ځخه باید ونه ډار شو دا ځیره ونې ځیرې کووني (که ځوک یو کالي یا رخت ځیرېکوي)او ځیره کووني توپیر، ځکه سره کیدی شي، چې هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ موږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰
ډیرۍ پوهنه د شمیرپوهنې ستنه ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وځیږو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د یوه کتاب په څیر هم وړاندې شي۰

۲ . ۵ تمرینونه

۱ – د لاندې ډېرۍ یا سټ توکي د شمیرنې له لارې انځور کړۍ

الف $\{x$ لومړی عدد او$20 > x \mid x\}$ (لوستل: د ټولو عددونو x ډېرۍ یا سټ، چې x لومړنی عدد او $20 > x$ دی).

ب- $\{x|x^2+x-6=0\}$

پ- $\{x^2+x-6=0$ او $0 <x| x\}$ دا په نوکانوکې ټول له کیڼ ښي لور ته لولو

ت) $\{x \mid x$ رییلګڼ او $x^2+1=0\}$ دا ټول له ښي و کیڼي لور ته ولولی

۲ – د توکو x , y , z اړلرونوالی و ډیري M ته وڅیړی !

الف) M د لمړنیو ګڼونو ډیری

$x = 4 , y = 5 , z = 6$

ب) M د لاندې مساواتو حلډیری (اوبیډیری)

$x^3 + x^2 - 6x = 0$

$x = 0 , y = 2 , z = 3$

پ) M د ریشنلګڼونو ډیری چې په اینټروال [3 ,3-] کې پراته دي

$x = -2 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 1/3$

ت) M د رییلګڼونو ډیری چې په اینټروال [3 ,3-] کي پراته دي

$x = -4 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 3$

۳ – د لاندې ډیریو ترمنځ کومې اسریکې پرتې دي

الف) M_1 د ټول جفت ګڼونو ډیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

او M_2 د ټولو ټولګټونو ډیری

ب) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$, حلونو (اوبیو) ډیری

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ) M_1 د ټولو ګنو ډیری چي پر ۶ ویشل کیږي.

او M_2د ټولو ګنونو ډیری چي په ۳ ویشل کیږي !

او M_3د ټولو ګنو ډیری چي په ۱۲ ویشل کیږي !

۴ – د ډیری $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډیري ورکړی !

۵ – د لاندي ډیریو څخه ټولنډیری ، غوڅډیري او دواړه ټوټډیري جوړ کړی !

الف) $M_1 = \{ k,a,m,e,l \}$, $M_2 = \{m,a,u,l,t,i,e,r\}$

ب) $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$, $M_2 = \{ 3 ,6 ,9,.... \}$

پ) $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0\}$, $M_2 = \{x \mid x^2-3x+2 = 0\}$

۶ – د یوه ډیری M او د تشډیري $\emptyset$ ټولنډیری، غوڅډیری او توپیرډیری جوړ کړی !

۷ – د یوه ډیری M او خپل همدي ډیری ټولنډیری ، غوڅډیری او توپیرډیری جوړ کړی !

۸ – وي دي $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8\}$

$M_3 = \{0 , 2 ,4 ,6 \}$, $M_4 = \{ 6, 12 , 18 \}$

جوړ کړی : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$!

۹ – جوړ کړی

الف) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ) $M \setminus \emptyset$

ب) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$

$$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$$

$$M_1 \backslash M_2 = \{2,4\}, M_1 \backslash M_2 = \emptyset$$

له دې پورته څخه M_1 او M_2 وټاکئ !

۱۱ – وي دي

الف) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ب) $M_1 \subset M_2$,

وټاکئ: $M_1 \backslash M_2$!

۱۲ – وي دي M_1 , M_2 (د نيمواز) اينتروال تکي ډيري:

$$M_1 = \{-3, 3\}, M_2 = [1, 7]$$

وټاکئ

الف) $M_1 \cup M_2$ ب) $M_1 \cap M_2$ پ) $M_1 \backslash M_2$

ت) $M_2 \backslash M_1$ ټ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دي $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{\{a, b\}$

الف) د $M_1 \times M_2$ ځل جوړ کړئ

ددې لاندې ب) تر ت) برخې تمرين لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول څيرونې دي

$$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$$

$$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$$

$$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$$

$$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$$

$$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$$

په ټولو حلنونو (اوبيو) کې F_1 تر F_5 ورکړئ .

پ) په ځټ څيرونه ورکړئ

ت) د څيرونو F_1 څخه تر F_5 پورې، کوم يواځنی او کوم حتی يويواځني دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . دحقيقي اعدادو (-ګڼونو) سره د شميرلو بنسټيزې نښلونې

(ترنى، كارونى يا عمليي)

۳ . ۱ د اعدادو د سيستم جوړښت

۳ . ۱ . ۱ طبيعى اعداد يا -ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتيا درلوده۰ له دې امله يې پرمخ ودېينه کې هڅې وکړې، چې له ډيرى (سيټ) (د ليکنې په دننه کې ډيرى پوهنه هم څيړلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چې دا ډيرى تشريح کړاى شي او د انسانانو او چاپيريال(طبيعت) د پرلپسې اخ او ډب په نتيجه کې د ګڼ يا عدد وى(کلمه يا لغات) راپيداشوى، چې د عدد يا ګڼ کليمې پربنسټ د ريښتينو شيانو څرګند څومره والي (کميت)Quantitative ترلاسه کړي۰ د طبيعى اعداد و څخه په ګڼلو يا كه غواړې شميرلو کې ګټه اخستل كيږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٣ ١ ٠ ١ ٠ ١ الف د طبيعي عددونو(پيدايښتي ګنونو) جوړښت

پيژند (تعريف)٣ ٠ ١:

الف) ټول طبيعی اعداد د ډيری په څير يوه ټولګه جوړوي او د طبيعی اعدادو ډيری يا سټ په نامه ياديږي يا يې طبيعی اعداد بولو او په N او همداسې N° سره يې په نخښه کوو٠

ډير پای طبيعي اعداد شته ، ځکه چی په هر طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد هم شته دی (يعنی په هرڅومره لوي طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کيږي)٠

ب) دطبيعي ګڼونو(اعدادو) اکسيوماتيکيAxiomatic جوړښت

اکسيوم جمله ده، چی اوبيونه (حل) نه غواړي اوهمداسی منل کيږي٠ دا چی جمله ، اکسيوم څه دي په لومړی برخه يانې سم اند (منطق) کې دې وکتل شي٠

طبيعی عدد کلمه د جيوسيپې پيانو(Giuseppe Peano له ١٨٥٨ – ١٩٢ ز ٠کال) اکسيومونو پر بنسټ لاندې پيژند لري يا په لاندې توګه تعريف کيږي:

١ – د صفر ګڼ يو پيدايښتي ګڼ دی

٢ - د هرطبيعي عدد يا ګڼ m لپاره يو يوائځنی ټاکلی طبيعي عدد n شته، چې سملاسي(ترلی) د m پسی ګڼ دی، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^\wedge$

دلته $m^\wedge$ د m پسې سملاسې يا ترلی ګڼ يا عدد په ګوته کوي٠

٣ – هرطبيعي عدد زيات له زياته په يوه طبيعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دی٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ – هیڅ طبیعي عدد نه شته، چی پسی راتلونکی پیدایښي عدد یې صفر وي۰

٥ – که طبیعي عددو ډیری M صفر د توکي په څیر ولري او که له هر طبیعي عدد m سره د هغه پسی تړلی راتلونکی عدد یا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبیعي عددونه خوندي لري یا په بل ډول » ټول طبیعي اعداد په کې ځاي دي۰

یادونه: ځنې ادبیاتو کې، د پیانو سیستم کې، د صفر په ځای ۱ لیکل شوی. په دې حالت کې بیا صفر ته د طبیعي عدد یا ګڼ په څیر نه کتل کیږي. که بیا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبیعي ا عدادو ډېرئ یا –سټ یې د صفر سره بولو.

۱ . ۱ ب : د طبیعی اعدادو یا ګڼونو انځورونه او سیستمونه:

طبیعي اعداد په نخښو (دې ته په الماني کې Zifferوایي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څیرو، دی) انځوریږي. د دې لپاره چې دا لږ ځای ونیسي، نو د لویو او وړو اعدادو لپاره نخښي له کوچنیو سره یوځای کیښول شوې دي. دا چې څرنګه یوه د عدد یا ګڼ نخښه له بل توپیریږي، په لاندې ډول یې د زیاتون یا جمعي سیستم او ځای سیستم کې ښایو.

په زیاتون سیستم کې هر بنستیز ،،ځای،، یو ،، ځای ارزښت،، لري. د څیفرونو زیاتون د یو په بل کې د ورزیاتشوي بنستیز څیفر پخپله هغه عدد یا ګڼ ورکوي. بیلګه یې په رومي ګڼونو کې راوړو. دا له بنستیزو څیفرونو جوړ شوی(ترې لاندې لسیز د اعدادو سیستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څیفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پیل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

رومي عددونه:	M	D	C	L	X	V	I
عربي عددونه:	1000	500	100	50	10	5	1

طبیعي عدونه له دې امله یو د بل ترڅنګ لیکو چې کم ځای ونیسي لکه د بیلګې په توګه: CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کی، که بنسټیز کوچني ګڼنخښی لکه C , V , I د لوي ګڼنخښی و کیڼ لور ته ولیکل شي نو دا مانا لري چی دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی. د بیلګي په توګه: XC = C - X .

بیلګی: **الف:** MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768

ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځایسیستم: په ځاي سیستم کی هره بنسټیزه نخښه یو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئیز ځاي سیستم(پوزیشن سیستم (Positionssystem)): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئیزځای سیستم کی په دې ډول ده چی د یوه ورکړشوي سټی په بنسټ($g \in N$) $g \geq 2$ هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوریدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \dots + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټیزې ګڼنخښی a_i، g د $i = 0,1,2,\dots,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چی $a_k \neq 0$ وي په کار راځی یا اړتیا ورته شته.

لیکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$$

که د بدلیدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کیږي، نو بهتره به وي چی په

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ډول وليکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کې ګڼل په لسيز سيستم (ګڼځاى ارزښت) باندې کيږي، چې تل داسې نه وه، لکه په افغانستان کې چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسيز سيستم کې ګڼځاى «ارزښت» لري چې انځور شي، مګر په لرګى کې ځاى ارزښت نه لري چې کرښه چيرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون يا تعداد څخه پور څرګنديږي.

بل د ګڼلو سيستم . لکه د مخه مو چې تر پام لاندې ونيوه، د ګڼلو رومي سيستم دى چې نن هم د ارزښت وړ دى او همدارنګه د مفهوم ډك، زياتونسيستم(جمعى –) څرګنديږي.

بيا هم غواړو چې دا په لاندې ډول ځانګړى کړو:

۱ – هره لاندې نخښه I, X, C کړاى شي چې زيات ترزياته ۳ ځله(۳ وارى) په يو ګڼ کې پرله پسې يا ښنګ تر ښنګ راشي

۲ – هره، د ګڼ نخښه V, L, M ,خورا زياته يو ځل ښنګ تر ښنګ په يوه ګڼ کې راتلى شي.

۳ – که بنستيز نخښه I, X او يا ....__-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D يا M CXI تر مخ ځاى په ځاى شوې يا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کميږي .

زياتون او کمون (جمعه او منفي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – په هرګڼ انځورونې (Zahlendarstellung) کی کیدی شي چې یواځې یو بستیز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: 1098 = MXCVII مګر نه IMIC
۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمی نخښبی په کار واچول شي.

عربي ګڼونه : دا ګڼونه، چې موږ ورسره بلد یو، د لسیز سیستم ګڼونه دي، چې عربی ګڼونه بلل کیږي. دا د ګڼلو لسیز سیستم عربو د هند څخه راوړی چې په دولسمه پیړۍ کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر (۰) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر 9 پورې، چې

څیفر ورته وای (همغه عربی صفر دی) چې دلته ترې بنستیز ګڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چې ګوته مو ورته ونیوه زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، څکه چې د یو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښبی زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د ګڼونو انځورول ساده دي.

تعریف ۱ . ۱ ب : په یو «ځاي ارزښت سیستم» کی هغه ګڼ لوي دی چې زیات ځایونه ولري، که چیرې د ګڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي (مساوي وي) نو هغه ګڼ ستر دی چې له کیڼی لورې یې نخښبه لویه وي.

لسیز – یا لسګونی سیستم: لسیز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چې له انځورونی یی څرګندیږي. په لسیز سیستم کی د ګڼ انځورولو نخښبی، لکه د مخه مو چې انځور کړې، ۹،۸،۷،۶،۵،۴،۳،۲،۱،۰ دي. ۱۰ ګڼ د لسیز سیستم بنستیزه نخښبه ده. دا چې نور ګڼونه نه انځوریږي، نو ځای هلته ډک دی چې پرله پسی (ترتیب یانظم) د ۰ تر ۹ یعنی له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پسی جگ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شووگڼنخښنو ګڼون (تعداد یا شمیر) دی، څموږ په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیري (set , die Menge ګڼو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او ۹ ـ امه برخه دې وکتل شي)) غړو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: داسی نور. تولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, ...\}$$

موږ ګڼونه په کوچنیو لاتیني ټکو یا حروفو ښایو لکه a ,b,c, ... n . دا ربښتوني

(ربښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعي ګڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ (ویل کیږي چی: n د طبعي ګڼونوډیري N یا*N توکی دی(لنډ n د N یا *N څخه دی)) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (ځیفر) توپیر ته پام وي.

موږ دګڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د نخښنډیري لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نخښنو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \cdots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}\,.10^{n-2} + ..+ a_2\,.10^2 + a_1.10 + a_0\, 10^0$$
$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو ځیفرونو ډیري هم انځوریدی شي. د بیلګي په توګه په اینفورماتیك (Infrormatik) کی، چی د دوالسیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) څخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه ګڼنخښي (ځیفرونه) لیکل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسیز او دوه ئیز سیستمونو لمړني ګڼونه یو د بل ترڅنګ کښل شوي:

دوه ئیز سیستم	لسیز سیستم
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4

په ټولیزه توګه(عمومي توګه) دلته یو څیفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ یو طبیعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots\ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 ,\ a_i \in N$$

بیلګه ۱ . ۱ :

$$59 = 1.32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$$

$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

یا دونه :: څه لنډ لنډیزونه

د طبیعي اعدادو ډیرۍ یا سټ داسی په نخښنه کوو:

د پیدایښتي یا طبیعی ګڼونو ډیرۍ $N = \{ 1, 2 , 3 , \ldots \}$

دپیدایښتي ګڼونو ډیرۍ د صفر سره $N^\circ = \{ 0, 1 , 2 , \ldots \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ه کتابونو کی دا د صفر نخښنه په لاندې برخه کی راځي٠

۳ ۰ ۱ ۰ ب د طبيعي اعدادو يا ګڼونو انځورونه:

طبيعي اعداد په نخښنو انځوريږي٠ دا عددونه يا ګڼونه د ځان لپاره يو سيستم لري، چی هغه زيات يې موږ نه ځيرو٠ زموږ لپاره غوره هغهٔ عربی اعداد يا ګڼونه دی٠

يا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد يو د لسيز ځايستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل٠ دا کورونه (خوني يا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نيوی شي او بيا يې هر ځاي يو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سيستم« دی٠ لومړي کور ته يويز، دوم ته لسيز، دريم ته سليز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي٠

انځورونه يا ځيفرونه يې دي : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټيز ګڼونو نخښی دي، نور يې په کورونو يا ځايسيستم باندې روښانه کيدی شي٠

پيژند ۳ ۰ ۱ ۰ ب :

په يو» ځاي ارزښت سيستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډير ځايونه ولري٠ که چيرې د ګڼ د ځايونو يا کورونو ګڼون (تعداد) سره برابر وي٠ نو بيا هغهٔ ګڼ لوي دی، چی کينې لور يې ګڼنخښه لويه وي٠

۳ ۰ ۱ ۰ پ : طبيعي اعدادو کې د شميرنې بنسټيز قوانين

اوس په لاندې ډول د پيداينت ګڼونو، په ټوليزه توګه د رييل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري(معتبر) بنسټيز د شميرنې قوانين وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : د انډول (نظم یا ترتیب یا لوي واړه ترتیب(Anordnung) بنسټيز قوانين:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کې یا د نخښې خوله کې عدد یا ګڼ لوي دئ او د وتلی کونج یا لوي کونج >که نخښه یا داسې کونجکې یا څنډ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دئ٠ که ګڼونه یا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لویواړه اړیکې داسې لیکو، یانې که 23 > 15 ولرو نو ترې څرګندیږي، چې عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دئ .

د دوه طبيعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړيکو څخه تيک يوه اړيکه باور لري»

$a < b \quad , a = b \quad , a > b$

۲ - ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځاي توری ولیکو هم a = a به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ريفليکسيويتي Reflexivity)

۳ – له a = b => (لاس ته راځي) b = a (سيومتري، انډول، ورته وابي (Symmetry

د انعکاسي (ایینه ونیز – یا هندارونیز) برابروالی یانی که چیري دا عددونه ورایینه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابریږي٠ که انعکاسي(اینه ونیز)برابر نوم ورته کیږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به يې همغه سيومتري وبولو٠

٤ - له a = b او b = c => (لاس ته راځی) a = c(ترانزيتيوTransitivity)

ترانزیتیو ګورو، چې یو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، ځکه چې دا ګڼونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا وړل کیږي٠

۵ – له a < b او b < c => (لاس ته راځی) یا a < c یا $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

وړاندیز : که چیری دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به وي، خو له شمیرپوهنی پرته مانا باندی یې هم پوهیدنه ښه او اړیینه ده٠

ب : د زیاتون (جمع) Addition n. بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو ، دوه یا څو ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیدایښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه(عملیه) «زیاتون یت جمعه » بولو، ځکه، چی ګڼونه یو په بل زیاتیږي٠

پیژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون (جمع) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی یا

۱۰ + ۱۸ = ۲۸

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتیږي، نو له دې امله یې «زیاتېدونی» (ما تراوسه زیاتووني بللي، خو فکر کوم،چې زیاتیدوني یې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کیږي ٠ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وایه ٠ + زیاتوننخښه ده او = برابروننخښه (مساوات علامه) بولو

دجمعې یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو a او b لپاره تل یو زیاتون (جمع) a + b شته دی

۲ - یواځنوالی : له a’ = a او b’ = b څخه لاس ته راځي: a’+b’ = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAWکموتاتیو- یا بدلون قانون دی:a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوشیاتیو - سره ګډېدنې قانون. لرو
(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – یا همغږیزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $a < b$ څخه لاس ته راځي $a+c < b+c$

يادونه : په $a+b=c$ کې a او b زياتېدوني $a+b$ زياتون او c زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه : په زياتون کې لاندی زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپيلی توکی: په $N°$ کی يو توکی شته، چی که د هرپيداينښتي توکی سره په زياتون يا جمعه کی ور زيات شي همغه توکي ورکوي٠ دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپيلی توکی کړی شو ناالوريز وبولو،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولی يا د زياتون ارزښت همغه پاتيږي، همداسې ناړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې وبولی٠

پ : د کمون (تفريق)Subtraction بنستيز قوانين

پيژند:د پيداينښتي ګڼونو a او b لپاره، چې $a>b$ وي، يواځی يو x شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو تيک يواځني شته دي(موخه x دی)

نومه ونې: b کميدونی يا مفروق (تراوسه مې کمونی بللی) a ترې کمونی يا مفروق منه $a +b$ کمون او x کمون- يا تفريق ارزښت بلل کيږي يا بولو :

موږ پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونخښی ليکو، چی ساده يې ونومو:

$$20 – 10 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کی موږ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه يې ۱۰ ده، نو له دی امله يې داسی نوموو:

تر مخ يادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، ځکه، چی ترې کميږي(ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کموونی« يا کميدونی(ع۰ مفروق) دا بل لس يې «کمون ارزښت» يا د کمون لاس ته راوړنه(لنډ: لاس ته راوړنه يا کمون) (ع ۰ حاصل تفريق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

ت : د ځل (ضرب)Multiplication بنسټيز قوانين:

۱ - د دوه پيدايښتي ګڼونو a او b لپاره د پيدايښتي ګڼونو په ډيری کې تل يو ځل a.b شته دی. د a.b لپاره داسې هم ليکو ab په پورته کې a او b ځلووني (ضريبونه) او ab=x « ځل ارزښت » يا ځل(حاصل ضرب) دی۰

وايي چی ضرب وهلو ته وايي او د جمع (که جمعې) لنډه طريقه، چی۰۰۰۰وي يا د زياتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پيژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راويستلي وي۰

کهووايو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کيلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

ليکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کيلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضريبونو څخه به هم ځلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له a = a´ او b = b´ څخه لاس ته راځي a´b´ = ab (يواځيتوب)

۳ - لرو ab = ba کموتاتيو – يا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوشياتيو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ويشونې- يا ديستريبوتيو قانون Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګتيتوالي يا يوغږيزوالي قانونMonotony

ټ – د ويش بنستيز قانون Division

پيژند۳ ۰ ۲ :

که د دوه طبيعي عددونو a او b لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي يانې صفر نه وي يو طبيعي عدد x شته، چې برابرون (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ يا b/a د b او a ويش (تقسيم) بلل کيږي، چې ماتګې(کسر) يې هم بولو

١ – که $a / b = x$ يا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته يا موجود وي ، نو يواځنی شته دی(يواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او يواځې همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ويش ارزښت، b ويشونی يا ويشه وونی دی، ځکه چې په يوڅه ويشل کيږي او a پرويشونی بلل کيږي، ځکه، چې څه پر ويشل کيږي يا مقسوم، مقسوم عليه يا قاسم ، حاصل تقسيم ۰

ګورو چې له قاسم يا مقسوم او همداسی د مقسوم عليه او حاصل تقسيم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- يا پرې ويشونی ، ويشه ونی اوويش ارزښت يا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهوړ دي، خو په خواشينی به وه وايم، چې تراوسه په شميرپوهنه کی ورسره نابلد يو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وويشو، نو هر يوه ته درې کتابچې رسيږي٠ ګورو، چې ۱۲ په يو څه ويشلکيږي، نو ويشونی يې ښه نوم دی٠ دا ۱۲ په څلور ويشل کيږي پر ٠٠٠ ويشل کيږي، نو له دې امله څلور پر ويشونی بولو، درې يې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسيم وايه، له دې امله ورته ويش ارزښت وايو او دا کارونه يا عمليه خو ويش بلل شوی٠

۳ . ۱ . ۲ ټولګنونه يا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبيعي عددونوa او bکمون يا تفريق (x= b-a) ټيک او ټيک هلته يا هلته او هلته د طبيعي عددونو ډيرۍ يا سټ کې شته، چې وي : $a \le b$

د شميرپوهنې نخښنو باندې داسې ليکل کيږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \le b$$

انګريزي يې if and only if ټيک او ټيک هلته يا هلته او هلته(دا شننه يا وينه پورته د شميرپوهنې نخښې ته ده)٠

که هغې نخښې ته وګورو، نو هم لاندې ترې څرګنديږي، له ښی لور کيڼ لاس ته راځی او په څټ(برعکس) له کيڼ لور ښی لاس ته راځی٠ يا که٠٠٠ وي، نو ٠٠٠ لاس ته راځی او په څټ٠

ټولګنونه يا تام اعداد هم د انسانانو د اړتياو پر بنسټ منځ ته راغلي ، يا منځ ته راوړل شوي٠که چيرې سپين د څړ ۱۰۰ افغانۍپوروړی وي او سپين ورته اتيا افغانۍ ورکړي، نو سپين بيا هم شل افغانی پوروړی پاتيږي، دا په دی ما، چې ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ٠ ګورو، چی ۲۰ – يو پيداينتي ګڼ يا طبيعي عدد نه دی٠يا 20- = 100 – 80

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترېکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه يې طبيعي عدد نه دی۰ اوس يوه د اعدادو بلې ډيرۍ پيژند ته اړ کيږو، چی هغه د ټولګڼونوډيری ده او دا د طبيعي عددونو او د طبيعي عددونو کمي(منفي) او صفر سره يوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي(په ډيری کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګڼونو ډيری ده او داسې يی ليکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{....-3,-2,-1,0,1,2,3....\}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پيدايښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو يا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پيدايښتي ګڼونو مخنخښه په کموننخښه يا منفي نخښه باندې سنبالوويانې (کيدی شي زموږ هيوادوال د څټ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زياتی يا کمی ښايې د ګڼ کيڼ لور ته ليکل کيږي، چې دا ما مخنخښه ليکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شميرقوانين په Z کې هم باور لري

د ټولګڼونوډيری

$$Z = \{ .... -3, -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ... \}$$

د مخه مو شميرقوانين، چې د پيدايښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګڼونو لپاره هم باور لري

د کمون يا تفريق بنسټقوانين (پسی يا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګڼونو يا تام اعدادو a او b لپاره يو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چی a+x=b برابرون باوري دئ

د ويش تيوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱ . ۲ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجز یي لپاره خورا ګټور دی باور لري

الف) یو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦) ویشونی دی، که د اخر ځیفر یا کور (له اخره(موخه تری ښی لور دی) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنستیزو ځیفرونو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦ ۰۰۰ویشونی وي) په دوه ویشونی ګڼ جوړه (جفت) نومیږي او بل ډول یی ناجوړه(طاق) بلل کیږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهیدلی شو

ب) یو ګڼ په ٥ (۲٥ ، ۱۲٥ ، ٦۲٥ ، ۰۰) ویشونی دی، که د اخر(له ښي لور) بنستیز ځیفر (د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنستیز ځیفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ (۲٥، ۱۲٥ ، ٦۲٥ ۰۰۰) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وایي او موږ یې شاید لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ ولیکم، خو بیا دې هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دی ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي۰

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنستیز ه ګڼونخښو(ځیفرونو) زیاتون پوهیږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونیول شي۰

بیلګۀ : د 126 پروت زیاتون یا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت) یو ګڼ په 11 ویشونی دی که د هغه ګڼ الترنیري(نخښه بدلونکی) پروت زیاتون۰ پر 11 ویشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

الترنيري پروت زياتون، چی پروت کمون هم ورته وايی له بنستيزو ځيفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زياتون څخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ،۰۰۰ زياتون کمون پوهيږو ، بی له دې، چی ځاي ارزښت يي په پام کی ونيول شي يا په بل ډول، که د ناجوړه کور زياتون څخه د جوړه د زياتون کم کړو۰

بيلګه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ويشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چې الترنيري زياتون يانی ۱۱ = ٤ – ۱۵ يې په ۱۱ ويشونی دی۰

ټ) يو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که (د ګڼ له اخر څخه جړړشوي) د درېګوني ګڼونو زياتون پر ۳۷ وېشونی وي.

بيلګه:

37|(448+352+216+20)⇦ 37|1036 ځکه چې 37| 20216352448

ث) يو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ويشوړ دی، که د هغه (د ګڼ له لخ څخه جوړ) درېګونی الترنيري زياتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشونی وي.

بيلګې : 37604 | 7 ځکه چې 567 | 7 ⇦(604-37)|7

13| (889-293+709-96) ⇦ 13|1209 ځکه ، چې 13 | 9679293889

ج) يو ګڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر څخه جړشوی) دوهګونی الترنيري زياتون په ۱۰۱ وېشونی وي.

بيلګه:

101|(69-06+63-03+79)⇦ 101|202 ځکه چې 101|7930630669

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : که پيداښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت يې هر ګڼ وي او که پيداښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ويشي بې له پاتي ياني ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دی.

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ت) خوراغټ ګډ پرويشونی او خورا کوچنی ګډ زياتځله

يا بزرګترين قاسم مشترک و کوچکترين مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرليک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي يې په لومړنيو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنيوګڼونو ځله وونو هر يوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانيسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان(په خپل ځای کې دې وکتل شي) يا جګګڼ بې ټيټ يا کم وي . ياني

$$2^2.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ ياني ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي ياني د دواړو ګڼونو پروېشونی

دی او خورا غټ پروېشونی هم دی. ياني ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پروېشونی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ : ۵۲ د پورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دی.

داسې ګڼ , خوراغټ ګډ پروېشونی, بولو (لنډ ونه يې : غ ګ و)

هغه ګڼ، چې د دوه يا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته خورا,,

غټ ګډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ ګ و) وايو. يا

(Greatest commom divisor(g c d)بزرګترين عامل (مقسوم عليه) مشترک)

اوس بيا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله ووني، له هر څخه يو چې په جګ توان وي

ياني خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بيا يې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ ياني ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زياتځله دی (ياني ګډ په دواړو

وېشل کيږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دی. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زياتځله(څو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (ياني ګډ) زياتځله (ګډ څو واره) دی

لنډ يې : خورا کوچنی ګډ زياتځله (لنډونه يې: خ ګ ځ) يا
(Least common multiple(l.c.m.)کوچکترين مضرب مشترک يا ذوالاضعاف الاقل)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران هيوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر يا بيخي پوهوړ او ساده وي.

ورپسې داسې مخ ته ځو:

دا چې موږ په پيداينت يا طبيعي ګڼونو کې له شميرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پيژند ورکوو:

پيژند(تعريف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې تولګڼونه وي۰ وايو چې « ګڼ a ګڼ bويشي» (او يا هم a د bپرويشونې دئ او يا همa د b څو برابره (زياتځله) دئ) که يو تولګڼ u شته يا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره ليکوa|b (وايو، چې ګڼ aګڼ b ويشي ، خو اړيين يا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼ ورسره وويل شي۰

که a د bپرويشونی نه وي، نو د دې لپاره ليکوa|/b(دا نخښه /| دې د نه ويشونی لپاره ومنل شي)

بيا ليکو، چې : پيداينتي ګڼونه، چې په ۲ ويشل کيږي جوړه (جفت) ګڼونه بلل کيږي او که نه نو ناجوړه (طاق) ګڼونه بلل کيږي۰ د صفر ګڼ د پيداينتي ګڼونو په ډيرئ کې يو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې يا اوبيونې د دې ويشکلمی لپاره يو څو ساده شميرقاعدې را يوځاي کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کيږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه يا زړه پورې تولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

(۱) ± 1 او $\pm a$ ويش (دا په نامه « ساده» پرويشوني دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۲) د ۱ پرویشونی ۱ او ۱ - دي

(۳) تل باور لري، چې $0 | a$ او $a | 0$ یوائی په هغه حالت کې باور لري، چې $a = 0$ وي

(٤) له $a|b$ او $b|c$ <= $a|c$

(٥) له $a|b$ لاس ته راځي: $ac|bc$ ،که $c |= 0$ وي ، نو د دې په څېر هم باوري دي. دا په دې مانا چې، که $ac|bc$ وي، نو $a|b$ هم باور لري. د ګڼونو لیکدود له مخې، که نړیوالجال ته پورته شو داسې لیکو، که نه دا پورته بسیا کوي: $c \neq 0, a | b \Rightarrow ac | bc$

(٦) له $a|b$ او $c|d$ څخه لاس ته راځي او په څېر $ac| bd$ لنده لیکنه یې(که نړیوالجال ته پورته شوه): $a | b, c | d \Leftrightarrow ac | bd$

(۷) له $a | b$ او $b| a$ لاس ته راځي $a = \pm b$

(۸) له $a |b$ او $a|c$ څخه لاس ته راځي $a|(bx+cy)$ د ټولو ټولګڼونو x او y لپار

(۹) تیک هلته $a|b$ کله چې وي $|b| | |a|$،

(۱۰) که $a | b$ او $b = 0$ نه وي نو باوري دي $- | b| < a < |b|$

حل (اوبی) : (۱) له $a = (-a)(-1) = a1$ لاس ته راځي

(۲) له $a0 = 0$ لرو $a | 0$. که وي $a | 0$, نو یو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چې وي $a = 0u$ او له کومې چې لاس ته راځي $a = 0$.

(۳) ساده دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۴) که $a \mid b$ او $b \mid c$, نو تېولګنونه u او v د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دې لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس $a \mid c$.

(۵) که $a|b$ ، پس يو تېولګڼ u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$ سره، د کوم څخه چې لاس ته راځي $ac \mid bc$. د $c \neq 0$ لپاره دا اخرختخير په ښټ کيدی هم شي.

(۶) د $a|b$, $c|d$ او (۵) څخه لاس ته راځي چې $ac|bc$ او $bc|bd$ ، د (۴) له مخې $ac \mid bd$.

(۷) د $a \mid b$ او $b \mid a$ څخه د تېولګنونو u او v موجوديت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره. برسيره پر دې لاس ته راځي $a(uv) = a$, پس $a=0$ يا $u=v=\pm1$. په لمړي حالت کې د $a \mid b$ له امله $b = 0$, پس $a = b$. په دوم حالت کې $a = \pm b$ دی.

(۸) د تېولګنونو u , v لپاره دې $au = b$ او $av = c$ ، نو له دې $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځي، پس $a \mid (bx+cy)$ د ټولو تېولګنونو x او y لپاره.

(۹) وي دې $a|b$. له $a \mid b$ ، $a \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه او د (۴) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چې $|a| \mid |b|$. په ښټ: که $|a| \mid |b|$ باورلری، نو د $|b| \mid b$ ، $|a| \mid |b|$ ، $a \mid |a|$ او $b \mid |b|$ څخه په ورته ډول لاس ته راځي $a \mid b$.

(۱۰) دی $a \mid b$ ، پس د (۹) هم $|a| \mid |b|$. که $b \neq 0$ وي ، پس يو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چې $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

که $b|a$ د تېولګنونو a,b لپاره د $b \neq 0$ سره، نو يو ياځنی معلوم ګڼ q شته (د a او همداسی د b «کومپليمنت پرويشونی» بلل کيږي)، چې لرو $a = bq$.

په تېوليزه توګه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۳ ۰ ۲ (د ويش الګوريتم): a اوb دې ټولګټونه وي۰ د $b \neq 0$ سره ۰ نو يواځني ټاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شميرلکيدونکي ټولګټونه q اوr (چې د a پرb ويش

څخه لاس ته راځي او «ويش» په همدې ډول « پاتی بلل کيږي، شته دی،د کومو لپاره چی باور لري: $a = bq + r \ \wedge \ |0| \leq r < b$

هر يو ټولګټ کم له کمه ساده پرويشونی لري يعنی ± 1 او پخپله د دې ټولګټ زياتيز(مثبت) او کميز(منفي)۰ دې پرويشؤنو ته «سادهٔ پرويشونی» وايو۰

پيژند ۳ ۰ ب :

هر يو ټولګټ، چې يواځی او يواځي ساده پرويشونی ولري موږ ورته لومړنی ګټونه وايو او دا لومړنی يا پريم ګټونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پريم يا لومړی ګټ د پيداينتي ګټونوتوکی دی۰

هريو ټولګټ، چی لومړنی ګټ نه وي د لومړنيو ګټونو په څلونو(څله وونو)(ضربيونو) ټوټه يا تجزيه کيدی شي۰

بيلګی :

$240 = 24 \,.\, 10 = 3 \,.\, 8 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2^4 \cdot 3 \,.\, 5$ - 1

$2310 = 2 \,.\, 1155 = 2 \,.\, 3 \,.\, 385 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 77 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11$ -2

$3750 = 25 \,.\, 15 \,.\, 10 = 5 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^4$

که پورته بيلګو ته په ځير شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګټونو کی ګټ ۲ د دواړو پر ويشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګټونو پرويشونی دی يانی $2.3 = 6$ برسيره پردې ګټ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګټونه ويشي او شايد په دې ګټونو کی يو خورا غټ ګډ پرويشونی هم وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته درېواړو بيلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څير خوندي دي ياني دا ګڼونه ويش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګڼونو غ۰ګ۰پ دی

پيژند ۳ ۰ پ :

a او b دې ټولګڼونه وي او d دې يو مثبت يا زياتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2) t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a اوb خورا غټ ګډ پرويشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کيږي d لپاره داسی ليکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرويشونی(لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کيږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a او b پروېش پردي بلل کيږي ياني له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر ووېشل شي.

يادونه : په زياتو ادبياتو کې لنډونه په درېتورو کيږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرويشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

يادونه: ما د خورا غټ ګډ پرويشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونګي بل وړانديز لري، نو زه يې ضرور په پام کی په پوره خوښی نيسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبياتو کې بزرګترين قاسم مشترک او کوچکتريب مضرب مشترک وايي او ذوالاضعاف الاقل يې هم بولي۰

يادونه : که چيرېd او *d دواړه دa اوb غ ګ پ وي، نو له پورته پيژند څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی $d \mid d^*$ او $d^* \mid d$ ، نو د $d \geq 0$, d^* له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله په وښايي ، چې داسې غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ ، ۳ :
په خوښه ټولګټونو a اوb لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو ټولګټونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل(اوبي): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون (په پام کی دې وي چی د (a , b) تعریف په a او b کی سیومتریك دی) له امله اجازه لرو چی $|b| = 0$ ونیسو.
موږ اوس رکورسیف (rekursiv (دا په دې مانا چی د مخه غړي څخه وروستی یعني وریسی غړی لاس ته راوړلکیږي)
ټولګټونه......, r_{-1}, r_0, r_1, r_2 او .... q_1, q_2 په لاندې ډول تعریفوو : وي دې $r_{-1} = a$, $r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $|r_{i-1}| = 0$ لپاره ټولګټونه q_i , r_i داسې تعینوو چی $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $o \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چی له جملی (۱ . ۳) څخه ممکن کیدی شي . باید یو نه منفی ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چی لرو $|r_n| = 0$ مګر $r_{n+1} = 0$, چی بی له دې بیا یوه نه پای د طبعي ګڼونو لویدونکی یا کمیدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چی ناشونی(ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شیما ته لاربشودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

....

....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا مساوات د شکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسی) لاس ته راځي:

$$r_n \mid r_{n-1} , r_n \mid r_{n-2} , \dots r_n \mid b , r_n \mid a$$

دا په دې مانا چی r_n د a او b یو غ گ و دی. t دې د a او b یو بل غ گ و وي، نو په دې حالت کی که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسی لرو

$$t \mid r_0 , t \mid r_1 , t \mid r_2 ,\dots, t \mid r_{n-1} , t \mid r_n$$

دا په دې مانا چی $|r|$ د a او b غ گ و دی.

هر د دې گڼونو r_i د $(-1 \le i \le n)$ سره، په ځانګړي ډول r_n او ددې سره (a , b) یو د a او b لاینې کمبینیشن دی، په لاندې ډول $au + bv$، چی u او v ټولگڼونه دي.

$r_{-1} = a$ د

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د یوه i لپاره د $1 \le i \le n$ سره، که یو د a او b یو لاینې کمبینشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پیداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د یوې داسی r_i د ځای په ځای کولو له لارې هم ، چی په دې ډول د ایندکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. (پای)

یادونه : د غ گ پ د ښوونې متود ، چی پورته او په لاندې بیلگه کې راوړل شي د اویکلید الگوریتم"Euklid Algorithmus„ د یوې گڼیزې دندې یا کارونی (عملیې) شیماتیکي اوبیونې(حل) متود په نامه یادیږي، نو له دې سره x او y هم له a څخه

$d = ax + by$ اکسپلیځیت Explizit (لاتین: څرگند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي.

بیلگه:

غوښتنه $d = (2124 , 1764)$ د اویکلید الگوریتم کارونی له لارې لرو:

$$2124 = 1 . 1764 + 360$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$=> d=36$$

که پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دی

د دې لپاره ، چېd له x او y سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 – 1.324 = 360 – 1(1764 – 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) . 1764 + 5.(2124 – 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه د a او b لپاره لاندې مهمه پیژند نخښه یا نخښونه لاس ته راځي

یادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکاریږي، چې ګرانو لوستونکو ته یې بی له اوبیونې

وړاندې کړم، دا جملې په خته کې د ګڼونوتیوري دنده ده، چې په ګڼونتیوري کې بیا د ښوونې سره ښوول کیږي.

جمله۳ ۰ ۹ :

a او b دې ټولګڼونه وي. د a او b یو ګډ پرویشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دی کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a او b ټولګڼونو سره انځور کړاي شو. په ځانګړي ډول a او b هلته او هلته ویشپردي دي، که ټولګڼونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + by = 1$$

اوبیونه : د شرایطو ضرورت سم د لاسه له ۳ ېږ ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرایط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، څنونتېري پورې اړه لر او دلته یې نه ښایو.

جمله : ۳ . ۱۰

a او b دې ټولګنونه وي۰ د a او b هر ګډ پرویشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b یو ګډ پرویشونی هلته اوهلته غ ګ پ دئ چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

لیما۳ ۰ ۱۱(جمله ګۍ)(اویکلید): په خوښه ټولګنونو aاو b او c لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعریف۲ ت : $a_1 , a_2 , ... a_n$ دې ټولګنونه وي $(n \geq 1)$, او d دې یو نه منفي ټولګن وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d | a_i$ د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره

ب : له $t | a_i$ څخه د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره لاس ته راځي $t | d$.

نو d د $a_1,...., a_n$ غ ګ و بلل کیږي او د d لپاره هم داسې لیکو $(a_1 , ... , a_n)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a_n , ... , a_1 لپاره د داسی غ گ و یواختنوب په ۳ . ۵ کی کتل کیدی شي او د موجودیت لپاره یی لرو :

جمله ۳ . ۱۳ : د خوښې تولګنونو a_n , ... , a_1 لپاره ($n \geq 1$) غ گ و موجود او d د a_n , ... , a_1 خطي (لایتي) کمبینیشن دی دا په دې مانا چی

$$d = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$$

د مناسبو تولګنونو x_n , ... , x_1 لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$(a_1 , \ldots , a_n) = ((a_1 ,\ldots, a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولګنونو a_n ,...,a_1 د ($n \geq 1$) لپاره. سړی کړی شي چی د $a_1,\ldots,a_n$ غ گ و پل په پل د اویکلید الګوریتموس له لارې پیدا کړي، چی دلته یی د اوبی یا حل څخه تیرېږو.

د اوبی یا حل لپاره یی د n په لور د پوره ایندکشن څخه کار اخستل کیږي چې په ۸ -امه برخه کې څېړل شوی دی.

بیلګې:

۱ - ګنونه 240 او3750 غ ګ پ 30 = 2.3.5 لري

۲ – لرو 408 او748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس غ ګ پ دی: 17 . 2<2> = (408,748) يا دا لاندې که ن ج پورته شول

$(408,748) = 2^2.17 = 68$

۳ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ 6 = (30.66.114) دی، ځکه، چې
30 = 2.3.5

او 66 = 2.3.11 او 114 = 2.3.19 دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرويشونی نه لري دا موږ پرويشپردی بولو، ځکه، چې دي:

65 = 5.13 /\ 54 = 2.3.3.3

خورا کوچنی ګډ زياتځلی(کوچکترين مضرب مشترک)

موږ په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زياتځله (لنډ: ک ګ ز) کليمې په ځيرنه پيل کو۰ دا کلمه و غ ګ پ يوه دوه ييزه يا دوه ګونی يا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي ټوليز پيژند ورکوو

تعريف ۳ . ټ : $a_1 ,....., a_n$ دې $(n \geq 2)$ ټولګڼونه وي، او v دې يو داسی نه منفی ټولګڼ وي، د کوم لپاره چی باور لري:

الف – $a_i \mid v$ د $n , ... , ,, 1 = i$ لپاره

ب – له $a_i \mid w$ څخه د $n , ... , 1 = i$ لپاره لاس ته راځي $v \mid w$.

نو v د $a_1 , ... , a_n$ کوچنی ګډ زياتځله(لنډ : ك ګ ځ) بلل کيږي او داسې يې ليکو:

$v = [a_1 , ... , a_n]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (د دوه گڼونو لپاره)

a او b دې تولګڼونه وي او v دې یو داسې نه کمیز یا نه منفي تولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

(۱) $v|a$ او $v|b$

(۲) له $a|w$ او $b|w$ څخه لاس ته راځی $v \mid w$

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کیږي او په لاندې توګه یې لیکو

$$v = [a,b]$$

جمله :

په خوښه تولګڼونو $a,b,c,\ldots,n$ لپاره ک ګ ز شته دی او دا یواځنی دی

$$[a,b,c,\ldots,n]$$

یادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونولاس ته راوړو:

دتولګڼونو ($n \geq 3$) $a_1, \ldots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\ldots,a_n] = [[a_1,\ldots,a_{n-1}], a_n]$

او هم $|a_1a_2| = [a_1, a_2] (a_1, a_2)$

لاس ته راوړنې (داهم په همدې مانا مګر د جملی په څیر دی): د په خوښه تولګڼونو a, b, c لپاره باور لري: له $b|c$, $a|c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab|c$

د ګڼتیوري بنسټیزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژنده :

یو ټولګڼ$n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کیږي، که له ساده پرویشونv بل پرویشونی ونه لري٠

لومړي ګڼونه لاندې غوه خویونه لري.:

لیما (لکه کوچنی جمله): که p یولمړی ګڼ وي او$p \mid a_1 \dots a_n$ د ټولګڼونو $a_1, \dots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه یوه i د $1 \le i \le n$ سره.
حل (اوبی): حل یی د ایندوکشن له لارې صورت نیسی، چی ددې لپاره باید ۸ - امه برخه کتل شوي وي.
د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او لیما دې $n - 1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بیا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځي چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مختنه تیرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \dots a_{n-1}$ وي ,نو داسې دی $p \mid a_i$ د یو i لپاره چې $1 \le i \le n-1$ وي د ایتدکشن د نیونې په بنسټ.

د لومړنیو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتیوري بنسټیزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه (د ګڼونتیوري بنسټیزه جمله):

هر یو پیداینتي (طبیعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تیب پورې، په یواځني او یواځني (یویواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په یواځی یو ډول لیکل کیدی شي او بس٠ کیدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضریبونه همغه دي)) ډول د لومړنیو ګڼونو ځل په ځیر لیکل کیدی شي٠

اوبی : ښوونه د n په لور ایندکشن له لارې مخ ته بیایو (برخه ۸ دې ودې کتل شي)
د $n = 1$ لپاره باور لري، که، لکه معمول ، 1 د طبعي ګڼونو د تش(خالي) ځل په ځیر تعریف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library

شوي وي. موږ اوس ټول د n پرويشونی $t > 1$ په نظر کي نيسو. کم له کمه يو داسی ګڼ شته لکه n . که p د دې پرويشونو کوچنی پرويشونی وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بيا p يو پرويشونی q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چی q د n پرويشونی وي، نو دا به د p تعريف رد کړي. دا چی $n/p < n$ د ايندونکشن نيونې په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د څل په ځير ليکل کيدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2 \cdots p_r = p'_1p'_2 \cdots p'_s$ د n دوه ډوله د لمړيوګڼونو د څل په ځيرليکنه . له $p_1 \mid p'_1 \cdots p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 \mid p'_i$ د يو i د $1 \le i \le s$ سره . د نمرې بدلولو له لارې دې وي $p_1 \mid p'_1$. داچي بيا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2 \cdots p_r = p'_2 \cdots p'_s$ ، له کومو چی د ايدکشن له نيونی لرو $r-1 = s-1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتيب بدلون) هم $p_i = p'_i$ له $2 \le i \le r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټيزې جملی د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

> جمله : هر طبعی ګڼ n په ټيك يو ډول په لاندې فورم انځوريدلی شي
> $n = \prod_{p} p^{\nu_p}$ ($0 \le \nu_p$، $\nu_p = 0$ يواځي د پای ډيرو p لپاره).(ν نيولی شتل کيږي)
> چيرته چی p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګيدونکي لړی پرلپسې کې ځغلي.

يادونه: د عملي شميرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ يې صفر وي تيريدل کيدی شي، لکه : $n = 2^2.7$, $n = 28$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره
لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a, bc) = 1$ ، نو هم $(a, bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی یا حل : نیولی دې وي چې $(a, bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p/bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد $(a,b)=(a,c)=1$ سره تضاد دی.

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو $a \mid b$ هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \le \beta_p$

لاس ته راوړني : وي دې a او b له 0 مختلف ګڼونه، $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ همداسی $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ دي د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورتوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}, \quad [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b) = 2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړني ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګنونوباندې غ ګ و او ک ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینبه نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راوړني : وي دې a او b له 0 مختلف ګڼونه $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$، $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ همداسې دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورېدونه (تجزيه) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}, \quad [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چيرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوی په ګوته کوي.

بيلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

يادونه : د لاس ته راوړنې ۲ خخه سم د لاسه له دوو خخه زياتو تولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعماليدی شي.

يو څو په لمړيو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ايا ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اويکليد لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې يو ښکلي ځواب دی چې له هغه ريښه نيسي:

جمله: ناپاي ډير لومړني ګڼونه شته٠

حل(اوبی) : موږ جمله ناسيده يا ناسمه ښايو (۸ –امه برخه دې وکتل شي) او نيسو چې پايډير لمړی ګڼونه $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_r$ موجود دي. ګڼ $N = p_1p_2\ldots p_r+1$ له 1 لوی دی او له دې امله په يوه لمړي ګڼ p ويشونکی دی. د نيونی له مخی لرو $p = p_i$ د $1 \le i \le r$ سره . د $P|N$ او $p \mid p_1p_2\ldots p_r$ له امله لاس ته راځي $p \mid 1$.کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله بايد ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د میلاد څخه پخوا د« اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دي متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~
~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~
37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~
~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ 57 ~~58~~ 59 ~~60~~ 61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~
~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ 71 ~~72~~ 73 ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~
~~78~~ 79 ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ 83 ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ 89 ~~90~~ ~~91~~
~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ 97 ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

۳ ۰ ۱ ۰ ۳ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

(لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسې ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چې دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راځیو Ratio nهوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی۰

یادونه : که / ولرو یانې که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چېa په b ویشل کیږي۰ که ولرو≠ نود نابرابرونښنه ده۰ دا په دې مانا، چې b له 0 سره برابره نه ده۰ د دوه ګڼونود a او b ویش x = b / a د ټولګڼونو په ډیرۍ کې تل هلته شته دئ، چې a د b ټولګنیز څو ځله وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره، چې بيا هم ويش$a : b$ (دلته هم b پرa ويشل کيږي) کيدونی شي» سره له دې، چې ويش تل په ټولګڼونوکی پيژند نه لري يا تعريف نه دی يا صورت نه نيسي« بايد د ټولګڼونو ډيری ماتګڼونو(کسر) ډيری‌ته پراخه شي، چې د لومړي ځل لپاره افاده يا وينه b/a سومبوليک مانا لري، د نوو ګڼونو په څير نيسو او په ټولګڼونو يې ور زياتوو، نو هغۀ ګڼونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګڼونه وايو ۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څير ورکړ شوی دی

cb / ca هلته باور لري، چې$c \neq 0$ دټولګڼ او$b|a$ د ماتګڼ په څير ورکړ شوي وي

د راشنلګڼونو ډيری، چې په Q سره ښايو د ټولګڼونو ماتګڼو b/a چې $a \neq 0$ اوa او b د ټولګڼونو له ډيری وي، د ټولګڼونوپراخوالی دی او ټول د مخه تير بنسټيز قوانين په کې باور لري او د ويش بنسټيز قانون ته داسې پراخيدلی شي

ټ : د ويش(تقسيم) بنسټيز قانون(دوام)

۲ - د دوه راشنل ګڼونوa ، $a \neq 0$ او b لپاره يواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون يا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګڼونه هم د ورځنيو اړتياو پر بنسټ منځ ته راغلی

بيلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وويشو، نو د هر تن نيم من غن, راسيږي، چې دا نيم يې

راشنلګڼ دی، ياني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ يا $\frac{1}{2}$

دا بايد په ګوته کړو، چې راشنل ګڼونه د پای يا ناپای لسميز ګڼ په څير ليکل کيدی شي

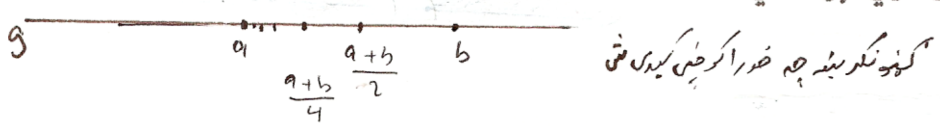
(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ٤ - رييل ګڼونه(Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په ريښتوني شته يا موجود)

د ريښتلګڼ په بنسټ هغه ورځني تيوريکی اړتياوي چې د شمير عمليو بې بنديزه (نامحدود) په کار اچولو يا استعمال ته موجود وي حل يا اوبې شوې او همدارنګه عملي اړتياوي چې اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ريښتلګڼ له لارې کيدی شي چې د کرښې اوږدوالی ټيك ورکړ شي يا په همدې مانا : په هرڅومره وړوکی ګڼونکرښه انتروال کی هم ناپای زيات ګڼونه، چې په ټکو يا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بيا په يوه کرښه کی هر ټکی د ريښتلګڼ په ذريعه نه شي ښودل کيدی يا په بل عبارت د کرښې هر ټکی د ريښتلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چې د «ايريښتلګڼونو»په نامه ياديږي، کيدی شي د يوه پريوديکي(periodische) (د ګڼونو کړی نه شليږي) ناپای لسيزمات له لارې وښوول شي.
د بيلګي په توګه د مربع د نيمي(قطر) x اندازه چې د مربع يو اړخ ۱ وي نه شي کيدی چې په ريښتلګڼ وښوول شي. د پيتاګوراس د جملې په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$, پس $x = \sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریبلګڼ کلیمه یوه ژوره کلیمه ده چې د پوهیدلو لپاره یې «پولی» (لیمس lim) ته اړتیا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کې به تر ځیړنی لاندې ونیول شي.

ډیر اینتروالبندیدل چې په همغه یوه ټکی راځرخي مساوي(ورته) ارزښته (Äquivalent لاتین :مساوي ارزښته) لیدل کیږي

ریبلګڼډیری R چې په ریشنلګڼډیري د ایریشنلګڼډیري ورزیاتول دي چې له ۲ . ۱ . ۱ تر ۲ . ۱ . ۳ برخی پورې تول بستزقوانین په کی باور لري. د ریبلګڼ له لارې دکرښی تول ټکي په بر کی نیول کیدی شي. په دې ډول ریبلګڼونه تولی د شمیرلو او اندازه کولو اړتیاوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د ریبلګڼ حل یا اوبی نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتیا پیښیږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کی به تر ځیړنی لاندې ونیول شي.

یا دا لاندې په لنډه توګه:

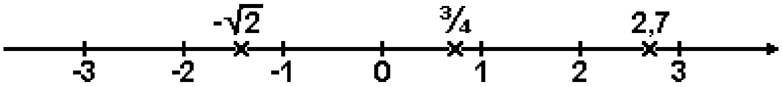
موړ ګڼونه یا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګڼونه نه دي یانی که موږ د ۲ ګڼ ریښه(جذر) ونیسو، نو داسی یو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسمیزه توګه پاي ته نه شي رسیدی یانی پریودیکی (تل بیرته راګرځیدونی یا پسی نور هم پراخیدونی) دي۰ داسی ګڼونو ته ایراشنل ګڼونه وایو۰

تل بیرته راګرځیدنیز (periodi(cal تل بیرته راګرځیدوني ,Period د ګڼونو ځنځیر نه شلیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ايراشنل – يا نانسبي عددونه ياګڼونهIrational numbers

د راشنل او ايراشنل ګڼونوټولنى ته رييل ګڼونه وايو(دا چې ټولنه څه شى دى، په ډيرى پوهنه يا سيټتيوري کې به ولوستل شي) .۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پيداينتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي يانې ريل ګڼونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابيلشوى(له نورو -) د شمير قواعد

په دې برخه کې د رييل ګڼونو لپاره رابيل شوي قوانين څيرو، چې د مخه تيرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټکى دا لاندې دي:

- په رييلګنونو کى څلور بنسټيز شميرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادى (ويينى) سره شميرنه (نوکان ايښوول)۰ له زياتون ګډ فاکتورونه يا ځلووني له نوکانو راوستل، د بينوميال فرمولونه۰

- پر صفر ويشنه د ناشونوالى په پام کى ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شميرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول يا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندي (مخرج المشترک) جوړول۰ د داسى ماتلاندى(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نوموني: کسر ته مات وايو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وايو، چې سملاسي يې په مانا هم پوهيږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)

د زیاتون او کمون بنستیزو قوانینو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a\ ,\ .\quad a - b = a + (-b),$$

$$(a + b + c \ldots - c - d - \ldots) + (e + f + \ldots - g - h - \ldots) = a + b + \ldots - c - d - \ldots + e + f + \ldots - g - h - \ldots$$

دا دا مانا لري، چی که چیرې د نوکانو دباندې زیاتوننخښه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ویستلو کې ګڼ خپله مخنخښه نه بدلوي۰ که د نوکانو د باندی کموننخښه (منفي نخښه) وي، نو د ګڼونو له نوکانو ایستلو په حال کی د نوکانو دننه نخښی بدلیږي۰ یانی کموننخښه زیاتوننخښه او زیاتوننخښه کموننخښه کیږي۰ بیلګه یې لاندې ګورو

$$(a + b + \ldots - c - d - \ldots) - (e + f + \ldots - g - h - ..) = a + b + \ldots - c - d - \ldots.. - e - f - \ldots\ldots + g + h + \ldots$$

په همدې ترتیب کیدی شي نوکان هم ځاي پرځای شي۰

دلته باید مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چی په ګڼکرښه د صفر څخه د یوه رییلګڼ واټن په ګوته کوي،

د کوم لپاره چی لیکو :

مطلق عدد یا - ګڼ یا بي اړیکو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زیاتیزه او کمیزه نخښه یا مثبت او منفي نه لیکل کیږي یا یون(واحد) هم ورسره نه وي، دا ټیک او ټیک یو ګڼ ښایج او بس۰

$$|a| = a\ ;\ a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|a| = 0 \;;\; a = 0$

$|a| = -a \;;\; < 0$

یانې که a زیاتیزه یا مثبت وي،نو a پخپله لیکواو که a کمیزه یا منفي وي، نو a- لیکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 لیکو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مختخښی قوانین باور لري:

$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , (-a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab$

که چیرته ډیر نوکبندونه راګرځیدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی

بیلګه:

$$(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac - ad + bc - bd)(e-f-g)$$

$$= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-bdf+bdg)$$

د ځانګړي حالت په توګه د بینوم پیژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې ټيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيږي :

بيلګه ۱ . ۳ :

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2 .$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2 .$$

$$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2\ v)(4u - 2\ v)$$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ويش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د a = 0 لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ويش ناشونی دئ

په ويش کی نوکبندول د زياتون، کمون او ځل په څير ساده نه کيږي۰ په ويش کی د زياتون په ډول ليکل شوی هر توکی په ماتلاندې ويشل کيږي:

بيلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\ abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

يا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې لاس ته راوړنې(نتیجې) ته سړی د ګڼو ځلوونو یا فاکتورونو یا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسیدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(a - 2b + 4c)$$

له دې ځایه کیدی شي، چې د بولینوم وېش بیل شي

بیلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \text{ Rest } 5c \text{ باقي } \Leftrightarrow$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \text{ لپاره } ab \neq 0,$$

د یوه زیاتو یا چمعي وېش په یوه چمعه، کیدی شي د بینوم جکلې له لارې صورت ونیسي

بیلګه ۳ . ۶ : $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b$ لپاره $a \neq -b.$

بیلګه ۳ . ۷ : $(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$ لپاره $a \neq -b.$

بیلګه ۳ . ۸ : $\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax$ لپاره $ax \neq by,$

دلته هم وېش د پاتې یا باقي سره شونی دی.

بیلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$:

باقي یا پاتې b^2

له دې لاس ته راځی او په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b} \quad a\neq b,$$

بیلګه ۱ . ۱۰

$(16u^2-v^2):(4u+\sqrt{2}v)=4u-\sqrt{2}v$ Rest v^2

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}v}$$

$$=4u-\sqrt{2}v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}v}$$

د $4u \neq -\sqrt{2}v$ لپاره

فورمال ور د دوه پولینومونو ویش دی (برخه ۱۲ دې انډول(پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0} = P_n(x):Q_m(x),$$

که د ماتباندې پولینوم درجه د ماتلاندې پولینوم درجې لوي یا مساوي وي$(n \geq m)$.

موږ نیسوچی: $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ او $Q_m(x) \neq 0$.

د دواړو ویشو« ټوټه ویشو» (پارځیالویش(Partialdivision)) دا دې چی دا

د $Q_n(x):P_n(x)$ ویش په لاندې ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\text{Polynom 1}+\frac{\text{Polynom 2}}{Q_m(x)} ,$$

چیرته چی د پولینوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجی څخه کوچنی ده.

دې هدف ته په لاندې ډول رسیږو

۱ – سړی یواځی د جګ نظم غړي $a_nx^n : b_mx^m$ ویشي او له دې سره یوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}:Q_m(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+F(x) \qquad *$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – سړی (*) په ماتلاندې پولینوم $Q_m(x)$ ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چی د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل پولینوم $P_n(x)$ له درجی n څخه کم له کمه په یو کوچنی وي . د ګنونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چی $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – تړته ویش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعمالیږي، د لاندنی نتیجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چیرته چي د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجي کوچنی وي.

د تړته ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلګه ۱۱ . لمړی دې د تړته ویش ۱ او ۲ پلونه (قدمونه، ګدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلګه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$P_3(x) \quad : Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2(3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 \quad +F(x)$ $6x^3 - 4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) -(a_3 / b_1)\, x^2Q(x) =$	$9x^2 - 3x + 1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$

بیلګه۱۳ . ۱۲ : د توپه ویش بیلګه ۱ . ۱۱د (x) F غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو چی د لیکنی شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x):Q_1(x) = (9x^2-3x+1):(3x-2) = 3x+G(x)$$

$$3x.Q_1(x) \qquad = \quad (9x^2-6x)$$

یاباقي $\qquad$ پاتي $= 3x+1$

$$G(x)= (3x+1):(3x-2)$$

له دې لاندې نتیجه لاس ته راځي :

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)=2x^2+3x + G(x)$$

$$G(x) \;= (3x+1):(ex-2) = \;11 +H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x-2$$

پاتی $=$ $\qquad$ $3 =$ یاباقي

$$H(x) = \;3 : (3x-2)$$

پس باور لري

$$(6x^3+5x^2 - 3x+1) : (3x-2) = 2x^2+ 3x+1 + 3/(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تول توته ويش كيدى شي په لاندي ډول مخ ته يووړ شي .

(1) (4) (7) (۱۰)

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$$

(2) $6x^3-4x^2$

(3) $-9x^2-3x+1$

(5) $9x^2-6x$

(6) $3x+1$

(8) $3x-2$

(9) 3

دلته (i) د پرلپسى پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

(1) (4) (7) (10)

$$(18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1) : (3x^2 + x - 1) = 6x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x^2 + x - 1}$$

(2) $18x^4 + 6x^3 - 6x^2$

(3) $9x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

(5) $9x^3 + 3x^2 - 3x$

(6) $3x^2 + x + 1$

(8) $3x^2 + x - 1$

(9) 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۲ . ٤ ماتشمیرنه (کسرشمیرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د تولګڼونو m,n څخه د ریشنلګڼونو انځورونو لپاره تعریف شوې. کیدی شي، چې دا کلمهa/b ته، چې a او b ریيل ګڼونه دي، وغزول شي.

باید په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بیلګي په توګه:

ویش(a/(b-c تیک هلته مفهوم لري، چې b≠c وي. ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښایي

لکه a : b او یا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم باید b |=0 وي.

په اخر کې باید په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ کیدی شي او هم دواړه. دا باید دلته هم په پام کې وي، چې هیڅ یو ماتلاندې ګڼ باید صفر نه وي یانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور یو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کیدی دا موږ د ماتو مات (کسرالکسر) بولو.

بیلګې:

a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 ,

(a/b) : c = (a/b) / c b|=0, c|= 0

(a/b): (c/d) = (a/b) / (c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0

یا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c}, b\neq 0, c\neq 0, ..., \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$$

په ځو واره ماتګڼ کې باید اصلي ماتکرښه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټیکوالی مخه نیول شوي وي۰ په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}\neq\frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هریو ماتګڼ b|=0, a / b په یوه ګڼ c |= 0 پراخیدی او همداسې لنډیدی شي

یانې ماتلاندې او ماتباندې په یوه ګڼ c ځلیدی یا ویشل کیدی شي او دا کړنلار په اصلي

ګڼ کې تغیر نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c}, b\neq 0, c\neq 0$$

د ماتګڼ لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګڼ ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}, \frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c}; a\neq 0, y\neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یوائځنی فکتور یا ځلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګې په توګه لاندې ماتګڼ

(c) ketabton.com: The Digital Library

(a+c):b+c) چې b ≠ - c وي نه شي لنډیدی دا (a+c) : (b+c) = a:b

باور لري،چې b |= 0, c = 0 \/ -c |= a, a = b

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اړیین دی، چې ډیر ماتګنونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، څکه چې یواځې هغهٔ مات یو په بل زیاتیدی یا یو له بل کمیدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه : $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$

که چیري پرڅنب یا برعکس ماتګنونه a / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زیاتوو او یا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې باید راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو څخه دی۰ د بیلګي په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل باید ماتګنونو ګڼلو کې ماتلاندې سره حُل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بیلګه باندې ښایو

بیلګه: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي، چې اصلي ماتلاندي)ا۰م۰ل (وټاکل شي

ا ۰ م ۰ ل ۰ 97200 =2.3.5.6.15.36 =

کیدی شي، چی ا۰م۰ل۰ د لومړنیو ګڼونو حٔل په څیر هم ولیکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3۰. 3.۰2۰36 = 2

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړکې یا لوړ جګګې یا لوړ طاقت لومړي حٔلووني رانيول کیږي۰ چې ګڼل خورا ساده کوي۰

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$$

$$\frac{90 - 60 + 36 - 30 + 12 - 5}{180} = \frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار څنګه د ماتو په ټولیزه افاده استعمالیدی شي لاندې بیلګه یی ښایي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ . ۱۵ په لاندې بيلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې يواځې د لاندې لپاره موخه ور دی $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره ياني

$$a.b(ab)(a^2b).(ab^2) = a^3.b^3$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

$$a = a$$

$$b = b$$

$$ab = a \quad b$$

$$a^2 . b = a^2 \quad b$$

$$ab^2 = a \quad b^2$$

دا ا۰م۰ل۰ په لاندې توګه دی $= a^2 \quad b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱٦ : د وييني يا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a\neq 0, a\neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

a^2 - 1 = (a-1)(a+1)

a^2-4 = (a-2) (a+2)

$$(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)$$

دا پورته لاس ته راوړنه ا۰م۰ل۰- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته ځخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مات ماتباندې صفر دېپه دې ډول په پورته پيل کې ورکړ شوې افاده يا وينه د صفر پيچلې ليکلو بيلګه ده او بس۰

د ځل او ويش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, b\neq \cap d \neq \Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}; b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0 \Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بيلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بيلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, \forall\, |a|\neq|b|$$

یادونه: په پورته لیکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم باید راغلي وی. دلته اړیین د ګڼونو شمیرقوانین دي او د ګڼونو پیژندل. د ګڼونو اړیکې د خوندیونې له لارې

$N \subset Z \subset Q \subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمیر قوانین، چې هغه زیاتون ، کمون ، ځل ، ویش دی او د ویش په بنسټ ماتشمیرنه. دا باید په همغه ساده ډول زده کړای شي.

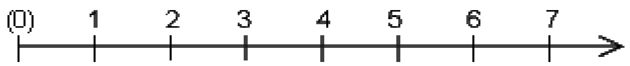
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړیین د ګڼونو شمیرنقوانین په لاندې توګه رالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهیدنه بسیا کوي.

ګڼونډیری (لنډه ټولګه)

پیدایښتي – یا طبیعي ګڼونډیری

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پیدایښتي ګڼونو انځورونه

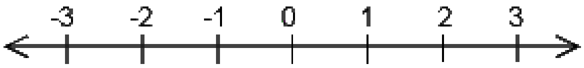


(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګڼونو ډيری

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

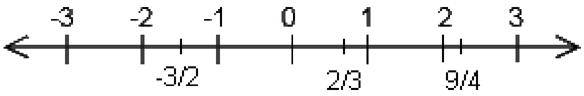
د ټولګنونو ډيرئ انځورونه په يوه کرښه



د راشنلګڼونو ډيرئ

$$Q=\{\frac{p}{q} | p,q | Z \wedge q \neq 0\}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسميز يا پريوديکی ګڼ په څير ليکل کيدئ شي

د ماتو سره شميرنه

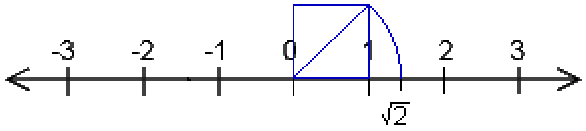
د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زيات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بيا يې هم ترمنځ نور ګڼونه يا ځايونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دی او دې ګڼونو ته مو ايراشنل ګڼونه وويل ۰ لکه چې يو راشنلګڼ نه دئ

راشنل او ايراشنلګڼونه رييل ګڼونه جوړوي

د رييل ګڼونوډيرئ يا حقيقي اعدادو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریيلګڼونو ډیری د ګڼونکرښی ټولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکرښه کې روښانه ده



په ریيلګڼونوکې بی له بنديزونو شميرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې بايد صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونلپاره باور لري

شميرډولونه لومړی پوړی

:Additionزیاتون یا جمعه

زیاتوونی +زیاتونی = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون $a + b = b + a$

د زیاتون اسوشیاتیو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زیاتون ته د یوه بی اغیزه یا ناپیلی توکی شتون$a + 0 = a$

مخامخ – یا په ښټ ګن یا برعکس عدد$a + (-a) = 0$

کمون:Subtraktion

د زیاتون په ښټ کارونه یا عملیه ۰ ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوړۍ

ضرب یا ځل: فاکتور (ځله وونی ضریب) ۰ فاکتور(ځله وونی) ځل
د زیاتون تکرار، بیلګه. $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$

د ضرب یا ځل کموتایتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب یا ځل اسوشیاتیو قانون$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

دستریبوتیو قانون $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلي توکي شتون(بي اغیزه توکی يې که وبولو هم بده به نه وي)

$a \cdot 1 = a$

په څټ ارزښت یا برعکس قیمت$a \cdot (1/a) = 1$

یو ضرب تیک هلته صفر دئ، چې د صرب یو ضریب صفر وي $a \cdot 0 = 0$

ویش:
ویشونی : پرویشونی = ویش (لوستل يې له ښي وکيڼ لورته)

ویش د ضرب یا ځل په څټ کارونه ده) $a : b = c$

$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = b : a$

د بېلګې په توګه z.B.: $4 \cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ تمرينونه

۱ – د اعدادو يا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ يا سټ کې د عدد a او عدد bلپاره د شميرلو څلور قاعدې يا لارې باور لري؟

يادونه: دلته دې ترې کمونی يا مفروق منه او وېشونش يا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونی يا مفروق او پروېشونی يا مقسوم عليه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او يو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو يا ګڼونو او څخه تفرسق، ضر ب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتيجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ يادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ييز سيستم کې لاندې ګڼونه يا اعداد انځور کړئ!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – لاندې رښتوني یا راشنل اعداد د کوټیو کې اچوني یا کوټی وني له لارې په نږدې ۵ ځایونږ ټیک پیدا کړی.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زیاتیزو او ځلیزو (د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړی

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بینوم فرولونه

۳ . ۱ – د بینوم فرمولونه وکاروی یا استعمال کړی او د شونتیا سره سم یې ساده کړی

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې وییني یا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکمیلوني له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضريبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې وییني یا افادې په ضريبونو ټوټه کړئ او تر شوونتیا پورې یې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$
d) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$
c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان (n=1,2,3,...) له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
c) $(1 - 2n)^3$
d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ا رزښتونه له شمیره وباسئ، کوم چې ...,a,b يې نه شي نیولی یا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$
c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$
c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشميرنه يا کسرشميرنه

۶ . ۱ – لاندې کسرونه صورت او م خرج يعني د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنيو ضريبونو يا ځلوونو له لارې لنډ کړئ

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$
b) $\frac{2\,730}{5\,005}$
c) $\frac{20\,520}{2\,280}$
d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا کوچنی ګډ زاتځلی (ذ الاضعافالاقل) پيدا کړئ

په لاندې کې und د او په معنا دی

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نوميزو يا برابرمخرج کسرونو شميرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7} - \frac{1-6}{7} + 2\frac{1}{7} - 7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5} - \frac{4-5}{5} - 5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26} + \frac{5-3}{13} + 3\frac{33}{39} - 0 \cdot \frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a} - \frac{1-a}{a}$
c) $\frac{(a-b)^2}{ab} - \frac{1-2ab}{ab} - \frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنوميزو كسرونو جمعه او تفريق، په مخرج يا ماتلاندې كې ضريبونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نوميزو ماتونو(كسرونو) جمعه او تفريق(زياتون او كمون)، جمعه مخرج يا ماتلاندې كې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره يو په بل پسې وركړشوي ارزښت ځاى په ځاى كړئ او دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(كسرونه) سره يوځاى كړئ! بيا په ټوليزه توګه د وركړ شوو كسرونو لاس ته راوړنې وركړئ او هغه ارزښتونه لرې كړي، چې د a د اخستلو يا نيولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$	د a=1,2,3 سره
b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$	د a=3,4,5 سره
c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$	د a=2,3,4 سره
d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$	د a=2,3,4 سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$

c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو یا کسرونو ضربونه(یا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وینو یا افادو برعکس یا په څټ ارزښتونه پیدا کړئ.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.7.4. a) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}}$

b) $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1}{\dfrac{a^2+b}{b}-\dfrac{a+b^2}{a}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{a+1}{a}}{\dfrac{a-1}{a}-\dfrac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)-\dfrac{1}{ab}}{\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}+\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}+\dfrac{1}{2b}}+\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}-\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}-\dfrac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\dfrac{1}{1-ab}}{1-\dfrac{1}{1-ab}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a-b}}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه يا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ (که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.8.2. a) $\frac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\frac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\frac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\frac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\frac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\frac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\frac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\frac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0{,}4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\frac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\frac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\frac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\frac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\frac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\frac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\frac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\frac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\frac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\frac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (1-) سره شمیرنه

الف- ورکړشوی دې وي/ (a(b-c/ c ځای په ځای کړئ او داسې لاس a=-1 . ترې راغلي کسر یا مات لپاره مختلف لیکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج (ماتباندې او ماتلاندې) کې (1-) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر یا مات $(b^2 - a^2)$ /(-a-b) د (1-)سره پراخ کړئ او ساده یې کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج یا ماتلاندې کې (1-) له نوکانو راباسئ او دا وینه یا افاده ساده کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ۰ توان (پوتنخ) او ريښه (جذر) Potenz , Wurzel (Root)

په دې برخه کې د توان او جذر يا ريښې قوانين ترڅېړنې لاندې نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې يا استعمال چټکتيا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو۰ دا مشوره کيږي، چې ريښه دې په پوتنخ واړول شي، چې د اکسپوننت - يا جګعدد يې نسبي يا راشنل وي۰ د دې فورمال ټيک کره د ګڼلو قوانينو په څنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو) هم ژور فکر وشي۰

د ريښې پيژند د خلاف يا پر څټ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند (ريښه ويستونى يعنى هغه ګڼ، چې ريښه يى وېستلکيږي يا نيول کيږي،د ريښى نخښې لاندى ګڼ او هم د ريښى ارزښت نامنفي اعداد (ناکميز ګڼونه) وي۰ د توان زړه پورې ريل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دى يا باوري دى، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نيونه يا فرضيه شوي وي۰

٤ ۰ ۱ توان (پوتنخPotenz) په ټولګڼيز يا تام عدد په جګ يل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ٤ ۰ ۱:

د يوه په خوښه ريل ګڼ توان لاندې موږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پوهيږو۰ د دې لپاره ليکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ n = 1,2,3,…

اکسپوننت(جګګڼ، لنډ: جګ) او b د پوتنځ يا توان ارزښت بلل کيږي۰

د بيلګي په توګه

$$a = a , a^2 = a . a , \quad a^3 = a.a.a$$

(4,1) د n = 0 لپاره کره ټاکل کيږي $a^\circ = 1$ د $a \neq 0$ سره

د پيژند يا تعريف پر بنسټ (اود څه بنديزونو په څلورديوالى کې، چې لاندې شوي) ښوول کيدى شي، چې د خوښى يا زړه پورې ريیلګڼونو $a,b \in R$ او $m,n \in N^*$ نامنفى ټولګڼونو اکسپوننت يا جګګڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;..(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;................(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};..(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;............(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};..(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته د توان اړيکې د ټولګنيز مثبت جګڼ يا اکسپوننت لپاره باور لري، کيدئ شي، چې ټولګڼونو ته وغزول شي، که چيرې پيژند ورکړو يا تعريف کړو:

$$\frac{1}{a^n}=a^{-n}; n=1,2,3,....,..a\neq 0,..................(4,7)$$

دا پورته د توان قوانين د ټولګنيز جګ(اکسپوننت) لپاره بې بنديزونو يواځې د نه ورکيدونکو رييل بنسټونو ياني د $a \neq 0$ او $b \neq 0$ لپاره باور ي دي . په (4,5) کې بيا بنديز $n \geq m$ اړيين نه دئ.

د توان قوانين کيدئ شي په بڼه بدلونکو افادو يا وييانو وکارول- يا استعمال شي.

بيلګه 4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2}=(4abx^{-2}y)^{-2}=4^{-2}a^6x^4y^{-2}=\frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy\neq 0$$

بيلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3}=\frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3}=\frac{3a^2}{4b}, a>0, b\neq 0$$

بيلګه 4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}}+\frac{a^6-a^5+2a^3-1}{a^{m+1}}-\frac{2a^2+1}{a^{m-2}}=$$

$$=\frac{a^5(3-a)+a^6-a^5+2a^3-1-a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}}=$$

$$=\frac{3a^5-a^6-a^5+2a^3-1-2a^5-a^3}{a^{m+1}}=\frac{a^3-1}{a^{m+1}}, a\neq 0, m\in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوتنځ زياتون او کمون کې بايد پام وي، چې يوازې د برابر پوتنځ ګڼونه يو له بل سره زياتيدی او يو له بل کميدی شي۰

بيلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بيلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بيا ګوته نيسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخښې کې دې توپير وشي۰ پوتنځ له مثبت - يا زياتونمخنخښې سره تل مثبت يا زياتيز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترځ کې، چې پوتنځ د منفي - يا کميز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زياتيز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - يا کمون ارزښت لري۰

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ..., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ۰ ٢ – ريښه او توان له ريشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پيژند ٤ ۰ ٢

د يوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ريښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره لیکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, ...(4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0...............................(4,9)$$

دلته a رادیکاند Radikand ، یا ګڼ، چې رېښه (جذر) یې نیولکیږي(مورږ دا

رېښه نیووني یا رېښه ویستونی بولو) او n درېښې جګ(اکسپوننت) او b د

رېښې ارزښت یا رېښه ارزښت بلل کیږي۰

باید پردې تینګار وشي، چې رېښه یوائې د نامنفی رادیکاند یا رېښه ویستوني (رېښه نیووني) $a \geq 0$ راوستل کیږي یا نیول کیږي او پخپله په لاندې توګه یو نامنفي - یا ناکمیز ارزښت لري یانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کونې لپاره لاندې یادونې شوي دي:

۱ – د جوړه ... ,n = 2,4,6 لپاره د a<0 سره رېښه b په ریېلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي یا ناکمیز یانې زیاتیز ګڼ دی۰

۲ – د جوړه او مثبت - یا زیاتیز برابرون $b^n = a$

په ختّه په رېښتوني دوه ریېل اوبیوني یاحلونه لري د بیلګي په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ياني $n = 2$ او $a = 4$ اوبيوني

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي٠ د دې لپاره، چې د راديکاند د شميرلو کاروني يواځنۍ سرته ورسولی شو، بايد د يوې اوبيوني لپاره پريکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . $n= 1 , 3 , 5$ او $a \geq 0$ لپاره

$$b^n = a$$

تل يواځني زياتيز(مثبت) اوبی يا حل لري ياني $b \geq 0$

٤ – د ناجوړه n او کيمز يا منفي a لپاره $b^n = a$

تل يواځنې يو منفی اوبی يا حل لري٠ ياني $b < 0$ د بيلګي په توګه دا $b^3 = -8$ يواځې

اوبی $b = -2$ لري.

په هر صورت بايد د جوړه... $n=2,4,6$ ګڼونو لپاره $a \geq 0, b \geq 0$ وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به يا ريښه شته نه وي او يا به يواځنی اوبی نه لري، ياني څو اوبی به شته وي

د ناجوړه يا طاقو $n = 1,3,5,\ldots$ لپاره کيدی شي، چې له دواړو غوښتنو تير شو٠ دلته به يواځې تاوان يا زيان دا وي، چې د ټولو ممکن حالتونو لپاره به بيل بيل د ريښې د قوانينو غوره کولو ته اړ کيږو٠ له بلې خوا به ريښی د قوانينو ترتيبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ايښول شوي بنديزونه nقوانينو لپاره ستونځمن وي٠ له دې امله د ناجوړه ريښو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننت غوره کوو او د يواځني يو اوبی لپاره 2- د 8- = b^3 او نه $-2=\sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2=-\sqrt[3]{8}$ ليکو۰ په دې اړوند او د يادو شوو نيونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2}=a,\ldots\ldots\ldots\ldots(4,10)$$

څلوری ريښه يا مربع ريښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقيقي اعدادو يا - ګڼونو a لپاره تعريف شوي۰ د نامثبت يا نازياتيز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بيا د (4,10) اوبی منفي يا متيز وي، کوم، چې نيونه $b \geq 0$ نفې کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د (10 , 4) ښول شويو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي يا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2, \sqrt{4}=\sqrt{(-2)^2}=-2$$

يانې د 2- = 2 سره۰

د (10 , 4) ټيک داسې ليکل کيدی شي:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\{a, a\geq 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,11)$$

$$=\{-a \quad , a\leq 0 \qquad\qquad (4,11)$$

د ريښې يا جذر له پيژند (9 , 4) , (8 , 4) سره سم کيدی شي، چې لاندې باوري د ريښې قوانين وليکل شي د....1,2,3 = n او $a , b \geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,12)$$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}, b>0\ldots\ldots(4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a}=\sqrt[n.m]{a^{n+m}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته د (4,15),(414),(413,).(4.12) ترمنځ بايد لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهيدنه نه رامخ ته کوي ۰ دلته پيژندل کيږي، چې د ريښې قوانين د پوتنځقوانينو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي۰ په رښتيا چې دا د پوتنځقوانينو لاس ته راتلى شي، که پوتنځ د ريشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعريف شي يا يې لاندې پيژند ورکړ شي۰

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m ....(4,16)$$

د... $a \geq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1 , 2 , 3\ 4 \ldots$ لپاره

د بيلګې په توګه (١٦ ، ٤) په لاندې ډول ليکل کيږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړيکې (4,16) کيدی شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چيرته، چې (4,17) په ټينګه - يا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0....................(4,17)$$

بې له بنديزونو د خوښې جګو n اوm لپاره د پوتنځقوانين (4, 2) تر (4,6) باور لري، خو يوائې هلته، چې نه ورکيدونو بنسټونو يانې $a>0, b>0$ نيونه شوې وي۰

د ريښې شميرلو لپاره بايد اساساً د(4,16) له مخې ريشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتيا لرو، چې د پوتنځ او ريښې سره شميرلو د قوانينو استعمال نيونې تل و ازمايلى شو۰ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفيتوب کمونوالى يا نامنفيوالى يا مثبتتوب(مثبتوالى يا زياتونوالى) پريږدو، چې لاندې ناسم پاي کيدډول وښايو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{-a}=(-a)^{1/2}=(-a)^{2/4}=\sqrt[4]{(-a)^2}=\sqrt[4]{a^2}=a^{2/4}=a^{1/2}=\sqrt{a}$$

برابرون یوازې د دې ساده حالت0 = a لپاره شته دی یا باور لري، د 0=|a یا $a \neq 0$ لپاره a-او یا a منفي دي دا په دې مانا، چې a یاa- پیژند نه لري یا تعریف نه دی۰

د توان قوانین د توان سره شمیرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بیلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بیلګو کې دا تراوسه د شمیر بنسټیز قوانین ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کیدی شي۰ شمیرنه یې لږ وخت نیسي، که غواړئ پخپله یې یو ځل وشمیرئ۰

بیلګه ٤ ۰ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}=\{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=(125)^{\frac{1}{6}}=(5^3)^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}=2,2361$$

بیلګه ٤ ۰ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}}:\frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}}=\{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\}:\{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\}=$$

$$=a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})}=a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}}=\frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بیلګه ٤ ۰ ٨

$$8.\sqrt[3]{343}-4.\sqrt[3]{125}+5\sqrt[3]{8}-5\sqrt[3]{729}$$

$$=8.\sqrt[3]{7^3}-4\sqrt[3]{5^3}+5.\sqrt[3]{2^3}-5.\sqrt[3]{3^6}=8.7-4.5+5.2-5.9=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ٤ ۰ ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شمیرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې ریښې له منځه یوسو (د ماتلاندې ریشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې یوه ریښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور یا ځلوونې په څیر رامنځ ته شي، نو دا د وظیفې لپاره یوازې اړیین ده چې $m < n$ ($m , n > 0$) او $m, n \in Z$ په پام کې راوړو

کارونه یا عملیه په لاندې ډول اجرا کیږي($N^*|= 0$, $a > 0$)

$$Z/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},..........(4,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ٤ ٠ ١١

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورى- يا مربع ريښې زياتون يا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بينوم فرمول استعمال سره له $a>0$ او $b>0$،چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},...(4,19)$$

بيلګه ٤ ٠ ١٢

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بيلګه ٤ ٠ ١٣

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۴ . ۳ توان(پوتنځ) د حقيقي – يا رييل جګ (اکسپوننت) سره

دلته دا په ګوته کوو يا دې دا ويل شوي وي، چې د توان ټول قوانين له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقيقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بنديزه ټيک د مثبت بنسټ لپاره. يعنې a,b>0 ، برسيره پردې دې بايد توان $a^{\alpha}; a>0$ د ناريښتوني يا ايراسنل عدد α لپاره تعريف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که α يو ايراشنل – يا ريښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انتروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\propto = \{a_{n;} a'_n\}$. دلته $a_{n;} a'_n$ هوښيار يا راشنل اعداد دي.

بيا نو

$$\beta = \{a^{a_n} ; a^{a'_n}\} \qquad (4{,}20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غړي يې (۴،۲) لاندې تعريف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپير، چې

$$\begin{gathered} 2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2 \\ 2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} \\ 2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42} \\ 2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415} \\ 2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143} \\ \vdots \end{gathered}$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $\sqrt[10000]{2^{1412<2^{\sqrt{2}}<\sqrt[10000]{2^{14143}}}}$

٤ ، ۳ تولګه : د a>0, b>0 رييل او $m, n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n \neq 0)$ ييلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته موضوع تر دې ځايه بسيا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړيين وو، هغه به بيا په ګډه ورزياتوو

۴ . ۵ . تمرينونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفريق يا زياتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څير يې وليکئ

a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$ d) $-(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$

b) $(3a+2b)x^4 - x^4(2b-3a) + x^4(3a+2b)$

c) $4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زياتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاريتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشميرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګڼ يا جګعدد سره، د کميزو يا منفي اکسپوننتونو سره شميرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\frac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\frac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\frac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\frac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\frac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\frac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\frac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

c) $\dfrac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\dfrac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \dfrac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\dfrac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرلیطو لاندې کیدی شي لاندې عددونه د یوه مربع – یا څلورۍ ریښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ - د ریښو جمعه او تفریق)زیاتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\dfrac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

b) $\dfrac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\dfrac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

d) $\dfrac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\dfrac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د ریښو یا جذرونو ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} : \sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$ c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او ريښې ريښه ويستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$ d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$ c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}} : \sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}} : \frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج ریښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ ۰ لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترڅېړنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوې، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوي وي څېړو ۰

۵ ۰ ۱ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم تر څېړنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څېړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وي ۰د لوګاریتم $c = \log_b a$ پېژند لپاره د یوه زیاتیز - یا مثبت عدد a یوه زیاتیز - یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه لپاره c

$$b^c = a \,; a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, ...(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x = 16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: $2 = \log_x 36$ د x²=36 سره یو ارزښت لري، نو لرو x=6

ب : $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ د $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو $x = 2$

۵ . ۱ . ۳ الف : $x = \log_5 125$ د $5^x = 125 = 5^3$ سره، یوارزښت لري،

نو $x = 3$

ب: $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ د $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو $x = 4$

۳ . ۱ . ٤ الف $5 = \log_3 x$ د $3^5 = x$ سره یو ارزښت لري، نو $x=243$

ب : $-5 = \log_2 x$ د $2^{-5} = x$ سره یو ارزښت لري، نو لرو $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ . ۱ . ۵ الف $2 = \log_x(-6)$ تعریف نه دی یا پیژند نه لري.

ب : $x = \log_{-5} 125$ پیژند نه لري یا تعریف نه دی

پ: $\log_1 x$ پیژند یا تعریف نه دی

له (5,1) او(5,2) څخه لاس ته راځي

$$a = b^{\log a}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,3)$$

$$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,4)$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکيږي

$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ...(5,5)$$

د lga لوګاريم ته لسيز لوګاريتم وايي او lna ته پيدايښتي يا طبيعي لوګاريتم وايي(e وروسته څيړو) زيات وخت د لشميز لوګاريتم لپره داسې هم ليکو:

$$c = \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ بايد وکارول شي.

۵ . ۲ د لوګاريتم قوانين

د لوګاريتم د پيژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کيدی شي د پوتنځ د قوانينو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاريتم قوانين رابيل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاريتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زياتيز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ...(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, ...(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1, 2, ..., ...(5,10$$

د پوتنځ قوانينو له مخې د دې فرمولونو راوستل يو د وړانديز وړ د لوګاريتم ژورې څيړنې لپاره تمرين ښايي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b(x.y)=\log_b x+\log_b y,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,11)$$

ښخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) ښخه لرو

$$c_1=\log\ \ x, c_2=\log_b y, c=\log_b(x+y),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1}=x, b^{c_2}=y, b^c=x.y,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c=x.y=b^{c_1}.b^{c_2}=b,\Rightarrow c=c_1+c_2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې ښخه د لوګاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه ښټ۰

بیلګه ۵ ۰ ۲

$$\log\frac{2\sqrt{a+b}\,a^3b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$

$$=\log 2+\frac{1}{2}\log(a+b)+3\log a+2\log b-\frac{1}{3}\log c-2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ ۰ ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کینۍ اړخ کې لوګاریتم ځاي لري، چې د ټولوa,b,c تعریف دی او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دېa+b>0 (د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې0 < c (د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ (د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)

د کینۍ اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د a = 2 . b = -1 , c = 1 لپاره تعریف دی۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا څیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چېLog بې ځایه دی ۰ د دې لپاره، چې د څیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b\neq 0$ پر ځاي په ټینګه یا کره,b>0 وغوښتل شي ۰

په بیلګه۵ ۰ ۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

a+b>0, a-b>0

نو بیا0 < a²-b² = (a+b)(a-b) او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، bلپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شيa > - b , a > b له امله هم و|a >|b ته راغوند شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې --

ته دې هم ګوته نيولې وي، چې لوګاريتم په يوه بنسټ b يوه بل لوګاريتم يوه په خوښه بل بنسټd ته د شميراوړون د شميرنې اړول کيدی شي $(b > 0, b \neq 1, d > 0, d \neq 1, a > 0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاريتم نيول و بنسټd ته لرو:

$$\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), ...(5,15)$$

د

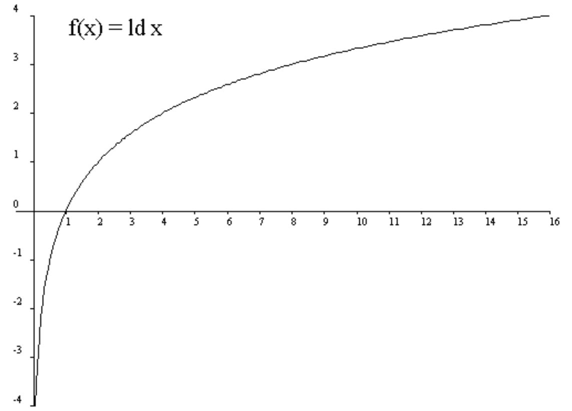
لسيز لوګاريتم اړول په پيداينتي يا طبيعي لوګاريتم او په څټ لپاره ليکوb=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); …………………(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$$\lg a = (\lg e)(\ln a), ...(5,16)$$

$$\ln a (\ln 10)(\lg a) = 2,30429 \lg a, ...(5,17)$$

د لوګاريتم فنکشن يا بلواک او دياګرام يې	

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د یوه ځل لوګاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښي لوګاریتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاریتم یو په بل بدلیدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نخښهٔ وروسته بینارځایونه ó او لسمیزسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

	binär	dezimal
2^{-1}	0,1	0,5
2^{-2}	0,01	0,25
2^{-3}	0,001	0,125
2^{-4}	0,0001	0,062.5
2^{-5}	0,0000.1	0,031.25
2^{-6}	0,0000.01	0,015.625
2^{-7}	0,0000.001	0,007.812.5
2^{-8}	0,0000.0001	0,003.906.25
2^{-9}	0,0000.0000.1	0,001.953.125

۵ ۰ ۳ ټولګه

لوګاریتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېر بلواک دی

$$x = \log_b n \iff b^x = n$$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونو او $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log\frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log\sqrt[n]{x}\frac{1}{n}\log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429\ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259\lg a$$

۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0,04$ d) $10^x = 0,0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a + n\lg(a+b) + n\lg(a-b)$

c) $\lg a - \frac{1}{2}\lg b + \frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاريتم بنسټيز فرمولونو استعمال.

x وشميرئ.

3.1. a) $x=\lg 5\cdot\lg 20+(\lg 2)^2$

b) $x = 2\cdot 10^{2\lg 2}$

c) $x = 3\cdot 10^{-2\lg 3}$

d) $x=\left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x=\sqrt{10^{2+\lg 9}}$

b) $x=\sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

c) $x=\sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

d) $x=\sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x=\ln\frac{7{,}63}{\sqrt{e^3}}$

b) $x=\ln\frac{0{,}23}{2e^2}$

c) $x=\left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

d) $x=\left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ګونومتري (کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

دا برخه هم د ښوونځي له امله يو تکراري خوي لري. ددې وظيفه به داوي چې د کونجکچ چېکتياته (ګونومتري شميرنى ته) په ګراد- او لينده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجيز - او عمومي درېګوډيود ترېګونومتري فرمولونو په استعمال د ترېګونومتري افادو په څيره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چې د بنسټيزې هندسي کليمی او قوانين مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټيزې هندسی سره بلد وي ٠ زه به کوښښ وکړم چې ځنی هندسي کليمی،کم له کمه په څيره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

١ ٠ ٦ بنسټيزه هندسه

٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټيزې هندسی مهمی بنسټيزې کليمی دي. دا ابسترکتی(خيالي، فکري ، نه ليديدونکی) کليمي په خورا تيك راوړوندود هم نه شي تعريف کيدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړيکي کيدی شي په شميرنه کی په خورا زياتو ډولونو استعمال شي، ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره له دې هم هڅه کيږي چې ټکی او کرښه ليدوړ وګرځول شي لکه څنګه چی په ۴ . ۱ - امه برخه کی پيښ شوي. دلته کرښي په g ښوول شوي او غشی يی ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پرېښول کيږي يعني نه انځوريږي، که دا مو و ناريښتياو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کيدی شي د دوه کرښو غوڅځای په ځير ونيوله شي) ځيرې په غور وګورئ

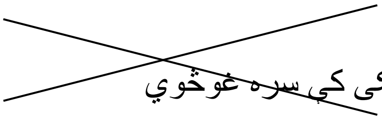
A ray وړانګه

g کرښه

(stright line

بند کرښه يا ټوټه کرښه Line segment

A B



دوه کرښې په ټکی کې سره غوڅوي

د بيلګي په توګه لاندې ويناوې باور يا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې يوه کرښه ټاکل کيږي(پورته ځيره وګورئ)، چی دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي يا پخپل بر کی لري .

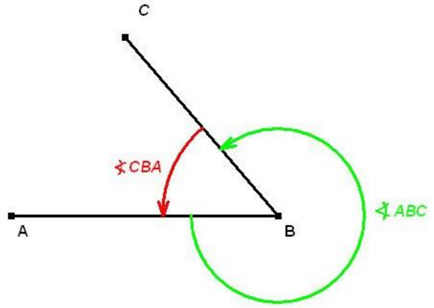
- دوه ناغبرګي او په يوه هواره کی پرتی کرښی يو بل ټيك په يوه ټکي کی سره غوڅوي (پورته ځيرو کې کتل کيږي)

يوه وړانګه s_1 له يوې لور په يوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او يوه پايکرښه له دوه ټکو A او B بنده يا راګير کرښه ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ . ١ . ٢ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه s_1 د خپل پیلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي s_2 (څیره ۴ . ۲الف) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، s_1 او s_2 پښی او په همدي ډول د S د کونج α (الفا) ککره بلل کیږي.

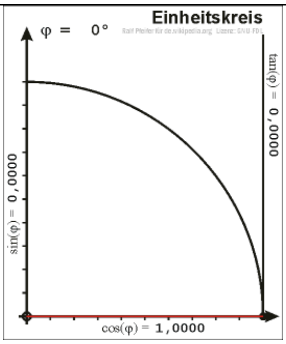


که څرخون د ساعت نخښې په څټ یا مخامخ وې نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسی کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یې منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کې سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

کیدی شي چې یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a^\circ \qquad (6.1)$$



په داسی حال کی چی ولاړکونج، کوم چې یو په بل ولاړې کربښي $g_1 \wedge g_2$ (او ته دې پام وي) یې جوړوي، له 90° سره مساوي وښایو(لاندې څیره ، که نورېڅیرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چې کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چې کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b \qquad (6.2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته یونګردۍ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردۍ لینده په وړانګه(شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بې نومه ګڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګڼلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردۍ) r = 1 (کی انځوروړ دی، چیرته چی دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي (څیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د 360° کونج د یوونګردۍ چاپیری) محیط(په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass (درجکچ (او)ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, ...(4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦۰ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که ځیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي۰.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه بنه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقې او ثانیي نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاري، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي۰

بیلګه .٦. ۱ :

کونج a = 47°12'36" دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دځیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقې او ثانیې دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12’=720“

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس په ټولیزه توګه $720'+36'' = 756''$ له دې لاس ته راځی

$1'=(1/3600)°$ (<=)

له دې وروسته په همدې توګه $756.(1/3600)°=0,21°$

له دې لاس ته راځي : $a=47°12'36''=47,21°$

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د(۶ . ۳) پسی باور لري $b=0.017453.47,21=0,826$

دلته ځیرې راځي، خو د دې ځیرو په ځاي به موږ په پورته ځیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي۰

بیلګه ۶ . ۲ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا ـاندازه) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګڼیز سیستم(ځاي ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخی لرو

$a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701°$ د $0,701°$ اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

$$0,701° = 0,701.60' = 42,06', \qquad 0,06' = 0,06.60=3,6''$$

پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6''$

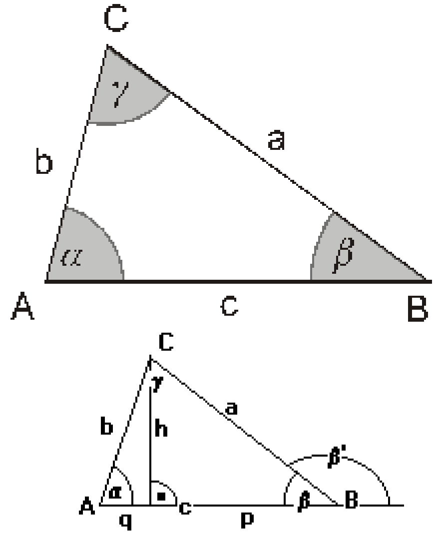
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته داسی لوستل کيږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقيقي او ۶ ، ۳ ثانيي

۳ . ۱ . ٦ دريګوډی

یادونه: موږ دلته بیا د نومونو(نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کيږو. هغه هواره چی له کرښو راګير وي دلته له دريِ کرښو يا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه يا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي يا۰۰۰ ګوټي او يا ۰۰۰ګوډي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر يوې ډيرې اندازې په ترکيبي نومونو کی او يا نورو نومونو ډولونوکی يو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته يو کونج چي له دباندې ورته کتل کيږي او د يوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاريږي. موږ په ورځنۍ يا مروجه ژبه کی وايو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنيکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی يعنی ګوډ دی. که يو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وييلی. که څوك په يوه ګوټه کی ناست وي نو وايي، چه په هغه کونج کی دلته نو بيا ګوډ نه وايي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم يا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .

په ټوليزه توګه په يوه سطحه يا هواره کی له پرتو کرښو g2 , g2 , g1 څخه يو مثلث يا دريګوډی جوړيږي، چی ګوډونه يی C . B . A ، اړخونه يی c. b. a او کونجونه يی α, β, γ دي (د مثلث دننه کونجونه يا زا ويې او دباندې ګوډونه دي، چې موږ يې په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ څيرې دې وکتل شي



(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کيږي

- په دريګوډي کې د کونجونو زياتون 180° درجې دی يا π دی

- يو دباندنی کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زياتون سره مساوي ده، له دې امله د يوه دريګوډي د دباندنيو کوجونو زياتون 360° يا π 2 دی۰

- د يوه دريګوډي د اړخونو نيمي په يوه ټکي کې يو بل سره پري کوي، چې دا په همدې وخت کې د دريګوډي » دروندټکی يا دثقل مرکز « دی. اړخنيمي يو بل په تناسب د۱ : ۲ پرې کوي يا په پښتو:

د اړخونو ځاننيونه يې۱ :۲ ده) په ځيره کې وګورئ) د يوه دريګوډي منځولاړې

يو بل په يوه داسې ټکي کی سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کی د چاپير ګردي) هغه ګردئ يا دايره چې دريګوډی په خپل دننه کی نيسي يا بهتره، د دريګوډي خونديګردی(منځټکی دئ)۰

د يوه دريګوډی کونجنيمي يو بل په يوه ټکي کی سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کی د دننه ګردی) ګردئ چې د دريګوډي

په دننه کی ده يا ګردئ يا دايره کې خوندي دريګوډی (منځټکی دئ) لاندې کې بې ځيره شته) د يوه دريګوډي جګی يا د ارتفاع کرښی په يوه ټکی کی سره غوڅوي.) ځيرې ټولې لاندې کتل کيږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې ځيرې اړه لري، چې تکرار راځی، خو پروا نه لري۰

د جګيو غوڅټکی Orthocenter **Höhenschnittpunkt** (*H*),

(c) ketabton.com: The Digital Library

Umkreismittelpunkt (*U*) circumcenter ۰د دباندنی- یا په راتاو ګردی منځټکی

Seitensymmetralen), seid symetry ۰د اړخسیومتریو غوڅټکی

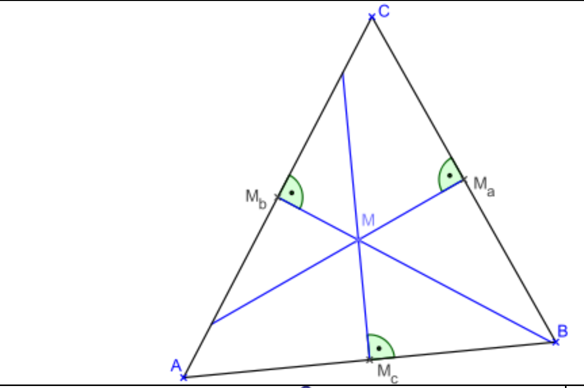
Inkreismittelpunkt (*I*) den inscribed circle, incircle ۰د دننه ګردی منځټکی

Winkelsymmetralen r ۰ د کونجسیومتري

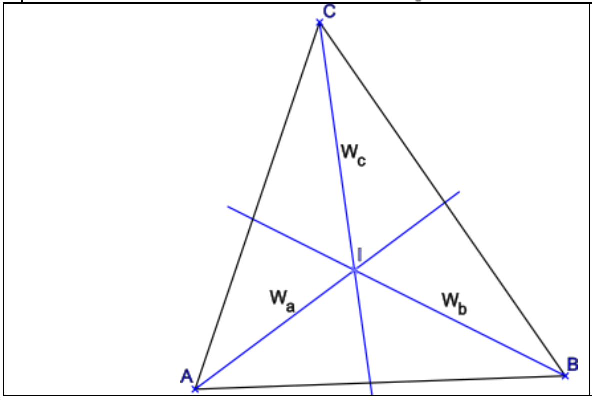
Schwerpunkt (*S*) r centroid ۰ دروندټکی

Seitenhalbierenden) median ۰اړخنیمی

مخامخ خیره کې مثلث یاد دریګوډي په منځ عمود یا - ولاړې کرښې ښایي

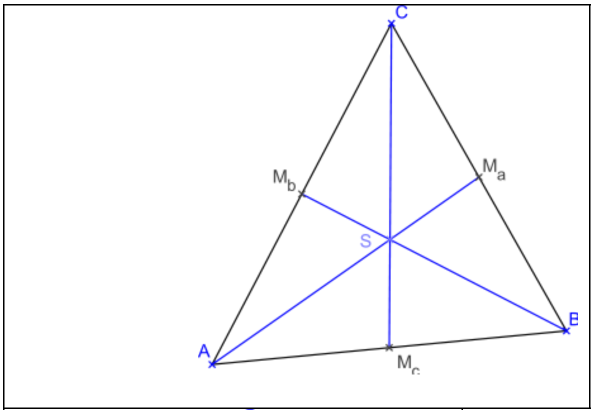


دامخامخ مثلث هغه کرښې ښایي، چې کونج نیموي او موږ یې کونجنیمی (ناصف الزاویه) بولو (په پورته خیره په نیم اړخ ولاړې کرښې دي)

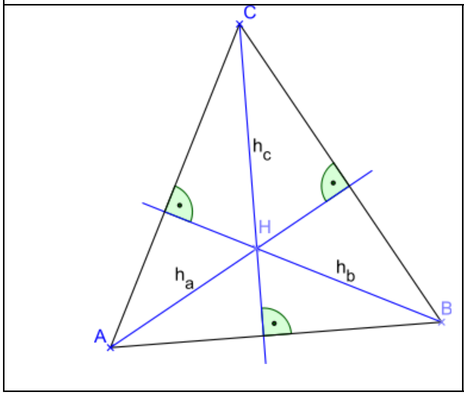


(c) ketabton.com: The Digital Library

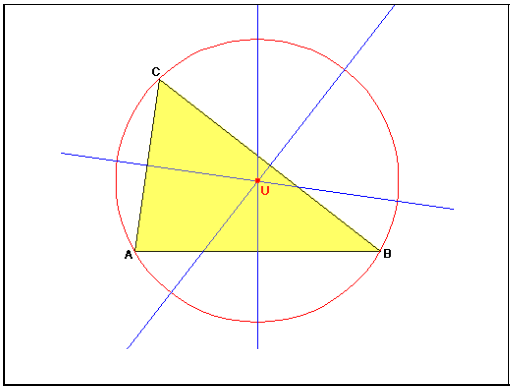
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له
کونج څخه اړخ نیموي۰ موږ یې
اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو۰

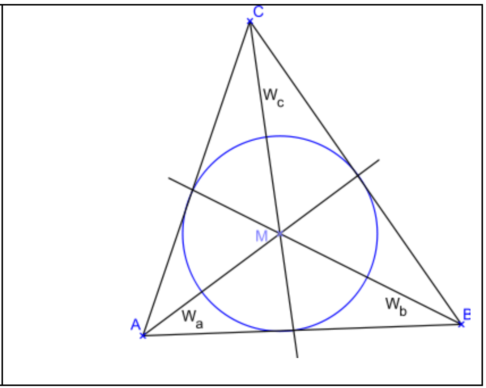


لاندې څېره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له
کونج په اړخ ولاړې دي۰ دا د اړخ جګوالی په
ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللي دي۰



په پورته څېره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی یې د خوندې ګردی یا دننه ګردی
منځټکی هم دی



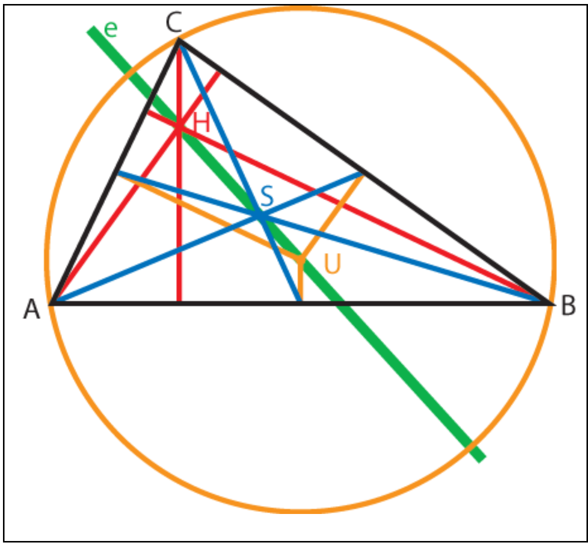


(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کینه څیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوڅټکی یې د په راتاو ګردی یا چاپیرګردی منځټکی دی۰

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه ټکی کې سره غوڅوي۰

که د یوې درېګوډی د منځولاړو په غوڅټکي یوه ګردی داسی ووهل شي، چې د ګردی کږه درېګوډئ له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا ګردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیریږي۰ که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځټکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردی په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځټکی له درېګوډی دباندې پروت دی۰



که درېګوډی ABC وي ، S دروندټکی، U د چاپیریالګردی منځپکی ، او H د جګیو غوڅپکی وي، نو کرښه په لاندې ځانتیونه یا تناسب پراته دي :دا په لاندې څیره کې کتل کیږي ۰

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

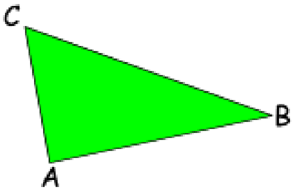
۶ . ۱ . ۴ برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهت Congruence and Similarity

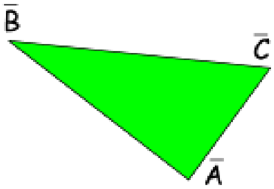
دوه دریګوډي ABC او A'B'C' یو بل سره کونګروانیڅ یا برابر پټووني دي یانې براربارزښته دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ABC ≡ A'B'C'

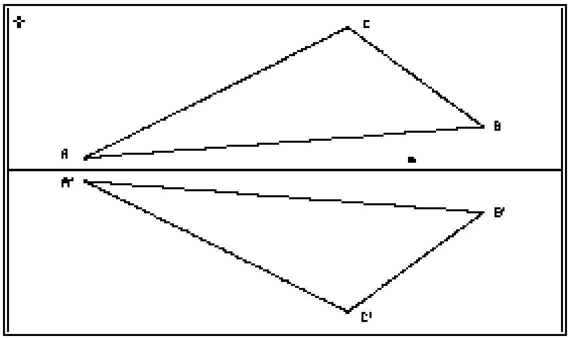
(4.4)   که وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي(وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هندارونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې ځیر)





که دریګوډي سره کونګروانیځ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي ټوټو (اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

.په ښټ یی هم باور لري S اړخ او W کونج په ګوته کوي



(c) ketabton.com: The Digital Library

جملې: دریکوډي ټیك هلته کونګرواینځ دي چی یو بل سره مساوي شي په

۱ - درې اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - یوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي ,WSW

د دې جملو په څېټ هم باور لري، دا په دې مانا چی که دریګوډي په کونګروابنځ جملو کی ورکړشوو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونګروانځ دي. د کونګروانځ جملو په بنسټ کیدی شي په ځانګړي توکه دریګوډیجوړښت سرته ورسول شي، کوم چی د کونګروانځ جملو کارونی په څیر لیدل کیدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چی په همغو یا اړوند درې کونجونو کی یو بل سره برابر وي او د همغو یا اړوند اړخونو تر منځ یی تناسب یا ځاننیونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګروانځ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

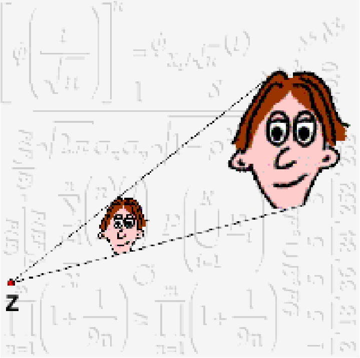
دوه دریګوډي ټیك هلته یو بل ته ورته دي که یو دبل سره برابر وي، په :

۱ - دري اړخونود اوړدوالي ترمنځ ځان نیونی یا تناسب کی

۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی
۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب یا ځاننیونه کی
۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

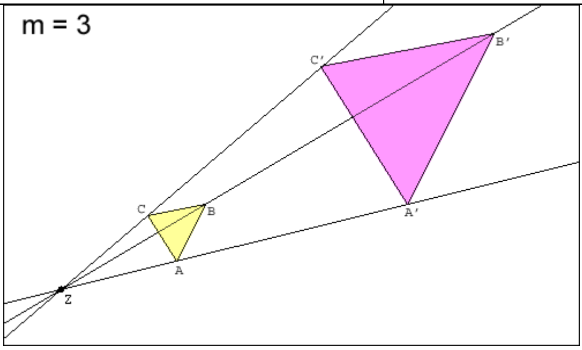
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مخامخ ښيرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په یوه کرښه وتړی او د یوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غبګه کرښه وباسی، نو دوه ورته درېګودي لاس ته راځي

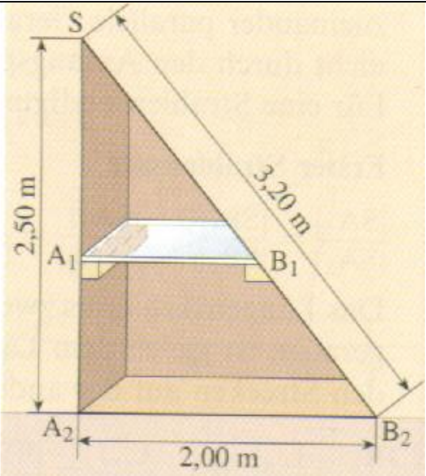


په لاندې ښيره کې کښل شوي دريګودي ورته دي، دا په دې مانا چي باور لري:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



د ورته جملو سره خپلواني جملی د وړانګو جملی دي:

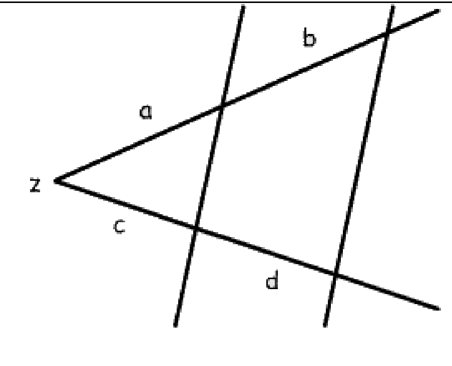


په دې پورته ښيره کې درېګودي يو بل ته ورته دي٠

د وړانګې لومړۍ جمله:

دوه له یوه ټکی وتلې وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې یې لاندې اړیکی سره لري۰

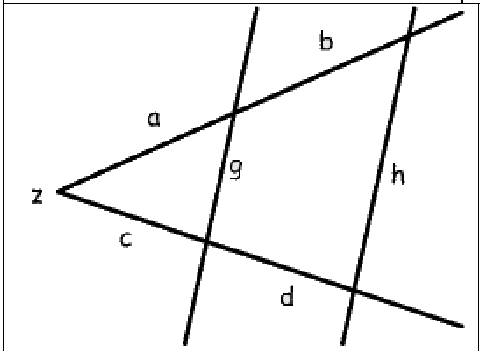
$$\frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$



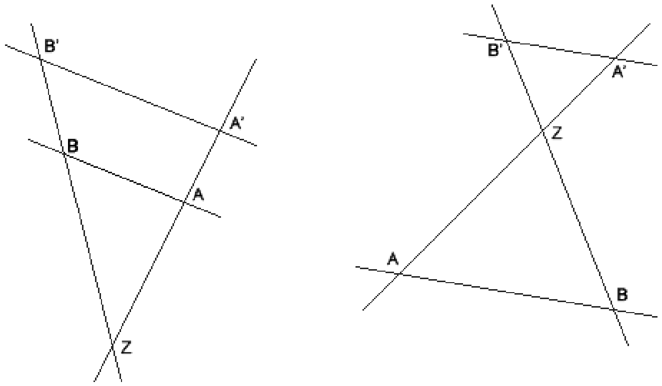
د وړانګې دویمه جمله:

که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکی لري، دا ته والي له جملو ده۰ ټکی چې څنګهدي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو

$$\frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)} \qquad \frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)}$$



یا دالاندې، چې هرڅه یې روښانه دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

(دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوې څیره دې ګران لوستونکي وکاږي)

که درې په یوه ټکي کی پریکیدونکی کرښي g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی(کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګي په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څیرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

1 . OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2

دا په دې ماناچی په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیوی سره پرتی دي:

2 . A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2

دا په دې مانا چی: په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چی په وړانګه پرتی دي.

۳ - A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3

دا په دې مانا چی: په غبرګو پرتی کرښي په همغه برخوکی یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څیر رامنځ ته شي یا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c اوهمداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوډی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څیرنې لاندې نیسو

- 1 $a > c$

موږ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونجالف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردبلینده کاږو د a

په کچه چی د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوځوي)

څیره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

- 2 $a < c$

دلته درې امکاناته شته دی(د دې درې امکاناتو څیره وکاږئ)

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه هغوټکو کې پرې کوي،
په کومو کی چی اوبی یواځنی نه دی٠

۲ . ۲ : ګردبلینده د α ازاده پښه لمسوي٠

۲ . ۳ : ګردبلینده د α اندازه پښه نه غوڅوي .

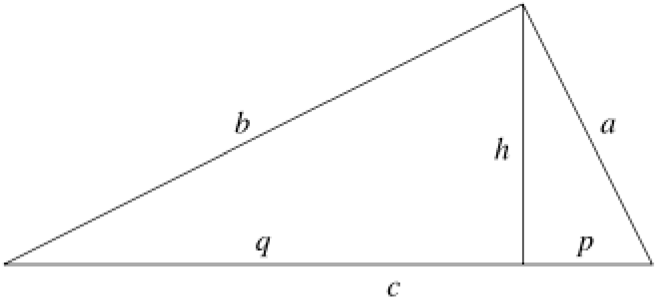
۳) $a = c$

ګردبلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کې پرې
کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$
نیونه په دریم کونګرواینځ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ . ۵ .ولاړکونجیز دریګوډی مثلث قایم الزاویه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلفو دریګوډیو څخه موږ په لاندې برخه کی ولاړ کونجیز دریګوډی ترڅیرنی لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ
هوپوتینوزې) Hypotinuse)بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت (Katheten)بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریګوډي ته روځنی یا ورسره بلدې یا مروجی په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له څیرې ۴ . ۱۳ څخه واخلئ



په ولاړکونجیز دریګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړیکی باور لري چی دلته یی بی له اوبی)ښوونی(راوړو:

یادونه : په ولاړګوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نوموونو یانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پیتاګوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتینوزې مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکاتیتو(د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع)) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د کاتیت مربع هواریزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددې کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

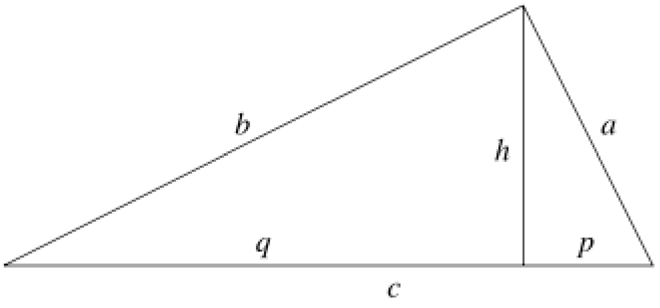
$$a^2 = p.c , b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتیزې په جګي مربع هواریزمساوي ده د هیپوتینوزې (لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q . p \qquad (6. 7)$$

یا په لاندې کې لنډ بیا ورکړ شوي



لنډ: (ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پیتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اویکلید د کاتیتونو(پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

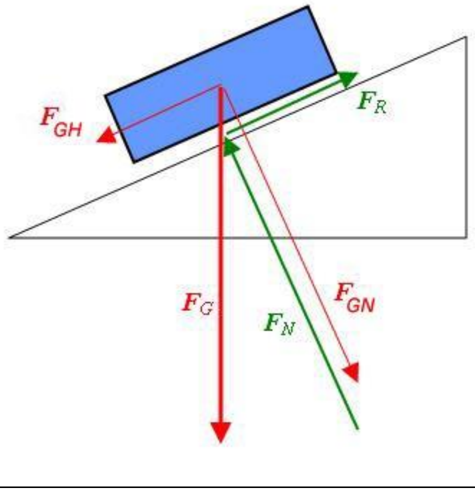
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اویکلید جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بیلګه ۴ . ۴ : (ځیره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکج فکر وکړي۰ دا یوه فزیکي دنده هم ده(ځیره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د یوه بدن د وزن G تجزیه څرګندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزیك له مخی هغه ټکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي) KSP =)چی په یوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په یوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نیغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه FN)تجزیه کیږي. د ښوولو ده چی، دریګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دریګوډي سره ورته دی

	یادونه: په لیکنه کې زور یا توان د لاندې ځیرې سره داسې بدلوو:شین تنیا د مستطیل شکل G دی $F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$ ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کیڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج α ، په ګوډ B کونج β

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې G||AC څغلي، نو FH او G یو کونج α جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه دریګوډي په دې برسیره په ولاړکونج کی یو بل ته ورته دي.

یادونه : داسې بیلګي، چې څیره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې څیرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي. زما زړه نه شي، چې له لیکلو یې تیر شم.

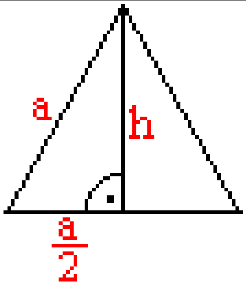
بیلګه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کی دې (لاندې څیره) جګی و شمیرل شي .د ٦ . ۴ (له مخی لرو(جګی په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نیمی هم دی، دا په دې دریګوډي کې وکاری)

$$h^2 = a^2 - (a/2)^2$$

$$h^2 = a^2 - a^2/4$$

$$h^2 = (3/4)a^2$$

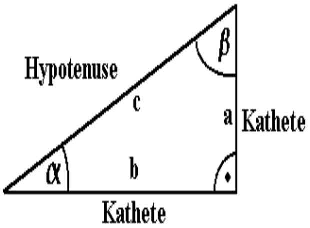
$$h = (\sqrt{3}/2)a$$



٦ . ۲ په ولاړکونجیز دریګوډي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چې یوه ولاړکونجیز دریګوډي کي جوړیږي(لاندې څیره). که د کونج α مخامخ اړخ یا -کاتیت a gegkathete د مخامخ اړخ په څیر وښایو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دریګوډي کی لاندې اړخځانښیوني منځ ته راځي یا جوړیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$ $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$ $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$

د وړانګو جملو له امله دا اړيکي یا تناسب يوائي د کونج   په واك کی دی. که په پام کی ونيول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نو لاندې اړيکی ليکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې ليدل کيږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پيداکولو لپاره دوه ګڼجدولونه پوره دي يا بسيا کوي .ورپسي يا ددې په تعقيب پيژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,10)$$

برسيره پردې د پيتاګوراس د جملی په پام کی نيولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots(6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳.۰۶ په یوونګردۍ کی د کونج فنکشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یواځي د لیدیدونکو)Konkrete(اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یواځي یا په ځانګړې توګه د $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (0 < \alpha < 90°)$ لپاره تعریف دي. که د α خپلواك واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چی په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی) څیرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو د یوون ګردي باندې مخ نخښی په واك کی کرښو ته لاربنودوي .د لته ټولی کرښی) د لته به له کرښو څمور مطلب پای کرښی وي(، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی کرښي او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ (د په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha = \overline{QP}, \cos\alpha = \overline{OP}, \tan\alpha = \overline{AD}, \cot\alpha = \overline{BE}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,13)$$

د کونج α لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د کواوردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی(لاندې څیره له کیڼ و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکې کارول شي توري ساده ایښوول کیږي۰ په څیرو کې شنې کرښې د ساین دي او سرې کرښې کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه کیږي، چې د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو)، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریګوډي کی تر څیرنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج α په لینده اندازه کی د ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چی په زیات څرخون له 2 څخه لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو) ۱۳ . ۴ (څخه لاس ته راځي، چی ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود :°360) 2 (periode (تل تکراریدونکی ، بیرته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځيدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پريود(°180) لري .

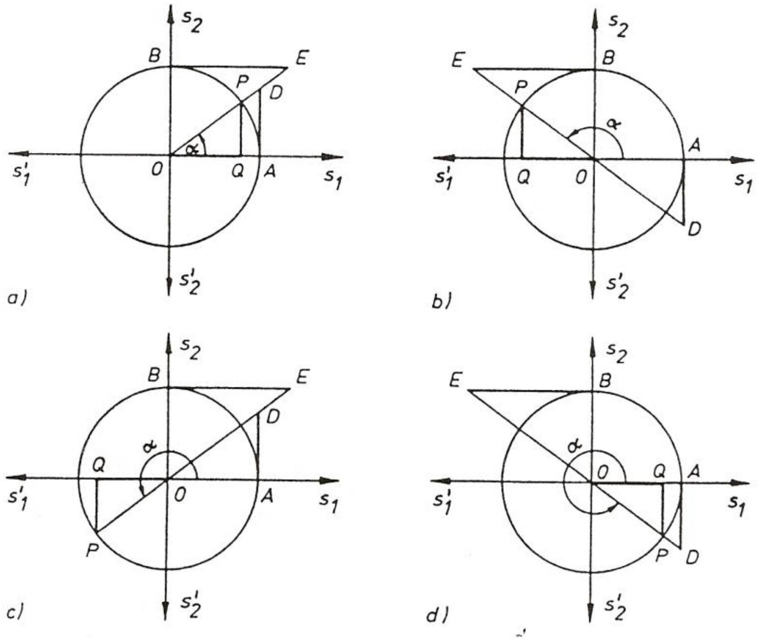


Bild 4.17 ځيره

پس لرو

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha;......................(6.14)$$
په
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

تيوليزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha;......................(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو ټولګنونو ....3 , 2, 1,0,1-,2-,3-.. = k لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخبنه

	لومړۍ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$	دریمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$	څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
cotx	+	-	+	-

برسیره پر دې لاندې اړیکې باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha,\quad \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha \qquad (4.16)$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha,\quad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پیداکوو. دا چی α په درجی اندازه ورکړ شوي ده، نو اومشالتریا سویچ بدون) دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library

جبشميري اړونه ده، پۀ غوښتل شوي فنکشن کی) په « DEG » سموو او بیا
لاندي ورکوتی کوو.
په همدي ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

1. $\sin \alpha = a$, 2. $\cos \alpha = a$,
3. $\tan \alpha = a$, 4. $\cot \alpha = a$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري$-1 \leq a \leq 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کظ په خوښه هر ارزښت نیولی شي.
یو «بنستیزوبی یا بنستیز حل»α د هر تمرین د جبشميرني سره په لاندې ډول یا
همداسی تکموترتیب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چېα په درجه اندازه یا لینده
اندازه اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو)

1. [a] [F] [sin]   2. [a] [F] [cos]
3 [a] [F] [tan]   4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په ختې فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بیاد α_0 هر بنستیزحل په درجه یا لینده کچ څرګندیږي.
د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنستیزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33,367013° = -0,58236,$
2. $\alpha_0 = 123,36701° \quad = 2,1531606,$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3.\ \alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$$
$$4.\ \alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$$

د مخ ت ه تيرو په بنسټ لو

$$1.\ \sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$$
$$2.\ \cos\alpha = \cos(-\alpha)$$

او په ورته توګه،، فرعي يا ځنګيز حل يا اوبی،،

$$1.\ \beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$$
$$2.\ \beta_0 = -\alpha_0$$

لاس ته راشي

د ليديدونکي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چې :

$$1.\ \beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$$
$$2.\ \beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$$

د α ټول حلونه د (۴ . ۱۵) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

$$1.\ \text{und}\ 2.\quad \alpha = \alpha_0 + k \cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$$
$$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$$
$$3.\ \text{und}\ 4.\quad \alpha = \alpha_0 + k \cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$$

بيلګه ۴ . ۹ : لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودې شميرل شي $\cos x, \tan x, \cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۱۰ : په بیلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لویې دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن 700 N وي (دلته N د Newton لپاره دی چې وزن پرې اندازه کیږي) او مائلی هوارې مایلکونج $\beta = 28°$ وی؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ \text{N} \cdot \sin 28° = 700\ \text{N} \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ \text{N}.$$

$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ \text{N} \cdot \cos 28° = 700\ \text{N} \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ \text{N}.$$

۴. ٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په ټولیز یا عمومي دریګوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جمله‌د څیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

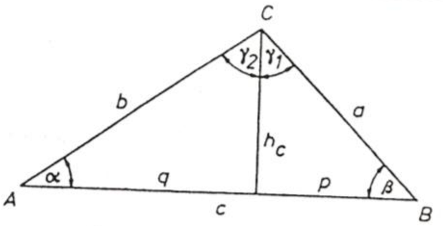


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه بنوول کیدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (4.17)$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز درېګوډی کښل کیږي(پورته او لاندې څیرې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د څیرې ۴ . ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} h_c^2 &= b^2 - q^2 \\ h_c^2 &= a^2 - p^2 \\ \hline a^2 &= b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q, \\ a^2 &= b^2 + (c-q)^2 - q^2, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b\cos\alpha, \end{aligned}$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$ لرو او همداسې:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned} \qquad (4.18)$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دئ .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره څیره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوې، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسی په ABCدریګوډي کی، F1 = c, F2 = a او ss - 180° = 'ss معلوم دي، α

او R = b لټوونکی یا غوښتونکی لویي دي؟

د کوساین جملی (۱۸ . ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosss$$

همداسی یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2\ cos(180° - ss')$$

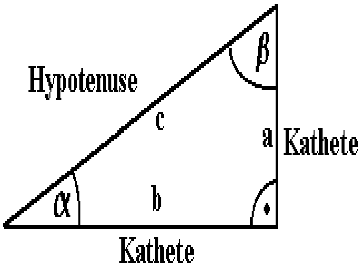
او د ساین له جملی (۱۷ .۶) لاس ته راځي

له کومو چی α ټاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو ٠

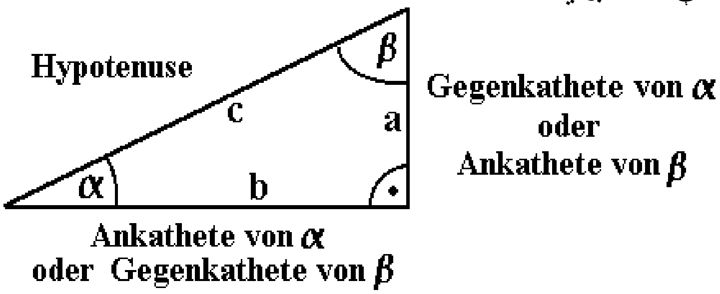
۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو ٠

	مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډی ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څنګ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي٠



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي٠ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي٠ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیری ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ٠

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

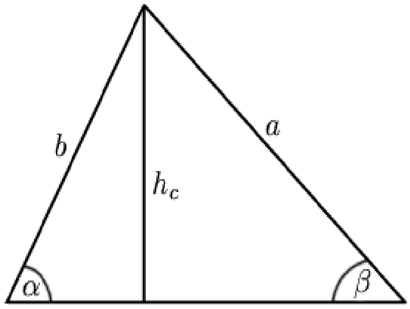
$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : (دا ځیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)

	$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$ په h_c پسې يې اوبی کوو $h_c = b \cdot \sin\alpha$ د برابراینوني له لارې لاس ته راځي $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$ که په $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ وویشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ راځي

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیداینتي توګه ځګی h_a او یا h_b لاس ته راکوي

د کاروني بیلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$a = 5,4\,\mathrm{cm}$ ، $b = 3,8\,\mathrm{cm}$ ، $\alpha = 73°$

دا نورې لويې دې په درېګوډي کی پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\mathrm{cm} \cdot \sin 73^\circ}{5{,}4\,\mathrm{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونیوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، یانې

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي.

او نو ګاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\mathrm{cm} \cdot \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\mathrm{cm}}$$

دکوساین جمله

په تریګونومتري کې کوساینجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړیکې ښایې ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ۰ ۹) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپيتاګوراس جملې له مخې لرو:

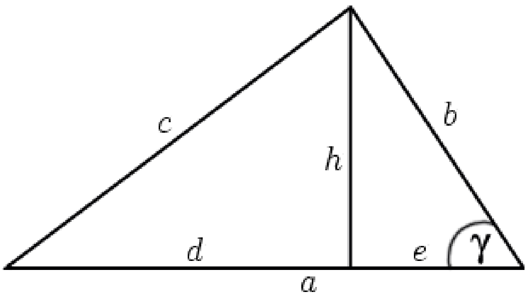
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساين جمله استعماليدی شي، که په يوه دريګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) يا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه يې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم يې پيداکولی شو

ښوونه :



د درېګوډي په کيڼ لور د پيتاګوراس قضيه استعمالوو، چې د c^2 لپاره يوه شميرافاده يا – وبينه پيداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو يا کاتيتو اوږدوالی څلوری يا مربع بايد پيدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنې اړخ لپاره د پیتاګوراس قضیې استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

(د بینوم فرمول)

د پیتاګوراس جملې له مخې د کیڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیداشوي شمیرویینې یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b} (\frac{ankathet}{Hypotenuse})$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بیلګه:

یو درېګوړیABC ، چې اړخونه یې ځرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9\ \text{cm}$ ،

$b = 2{,}8\ \text{cm}$

$c = 3{,}5\ \text{cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\mathrm{cm})^2 + (3{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}8\,\mathrm{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

Commonکډ وډ فرمولونه formular

Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کتمټوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Sum and difference identities زیاتون او کمون کتمتوالی

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

Double-angle identities دوه برابره کونج کې ګتمتوالي

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

Half-angle identities د نیم کونج ګتمتوالی

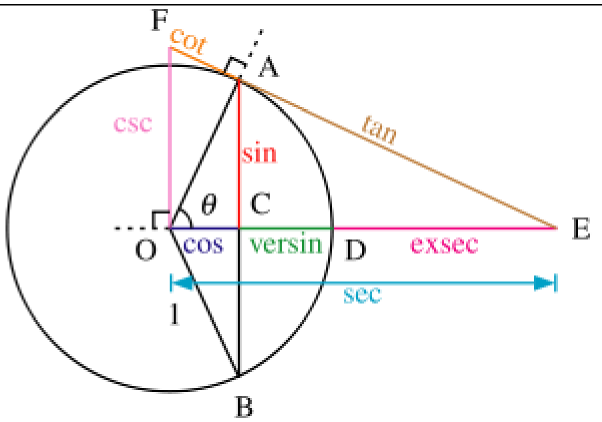
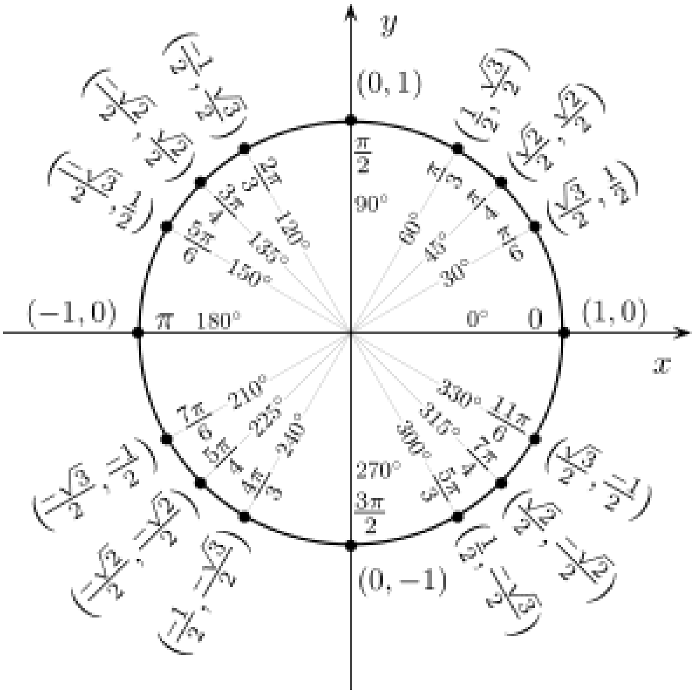
$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د تریگونومتریکي کتمتوالي لیست List of trigonometric identities

 	نوره ژوره څیرنه دلته نه کړو، دي ته ګوته نیسو، چې په لاندي ځیره کې تریګونومتریکي فنکشنونه روښانه دي
 	د یوه کونج θ ټول تریګونومتریکي فنکشنونه په O باندې د یوې یونګردی ترم له لارې ورکول کیدی شي (یونګردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښنه شوي) مخامخ: یوونګردی(یووالي یا واحد ګردی) The unit circle

(c) ketabton.com: The Digital Library

Notationلیکنښه

دا لاندې لیکنښه یا - ډول د ټولو تریګونومتریکي – یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین ، تانجنت ، کوتانجنت ، سیکانت، کوسیکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي $\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

Definitionsپیژند:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راګرځیدنه ، سیومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

په یوون(یووالي-) ګردۍ یا دایره کې ساده لیدل کیږي:

Periodicity تل بیرته راګرځیدنه

ساین ، کوساین ، سیکانت، کوسیکانت تل بیرته راګرځیدنه 2π ده(پوره ګردی) (تکرار دی)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبیرته راګرځیدنه π لري(نیمګردی یا نیمدایره) :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

سیومتري Symmetry

د تریګونومتریکي فنکشنونو لپاره سیومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x,\ x \to \pi/2 - x$ ،یا $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x), & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x)\\
\cos(-x) &= \cos(x), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x)\\
\tan(-x) &= -\tan(x), & \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cot(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x)\\
\cot(-x) &= -\cot(x), & \cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \tan(x), & \cot(\pi - x) &= -\cot(x)\\
\sec(-x) &= \sec(x), & \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \csc(x), & \sec(\pi - x) &= -\sec(x)\\
\csc(-x) &= -\csc(x), & \csc\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sec(x), & \csc(\pi - x) &= \csc(x)
\end{aligned}$$

بدلون : د $\pi/2$ او π بدلون دی

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \sin(x + \pi) &= -\sin(x)\\
\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x)\\
\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x)\\
\cot\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x), & \cot(x + \pi) &= \cot(x)\\
\sec\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\csc(x), & \sec(x + \pi) &= -\sec(x)\\
\csc\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sec(x), & \csc(x + \pi) &= -\csc(x)
\end{aligned}$$

د پیتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پیتاګوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زیاتوننخښي په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کي

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کيڼ لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کيږدو د پيتاګوراس یا موفريي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

د نیمکونج فرمول Half-angle formular

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ریښي لاندې ماتباندي او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پیتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$

نو لرو: $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

د ځل و زیاتون ته کتمتوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

د زیاتون- و- ځل ته کتمتوالی (برابرون) Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کیږدو نو لرو

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم دربګوډي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیمګردی یا نیمدایره $\text{if } x+y+z=\pi = \text{half circle},$=که

او *نو یا* tan x + tan y + tan z = tanx.tany.tanz

$\text{and } \sin(2x)+\sin(2y)+\sin(2z)=4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$

Trigonometric conversionsتریګونومتریکي په څتوالی

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخې اړیکی لري۰ داسې اړیکی د په څښ اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندګی وکړي ، او arcψ دې د ψ په څټ وي، داسې چې $\psi(\text{arc}\psi(x)) = x$ ۰ نو $\varphi(\text{arc}\psi(x))$ کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم x په څیر وویلی شي یا افاده شي۰

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

cot	sec	csc	Tan	cos	sin	φ \ ψ
$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	x	**sin**
$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\sqrt{1-x^2}$	**Cos**
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	**Tan**
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**sec**
x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	**cot**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

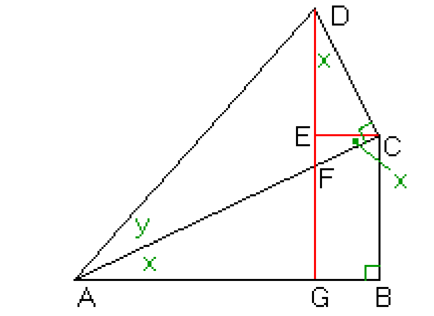
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طيلايي نسبت φ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جيومتريکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs

	**sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)** په مخامخ ځيره کي کونج x د ولاړکونجيز درېکوډي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوډيز درېکوډي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندي ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC. کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$= \frac{DG}{AD}$$

$$= \frac{EG+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Using the above figure:د پورته شیرې شخه کار اخلو

$$\cos(x+y)$$

$$= \frac{AG}{AD}$$

$$= \frac{AB-GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

د $\sin(x - y)$ او $\cos(x - y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x - y)$ او $\sin(x - y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کیږي، که د $\cos(x + y)$ او $\sin(x - y)$ لپاره فرمولونه وپیژنو

$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$

که په فمرول $\sin(x + y)$ کې د y په ځاي -y کیږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو

$$\cos(x + (-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته) د زیاتون)جمع(تیوریم(، له کومو یی چی دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چي فرمولونه په کي راټول وي(کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x \pm y) = \sin x.\cos y \pm \cos x.\sin a;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,19)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x.\cos y \mp \sin x.\sin y;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,20)$$

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;\ldots\ldots\ldots\ldots(6,21)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x.\tan y};\ldots\ldots\ldots\ldots(6.22)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,23)$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,24)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

مورږ له څیرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته ځو، او ځای په ځای کوو $\gamma_1 = x$ ، $\gamma_2 = y$ ، نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 . \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$

$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته ګوته ونیسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلګه ۴ . ۱۳ – لاندې وېینې یا افادې دې ساده شي

$$a)\ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له کوم چې $y = \sqrt{2}\ \sin\alpha$ لاس ته راځي

b) $y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi)$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x + \pi) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \text{ ist.}$$

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - (\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \le \alpha \le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنسټیزه هندسه یا څمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړۍ شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1.a) $15°$	b) $225°$	c) $105°$	d) $277{,}5°$
1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3.a) $4{,}24°$	b) $70{,}9°$	c) $31°\ 17'\ 20''$	d) $228{,}1923°$
1.1.4.a) $5{,}19$	b) $0{,}22$	c) $2{,}31$	d) 1

۱ . ۲ – یو درېګوټی له $a = 4{,}5$ cm , $b = 12{,}2$ cm او $c = 11{,}7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا درېګوټی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسې یې ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی(یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې درېګوټی جوړ کړی

a) $a = 11{,}7$ cm , $b = 9{,}2$ cm , $\gamma = 43{,}5°$

b) $c = 16{,}1$ cm , $\alpha = 84{,}6°$ $\beta = 51{,}9°$

وښایي چې ولی دواړه درېګوټي ورته د؛

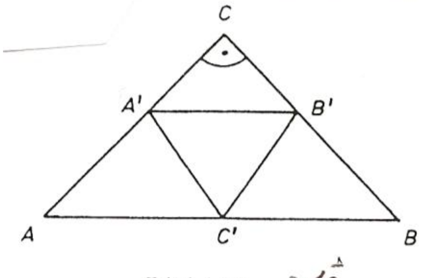


Bild 4.20 ځېره

۱ . ۴ – یو مساوي پښیز، ولاړکونجیز درېګوټي ABC ته یو مساوي اړخیز درېګوټی A'B'C' داسې په دننه کی ورکړ شوی چې $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (څېره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

ورکړی $\overline{B'C'} = \overline{A'C'} = \overline{A'B'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د خیري ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع اړخونه وشمیری

الف) له کانتو څخه

ب) له هیپوتینوزپېرخو څخه

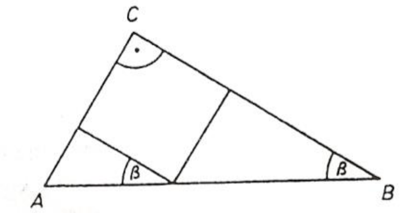


Bild 4.21

۲ . د جېشمیرنی سره د ارزښتونوټاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړی:

a) ∝ = 47,15° , b) ∝ = -390° , c) ∝ = 7,784 , d) ∝ = 13,195

۲ . ۲ – کونج ß دې د sinß = a , cos ß = a , tan ß = a , cot ß = a څخه د

a) a = 0,8290 , b) a = -0,2907 , c) a = -2,145, d) a = 0,8660

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کی دې د الفا په ځاي بیتا ولیکل شي !!!)

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز(γ = 90°) دریګوډي کې معلوم دي

الف) a = 3 cm , b = 4 cm ، ب) a = 5 cm , c = 12 cm

کوم ازښتونه sin ∝ , cos ∝ , tan ∝ , cot ∝ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې (γ = 90°) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیری ، لاندې لوبيي موږ ته معلومي دي:

a) a = 50cm , b) a = 40cm , c) b = 70 cm , d) c = 65 cm

b= 78,1 cm ∝ = 43°36' ∝ = 18°55' ß = 59° 29'

۳ . ۳ – وشمیری ! h_c , A او همداسی د ټاکلي مساوي پښيز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه (∝ = ß , a = b):

a) a = 66cm , b) c = 22,4 cm , c) a = 38,9 cm , d) c = 30,3 cm

c = 130 cm ∝ = 47,8°, γ = 33,3° γ = 48,2°

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) درې قوې دې د زوریا قوت $F_1 = 167{,}5N$, $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه یو دریګوډی جوړوي. د دې دریګوډي ، کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوی دی؟

پ) دوه ټکي A او B چې یوه کور یې مخه پټه کړې وي، یو له بل څومره لرې دي، که $\overset{\frown}{BC} = 75{,}25\ m$, $\overset{\frown}{AC} = 51{,}75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'\ 45''$ وي (ځیره ۴ . ۲۳)

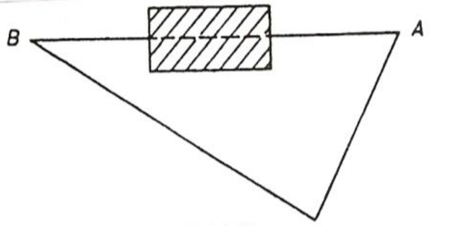


Bild 4.23
ځیره

ت) د دوه یخ هاکي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ یو د مخالف ټیم لوبغاړی G ولاړ دی. S_1 په داسې ډول توپ و S_2 ته وهي چې توپ په یوه دیوال ولږېږي. (ځیره ۴ ، ۲۳ وګوری).

د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لریوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له دیوال $a_1 = 2{,}5m$ همداسې $a_2 = 6{,}5\ m$ وي او توپ د یوه دې دیوال سره په یوه کونج $\propto = 42°$ ولږېږي.؟

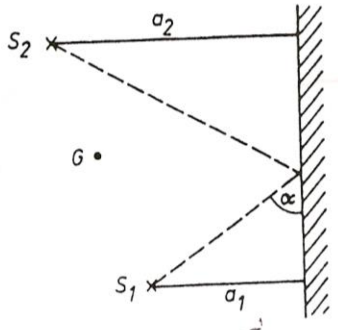


Bild 4.24
ځیره

۵ . د تریګونومتریکي یا دریګوډیزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشمیري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشمیرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښایئ:

5.2.1. a) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1$

d) $1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$

b) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

c) $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

d) $\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$

d) $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$

b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

d) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

5.2.5. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$

c) $\sin \alpha + \sin (\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin (\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6{,}5\pi + \alpha) = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \qquad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (1 , 7)د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7, 2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي حل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7,4)$$

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \ , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$\chi_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, ...(7,6)$$
$$\chi_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) ټولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)z= i یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د ټولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې ډول د څلورې پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

لاس ته راځی یالرو=>

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x + p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیوني یا حلونه منځ ته راوړي۰

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کيږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرۍ په C سره په نخښنه کوو

$$\bar{z} = a - bi, ...(7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کيږي۰ لنډ کنجوګیري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ...(5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ تل په پام کې لرو، چې $i^2 = -1$ اېښنول شوې

ګډوله يا کمپلکس عدد کيدی شي په سطحه يا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سرې د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شميرنه کوي، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نيسي چې: $i^2 = -1$

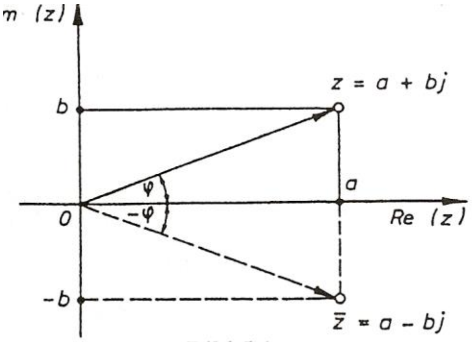


Bild 5.1

موږ دې سيستم ته پروت ولاړ سيستم وايو يا کواورديناتسيستم Koordinaten systm

پورته ښيره دې وکتل شي

پروتولاړ سيستم ته د (x,y) - سيستم هم وايي په پروتولاړ سيستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې ياسطځې رييلبرخه او ولاړ محور يا د y – محور ته يپايماجينار برخه وايي لکه ښنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سيستم کې يو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه ښيرو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوريږي او کاروني يا عملي يې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) يادونه : هغه ګران هيوادوال، چې نوي د شميرپوهنی د دې برخې سره بلديږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وييونه يا لغاتونه ياکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته يا لاندې ښيرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زياتون او کمون ښنګه دی

۷ ۰ ۱ زياتون او کمون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

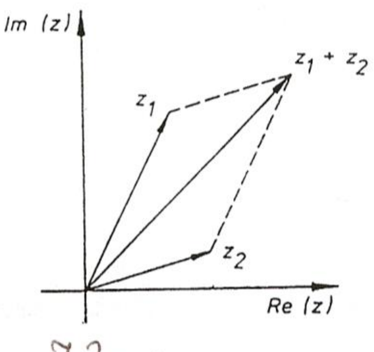
لاندې ښیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ... (7,17)$$

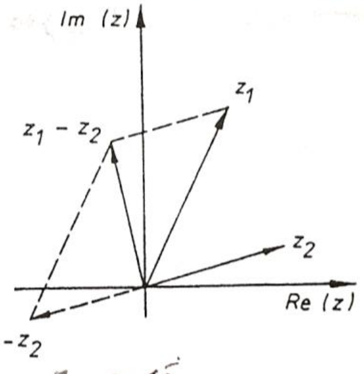
بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(-z2) په زیاتون)کیدی شي د ښېرې ۵ (په همدې توګه د ښېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.



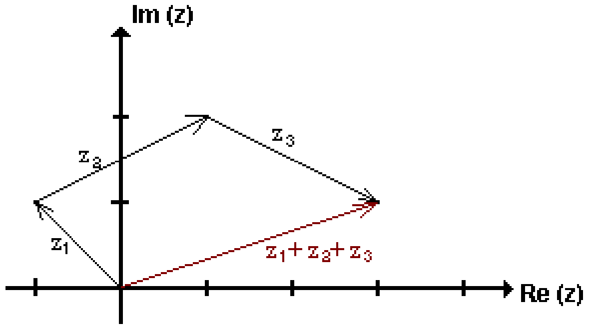
7.2 ښیره
Bild 5.2



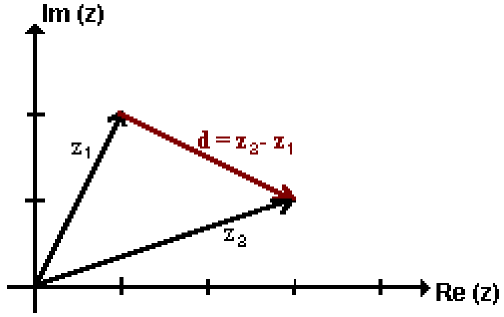
7.3 ښیره
Bild 5.3

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا لاندې:



په پورته او لاندې ځيرو کې د کملپکس ګڼونو د زياتون او کمون انځور ليدلکيږي٠



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کيږي٠

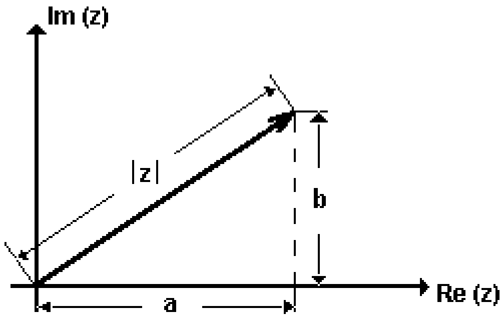
دا د په |z| سره ښايو او د پيتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کيږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی ليکه

هم وکتل شي٠ مخامخ ځيره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښايي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په دربې ګوډي کې د اړخونو ځانىنیونه یا تباسب له امله باور لري

$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$,................(7,18)

برسیره پر دې باور لري:

$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اینىوولو له لارې لاس ته راځي

$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2$
$= a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2(-1)$
$\Rightarrow$

نو بارورل ري

$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$ (7 , 20)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7, 22)$$

۷ ۰ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{\bar{z}}_2}{z_1\bar{z}_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$(7,23) \qquad z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسی لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right) = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوهمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د Z1 او Z2 لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3} i)$ d) $z = -1 - i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22 + 5i) + (2 + i)$ b) $(3 + 2i) - (5+2i)$

c) $(1+2i) - (1+2i)$ d) $i -(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x + y\,i)(2x + yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

٣ . ٣ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63\ +\ 16i}{4\ +\ 3i}$

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

٤ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

٣ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د ګڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته رااچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي۰ په جملو کېد دې ماتماتیکې یا شمیرپوهنیزه تړنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د رښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی یا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځی۰ د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ ۰ ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه (ثبوت) کې سړی له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې رښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي۰

دا وینا B هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیي) څخه رښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)(د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیاارزښت په جدول کې) له یوې رښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ ــم جدول)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې رښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \geq 1$ ده. له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی: $3x \geq 3$ د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د 3x زیاتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \geq 3x+6.$$

بیلګه:

د یوه ناټیک اوبیونې یا حل کارونه (متود)

د ښوونې دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

لاس ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه رښتیا دي. مګر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو $b \geq 0, a \geq 0$ لاندې باور لري. له دې امله که له رښتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی(سیده ښوونه) او په ناسداړه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څېړنې لاندې ونیول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٨ ٠ ٢ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده٠ وینا یعنې نفیې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده٠ (د ثبوت د رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده٠

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګنونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفیې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورې یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځي

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورې وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کينه لور د څلورى ۰ مربع په بڼه ليکل کيدى شي او هيڅکله له صفر څخه نه شي کوچنۍ کيدی۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتيا دی يا غلط دی، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتيا دی يانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتيا دی ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ ريښه يا جذر $\sqrt{2}$ ايرشنل دی

اوبيونه يا حل : د غوښتني نفيي ده، چې : د ۲ ريښه $\sqrt{2}$ ريشنل ګڼ دی (د ريشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو بايد بيا دوه ټولريشنل ګڼونه q, p, د $q\neq 0$ سره شته وي، چې دا باوري شي: $\sqrt{2}=\frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2=2q^2$

له دې پورته برابرون سره p^2 يو جوړه((جفت) ګڼ دی۰ نو له دې امله p هم يو جوړه ګڼ دی، ځکه چې يواځې د جوړه ګڼ مربع يا څلورى جوړه کيدی شي $p=2p'$ له مربع يا څلورئ کولو او پر ځاي اينوولو لاس ته راځي:

$P^2 = 4p'^2$،

$2q^2 = 4p'^2$

$q^2 = 2p'^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو ځلوری یا مربع ګڼ دئ٠ په دې پسې لرو p او q پر ۲ ویشونی دئ، یانې پرویشپردی نه دئ٠ که پرویشپردي ټول ګڼونه p او q له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي٠

۸ ٠ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ n0 (صفر باید لږ د ن د ښنی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي ګڼونو لپاره باوري کیدی شي٠ یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي٠

بیلګه ۱ :

د ټولو $n \geq 0$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بیلګه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري 1+3+5+… 2n+1)= n²

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینځیپ بنسټ» مخ ته پروت دئ:

که یوه وینا دn= n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په ښنه کېلیکل شوی) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې په ترتیب د ایندکشن ښوونه په دوه پلونو یا قدمونو سرته رسیږي

۱ - د ایندکشن پیل

ښوول کیږي، چې دا وینا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د ایندکشن پل

اوس باید یو ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه وښوول شي۰ له دې امله د ایندکشن پل یا له برخه پلونو جوړ دی

۲ الف: د ایندکشن نیونه :

نیول کیږي، چې وینا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نیونه په V فرمولبند کیږي

یادونه V د نیونې لپاره ځاي پرځاي کیږي یا راوړل کیږي۰

۲ ب – د ایندکشن غوښتنه:

غوښتل کیږي، چې دا وینا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو۰ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي لیکو

۲ ج – د ایندکشن ښوونه :

ښوول کیږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: A=>B

بیلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2° = 1 > 0$

۲ ۰ ۱ ۰ V ته :

$2^k > k$

و ۲ ۰ ۲ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2^{k+1} > k+1$

٢ ٠ ٣ له B <= V : له $2^k > k$ او $2 > 1$ څخه د زياتون له امله لاس ته راځي :

$2+2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بېلګه ٢ :

١ ٠ د n = 1 لپاره باور لري $1 = 1^{\circ} = 1$

و ٢ ٠ ١ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ٢ ٠ ٢ B ته:

و ٢ ٠ ٣ B <= V ته: له نيونې څخه د زياتوون 2k+1 زياتونې او له دې د ښي خوا د يوه بينومځلورۍ(-مربع) په څير انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښۍ خوا انځورونې څخه د بينوم ځلورۍ(-مربع) لاس ته راځی :

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

يادونه : د V او B پر ځاي کړی شو، چې نيونه او غوښتنه وليکو، يانې موږ درې څه

لرو، چې نيونه غوښتنه او ښوونه ده٠ په هغه ورسره بلد ډول يې ښوونه د يوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی يا اوبيونه بللی(اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي يا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم يو، لکه ملګوبی، خړوبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شميرپوهنې سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، کۀ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بيا د ترڼې په ډول ورسره مل کړو٠ ستاسو وړانديزونو ته هم سترګی په لار يم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښایي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تیرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښایي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل ګڼ دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}.$

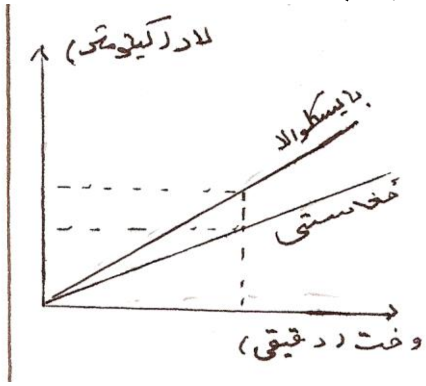
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ ۰ کرښيز- یا خطي-یا لاينيز مساوات د يوې متحولې سره

پيل بيلګه

يو بايسکل ځغلوونکی او يو پلی له يوه ځايه په همغه وخت خوزي يا حرکت کوي، کوم چی په ګراف کی کښل شوی دی(که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به يې هم مرسته وي، خو پرې پوهيدل کومې ستونځې نه لري) بايسکل په ګړۍ کی ۱۵ کيلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کيلو متره په ګړۍ کي ځغلي. دوي پس له يونيم ساعت سره يوځاي کيږي. هر يو څومره لار وهي او يو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

-- ------------

دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې يادیږي، په همغه نامه نه يادوو خو هدف به همغه وي كه دا د برابرون يا مساوات په نامه وبولو .

وخت) په دقيقه (په t ښايو لار) کيلومتر(په s ښايو د لارانځوروني ښخه په ګراف کی څرګنديږي چی بايسکلځغلوونکی له ۶۰ دقيقو وروسته ۱۵ کيلو متره ځغليدلي يعني 15km /hاو پلی ۱۰ کيلو متره يعني 10km/h

غواړود هرڅه لمړی وښايو چی هر يو له يونيم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بيا دويمي پوښتني ته ځواب ورکوو.

بايسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 kmځغليدلی وي او پلی به 2.10km=20kmځغليدلی وي بايسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km

15.tkm=لار وهلي وي. دلته وختt خپلواك اوړيدونی يا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړيدونی يا ناپيژندونکی يعني د t په واك کی دی. دا کليمي به بيا د فنکشن او څيرونو په برخو کی پوره تر څيرني لاندې ونيول شي. د بايسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r يې ښايو برابرون داسی ليکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بايسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بايکلځغلولو وخت دی طبعآ زياتيز يا مثبت دی ورته دپلي چی په lيي ښايو وهلي لار هم ټاکل کيږي،يعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پيل ټکي له 1,5 ساعته يو له بل څومره لرې دي. وهل شوې لار :

د بايسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$

د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقيب له 1,5 ساعته وروسته دواړه يو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاينيز- يا کرښيز مساوات :

د کرښيز مساوات فرمول د يوې اوښتونې يا مجهولې x سره داسی دی

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقيقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبيونه (حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقيقي اعداد وښوول شي چی كه په پورته (۱ . ۹) برابرون يا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرايط پوره کړي. د حقيقي اعداد و بنسټيز قانون (۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کیدی شي چې د حقیقي عددد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چې مساوت زخمي شي. داچی ویش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو لیکل کیږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; ....(9,2)$$ ....

دا د (۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی۰که په څټ یا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیرو و

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بیا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم ښه په ځتوالی تشکیلوي ، نو په دې حالت کی حقیقي عدد x شته نه دی چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بیا برابرون (۱ . ۹) لاندې شکل نیسي

0.x = 0

دا برابرون بیا د ټولو رییلګڼونو xلپاره پوره (ډك) دی. یا برابرون پوره کوي.

دا بیا داسی هم لیکل کیږي : (په خوښه bel =x(پس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره یواځنی ټاکلې اوبیونه (۹ .۲) لريږد A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبیونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر رییلګڼ x اوبیونه یا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د یوې اووښتونې یا مجهولی سره د ریيل برابرونونو د ګڼلو ټوله تیوري خوندي ده .

یو لاینیز برابرون (مساوات) (یو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرونونو ترمونو زیاتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سړی په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف په لور زیاتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته راړوي، دا د II . 2 بنسټیز قانون له مخی یو ورته فورمبدلون یا بڼه بدلون دی)(د اوبي یا حل ډیری تغیر نه دی خوړلی) د بیلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زیات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1; ....(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کيڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی ليکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم يا بڼه يو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x = \frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټيك هلته موخه ور يا هدفمند دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کيدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د 0=| a1 په حالت کی په a1 وويشل شي:

$$x = \frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بيلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b - ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي.

ددې لپاره چی د ماتلاندې ښخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرون ترتيبيږي او راټوليګی، xله نوکانو ښخه راوځي

$$a^2bx + a^3x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د $a \neq 0$ له امله کيدی شي په a^2 وويشل شي (a+b)x=2b

دا د لاينيز برابرونونو بنسټيزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که ($a + b \neq 0, (a \neq -b)$ وي ، نو(x = 2b /(a + b

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوګونی یا یواځنی اوبیونه یا حل دئ
که(a = -b) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبیون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زیاتې اوبیونې یا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د نیونی یا فرضیي له امله چی باید $b \neq 0$ وي، موجود نه دئ.
پام:
په دې هکله زیاتې بیلګی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب یا ځله وونې په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی یا متحولې ولري، همغهسی شمیرل کیږي، لکه په رییلعددونو کې۰
دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چیرې اړیینې وې او یا ګرانو لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلګې به هم راوړم او که چیرې کوم د شمیرپوهنې مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅیږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي ځښتن غوښتل۰ زه دومره یادونه کوم، چې په دې هکله زما د شمیرپوهنې بنستیز کتاب کې زیاتې بیلګې راوړل شوي، خو نه پوهیږي، چې دا کتاب به چا ته ورسیږي او که نه

بیلګه 9 . ۲ :
برابرون $(x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c=1$ یوائې
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دئ.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې) سره ځل کوو: $6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x)=6abc$
ورپسی نور، په لاندې ډول، د ځرګندو شمیرلارو یا ـ قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$
$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$
$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بیرته د لاینې مساوات (۹ . ۱) بنستیزه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات یوائنی حل دئ.
د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره د $0x=0$ له امله هر رییل کڼ x اوبیونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره x په خوښه
دلته د ځیرل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول یی لاینیزوالی یا لاینیزتوب پیژندل کیږي، په ځنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرینځیپ) کی کرښیز یا لاینیز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مګر په لاينيز مساوات يا برابرونونو اړول کيدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چی د ناپيژندونکو ضريبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زيات وخت په x هم شرطونه ايښول کيږي.

ددې لپاره لاندې کی درې ساده بيلګي راوړو:

بيلګه ۹ . ۳ :

برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$

د لومړي حل لپاره څلوری برابرون يا مربع مساوات دی، ځکه چی څلوری(مربع) غړي لري. د يو له بل څلولو يا ضربولو وروسته څلوری غړي له منځه ځي. يو لايني مساوات د يوې ځانګړي سره سره پاتي کيږي:

$$24x^2 - 32x - 27x + 36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x + 3x - x^2 - 9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بيلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x - a) / (x - b) = 1$ يواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بيا لرو: $2x - a = x - b \Rightarrow x = a - b$

د $x \neq b$ له امله بايد باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a - b$ لري او پرته له دې ($a = 2b$) حل نه لري.

بيلګه ۹ . ۵ :

مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$

يواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نيونو لاندې باور لري . $x = a + b - c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله يواځي هلته حل دی، کله چی $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات يواځي د $a + b \neq c$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غير له دې ($a + b = c$) حل يا اوبيونه نه لري

بيلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څيړنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې ټيك د $abc \neq 0$ لپاره يو هدف لري، بايد د اصلي مات لاندې پيدا كولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تکرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$
$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$
$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$................ = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دئ

که برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوکانو يو له بل ځلولو راټول، ترتيبونه او ويشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونو يا ضريبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نيونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکيږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \; abc \neq 0$$

د دې وظيفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.
تر اوسه مو هغه ماتونه وڅيړل چې مات لاندې يي له ځلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅيرو چي مات لاندې يي له زياتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په ځلوونو ټوټه کيدلي يا تجزيه کيدلی شي .

بيلګه ۹ . ۷ :
برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټيك د دې نيونو سره صدق کوي $ab \neq 0$, $1 / a^2 \neq |x|$. :

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پیداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 -1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. (a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندی)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي(، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$

$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$

$$.............2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$

$$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

$$..................................x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $0 \neq ab$ لپاره(دا د نیونو له لارې تل پوره دی)که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بی له هغو چی په بنسټیزو نیونو کی له نیونو د باندې ساتل شوي وي) یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د xمطلقه ارزښت د کېنونو $a = b$ د په څېټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی .د x لپاره نیول شوې نیونی د حل ورکولو کی باید په پام کی نیول شوي وي دا په دې مانا چي باید تل پوره وي:

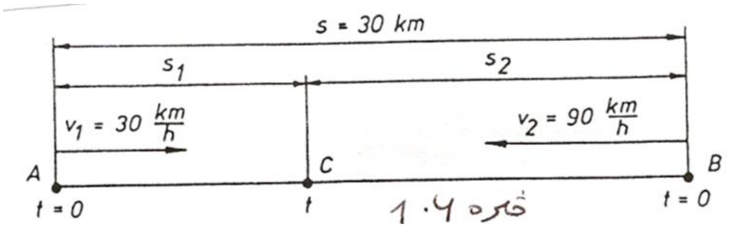
$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بیلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډي تمځایونه Aاو B یو له بل km30 لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکتیا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوزيږي. د Bڅخه يو تيز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به يو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزيکي لويي يو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځانتيوني لپاره ځيره ځېره وکاږی



پوښتنه » چيرته « د دواړو ګاډو د يوځايوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کيدی شي د A څخه و C ته لريوالي(د بار کاډي لارs1) يا د Bلريوالي وC څخه(د تيزګاډي D لار s2) سره وشميرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو يوځايوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانيدو تر يوځايکيدو وټاکو. دلته درې اوړېدوني يا مجهولی مخ ته لرو t او s1 , s2 .

د پورته ورکړشو شي نيونی سره مناسب لاندې اړيکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \ , v_2 = s_2 / t \ , \ s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو مارونې يا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , s_2 = 90\,t \ , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی يونونه(واحدونه) پرينسوول کيري. او پريکړه کوو چی لار په کيلو متر او وخت په ساعت ښايو)!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو يا مساواتو سره چی حل به يی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چی دا مساوات په يوې مجهولی مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کيدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که وليکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي .s2 = 30 - x دا په لمړنيو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30-x) / 90$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاینیز ټاکنبرابرون یا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کیدی شي:

$30x = 30 - x$, $4x = 30$ $x = 7,5$

نو لرو

$s_1 = 7,5$ km , $s_2 = 22,5$ km , $t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15$ min

که ولیکو $s2 = x$ ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي یا بهیر نیسي:

$s_1 = 30 - x$, $t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

, $x = 22,5$

$s_2 = 22,5$km , $s_1 = 7,5$ km , $t = (22,4/90)h = 1h/4 = 15$ min

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتوني یا ناپیژندونی په څیر وټاکو، نو بار لري یا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90x = 30$

$20x = 30$

$x = 30 / 120 = 1/ 4$, $t = (1/4)h = 15$ min

$s1 = 30t = 30/4$ km$=7,5$km

$s2 = 90t = 22,5$ km

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د $0,25$ h$= 15$ min حرکت وروسته په 7 , 5 km لریوالی یو بل سره مخامخ کیږي

بیلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځې د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بیلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څیړنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.خ. تکرار شي.

$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 . a . b^4 . c^3$

$2880a^3bc = 2^6 . 3^2 . 5 . a^3 . b . c$

$5400 a^2b^2c^2 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . a^2b^2c^2$

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 . 5^3 . a^3b . c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل خلولو راټول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅېړل چې مات لاندې یې له څلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅېړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په څلونو توټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي: $ab \neq 0 \quad , \quad |x| \neq 1 / a^2$.

اصلي مات لاندې (ا م ل) په لاندې ډول پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \qquad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چي يو يا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي) ، لنډونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$a^2(2bx-1) + b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1) + b^2(2ax-3) - b^2(a^4x^2-1)$$
$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 + b^2$$
$$2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$
$$2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$
$$x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنستیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي(یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنهونو $a = b$ د په ځتې ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

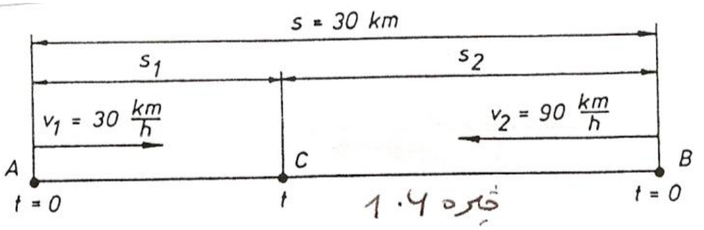
د x لپاره نیول شوې نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي؛دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. دB څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویې یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t اوv سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



څیره ۶ . ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزګاډي D لار s_2) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو s_1 , s_2 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوری ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , \ s_2 = 90\,t \quad , s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه پریښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا درې مجهولې s_2 , s_1 او t دی د دري مساواتو سره چې حل به يې په ۶ الف او يا همداسې په برخه ۱۱ کې ورکړشوي وي، مګر دا دومره ساده دي چې د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چې دا مساوات په يوې مجهولې مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولې x په ځای کيدی شي s_2 , s_1 او t وټاکل شي. که وليکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنيو دوه مساواتو کې ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30 - x) / 90$$

لايني ټاکنمساوات د x لپاره دي، چې ساده حل کيدی شي:

$$30x = 30 - x\,,\ 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5\text{ km},\quad s_2 = 22{,}5\text{ km},\quad t = \frac{7{,}5}{30}\text{h} = \frac{1}{4}\text{h} = 15\text{min}.$$

نو باور لري:

که s2=x کیږدو،نو شمیرنه په لانې ډول ځغلي یا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x,\quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90}\,,$$

$$3\,(30 - x) = x,$$

$$90 = 4x,$$

$$x = 22{,}5,$$

$$s_2 = 22{,}5\text{ km},\ s_1 = 7{,}5\text{ km},\quad t = \frac{22{,}5}{90}\text{ h} = \frac{1}{4}\text{ h} = 15\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څیر وټاکل شي، یعنې x=t ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$

$$20\,x = 30,$$

$$x = \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\quad t = \frac{1}{4}\text{ h} = 15\text{ min}.$$

$$s_1 = 30\,t = \frac{30}{4}\text{ km} = 7{,}5\text{ km},$$

$$s_2 = 90\,t = 22{,}5\text{ km}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15min خوزښت(حرکت) وروسته په 17,5kmکې يو بل سره مخامخ کيږي.

۹ . ۲ تمرينونه

۱ . ناکرښيز يا نالاينيز مساوات د يوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ aاوb نتيجه يې د ازمايئ! د مجهولو ضريبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b يې نه شي غوره کولی يا نيولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره يواځنی حل لري، حل نه لري او يا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رويه د نورو مجهولو ضريبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ –بې له کسرونو يا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضريبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3\left(6\frac{1}{2}+x\right)-\frac{7}{3}\left(2x-\frac{19}{2}\right)-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴. ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$ b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$ ؛

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$ d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج یا مات لاندې کې یې ناټاکلي ضریبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$ d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶,۱ – کسرمساوات يا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ . شي تمرينونه

۱ . ۷ ۱ – که د يوه ګڼ څلور څله او ۱۴ زياتون ۴۰ وي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د يوه ګڼ څلورڅله او ۴ زياتون ددې ګڼ او ۱۴ زياتون سره برابر وي ، نو هغه ګڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د يوه ګڼ څلورمه برخه او پنځه څله ۴۲ ګڼ ورکوي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۴ – که د يوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په يوه ګڼ وويشل شي چې ۴
ترې کم شوی او ۱۱ لاس ته ترې راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟

۱ . ۷ . ۵ – د يوه ګڼ پنځه ځله او د ۳ زياتو دوه ځله لوي دی. لکه د د ې ګڼ درې
ځله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۶ – د يوه ګڼ څلورځله او ۱۴ کمون نيم دومره لوي دی لکه ددې ګڼ دوه ځل
او ۸ . دا ګڼ څه نوميږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د يوه ګڼ شپږ ځله او د ۵ کمون يا توپير چې ددې ګڼ په څلور ځله او ۵
زياتون وويشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نوميږي؟

۱. ۷ . ۸ – د يوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او
مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته
ترې راځي. دا ګڼ څه نوميږي.

۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسې په دوه ګڼونو بيل کړی يا تجزيه يا ټوټه کړی، چې د مربع توپير
يې ۱۲۵ شي.

۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپير يا کمون ۶ او مربع يې ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نوميږي؟

۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسې تناسب کې دي، يا يو بل ته داسې ځانونه نيسي .
که دوم په لمړی وويشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتې يې ۷ دي.
دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاينيونکي ګڼ پروت زياتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي،
نو يو دوه ځاينيونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځايګڼونو سره مګر په
څټ ترتيب سره.

۱ . ۷ . ۱۳ – يو زدکړی غواړي د يوه ګڼ څخه مربع رېښه د يو په بل کې بندولو
پرېنځيپ يا اصول له لارې پيدا کړي. دی لمړی يو ګڼ د رېښې په خير

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکي، چې مربع یې په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه ریښه ټاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ریښې مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ریښه یې غواړو پیدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – یو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسی حال کی چې نورو ډلی 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول 2 / غړي په بر کی نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – یو نفر په درې ورځو کی مجلی په داسی شمیر خرڅوي: په لمړی ورځ 1 / 9، دومه ورځ 1 / 6 او په دریمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمایي دوه کمي د څان سره لري. هغه څومره مجلی د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – یوه میلمه د یوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه څواب ورکړ« څما پلار چی درې میاشتی پخوا یی خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، څما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زیات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د یوه زدکوونکي پلار څلورنیم څله زوړ دی لکه د هغه څوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د یو اویاکلن نیکه څخه څوان دي، پلار او څوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په یوه معما کی یو زدکوونکی د ې بل ته وایي: « که زه لما سره بټوه کی پیسو سره ۵،۲ افغانی ور زیاتي کړم ، زیاتون یی له ۵ سره څل یا ضرب کړم او له دې څل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا توپیر په 11 وویشم نو نتیجه یی ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کی څومره پیسی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسی تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوي دي،
دریم دوه ځله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي
مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اومیگا) ، په دې پروت شپانونك
۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) یوگوني مقاومتونه څومره لوي دي، ب
برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۲۰.۷ – د دوه غبرگ چالان عمومي مقاومت (ماته متآسفانه په افغانسان کی د
فزيك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چي په هدف به پوه شو) دی
a) 1000Ω , b) 2000Ω
یو مقاومت4000Ωدی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دریم یی دربواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت a) $12k\Omega$, b) 300Ω وي؟

۲۱ . د دریې غبرگو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دریم یی درہواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت الف) $12k\Omega$
ب) 300Ω
وي؟

۲۲ . په اوبو کي یو د لرگي منډه باید څومره لوي وي، چي د لمبیدو استعداد
یی ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرگي خاص وزن یا کلکوالی (د فرمول څخه
معلومیږي چی دا څه شی دی) $4\frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوډ د سونګ مواد لري.
څومره تیل او څومره بتزین په ټانك کی موجوددي که ګډونه یی وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي.
دا چی د مخه خرکړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په
سرك بیا ۲۰ ونی زیاتی کینبنول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته
څومره لوېي دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵
کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی
متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کی ، دا وروسته وړونکی د پروسېرکلني وړونکی څخه یوه نیمه
دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړي
چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره
ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په
ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي.
برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو
وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ
سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ کومبیناتوریك - د بینوم جمله

کومبیناتریک څخه په شمیرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې یو ګڼ ، پل ځاي بدلو
څومره والبنابې او که څو ګنونهخپل ځاي بدل کړې دا څنګه لیکل کیږي۰ د ځای بدلون
شمیرنه ده
او د هغې ډولونه۰
په ۰ ۱ ۱۰ او ۰ ۱ ۰ ۲ برخو کی به د شمیرپوهنی مرستندوي مواد د بینوم
جملی(۳.۱۰)
برخه(او کومبیناتوریك (۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتیت کلیمي او بینومیالکوایفیڅینت
(بینوم ځلوني) پیل شي .

۱۰ . ۱ فاکولتیت Die Fakultät, factorial

پیژند ۱۰ . ۱ :
د n!سومبول (ویل کیږی n « فاکولتیت «) لاندې سرې له1 تر n پورې ګڼونو ضرب
پوهیږي، یعنی $n ! = 1.2....(n-2).(n-1).n$ برسیره پر دې تعریفوو: $0! = 1$

د فاکولتیت له پیژند څخه څرګندیږي، چی $(n+1)! = n!.(n+1)$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:
په افغاني ادبیاتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتیت په ځاي فاکتوریال لیکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کلیمه یا پښتو ، ځله وونې،، زیات کاره ولی، هیله ده چی تاسو به یی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی٠

بیلګی :

الف !n : د n = 5 لپاره په دې ډول دی: 120 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = !5

ب : په دې ډول دی : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$

پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بینوم ځلوونې یا ضریبونه

پیژند: ۱۰ . ۲

د سیمبول $\binom{n}{k}$ (وییل کیږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهیدل کیږي چی هر یو k ځله وونې یا ضریبونه یا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k}\frac{n+1-i}{i}$$

برسیره پر دې دا هم په کلکه کره کیدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ يو پيداينتي يا طبعي ګڼ دی او د ماتلاندي او مات باندې ګڼونو ګڼون يا تعداد ښايي،په مات لاندې کي د لومړيو k پيداينت يا طبعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رييل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور n - 1 ، دريم n-2 تر k –م فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اويلر(leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سويسي ګڼپوه، فزيکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړې ځل لپاره پيل شو، له دې امله ورته د اويلر سومبول وايي پرتله يا مقايسه برخه ۱۰ . ۳ (. که څوك ديوه بينوم پوتنځ يا توان شميري) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سيمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چې د يوا- ځنيو زياتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بينوم ضريب يا بينوم ځله ووني ويل کيږي.

بيلګې :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ ، } \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعريف نه دی ، ځکه چې 3 / 1 پيدأينتي يا طبعي ګڼ نه دی.

د بينوم ضريبونو يا ځلونوخويونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ - د $n<k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$

که n یو طبعي ګڼ وي او له k کوچنی وي، نو صفر په ماتباندې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سرې د !(n-k) سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k ولیکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کین اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په څیر ولیکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون ګډ فاکتورونه چی په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ۱ افاده یا وبینه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله وونې په څیر ولیکل شي، لاندې بینومیال یا بینوم ځلوونی (ضریب) تعریفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بینوم جمله

د بینوم لاندې سړی د دوه توکو (ګڼونو) زیاتون پوهیږي. یعني: x+y
د بیونم جمله موږ ته ښايي چی څنګه د یو بینوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چی پیدایښتي ګڼ n یی ایکسپوننت یا جکګڼ یا لنډ جګ وي، د زیاتون په څیر پر مخ بیول کیږي. که د x + y بینوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اکسپوننت لپاره شمیرو، نو لاندې نتیجه لاس ته راوړو :
پاسکال دریګوډی

$$(x+y)^0=......................1$$
$$(x+y)=....................x+y$$
$$(x+y)^2=...............x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=.............x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=..........x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5=....x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې د زیاتونونو پرمخبیولوکی یو قانونیت لیدل کیږي. د زیاتونو ګڼون(شمیر، تعداد) د بینوم د اکسپوننت څخه په یو لوي دی . ټول زیاتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په داسی ډول چی د x او y پوتنځ زیاتون په n برابریږي او په دې ډول د x پوتنځ په کمیدلو) د y پوتنځ په زیاتیدلو دx په اکسپوننت په ترتیب پرلپسی

n , n-1, ...1 , 0

د yاکسپوننت په ترتیب 0,1 ..n-1,n,دي. د بینوم پوتنځ کوایفڅینتونه داسی په نامه پاسکال Blaise Pascal(۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه(ګڼوندریګوډی جوړوي .

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کیڼ-ښي پرتوګڼونوزیاتون دی، چی بي له کړاو د نورو اکسپوننتویا په جګو ,n = 7,8... .. لپاره پرمخ بیول کیدی شي. د ډیرو لویو اکسپوننتو n لپاره بیا هم دالار له کړاو ډکه ده لیونارد اویلرLeonhard Euler د کومبیناتوریك فکرونو کی د کوایفیڅینتونو یووني یا یوونوالي یا بهتره یوونوالیز ستروکتورونه یا جوړښتونه وپیژندل. په n -م n (د بینوم جګ یا اکسپوننت (لیکه اوK- م ځای، n ,.... , 1 , 0 = k کی ولاړ ضریب دفورم څخه دی) له کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اویلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بینوم ضریب په

څیر رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دریګوډیَ د اویلر سومبول استعمال په څیرولیکل شي نو لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\binom{0}{0}$$

$$\ldots\ldots\ldots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\ldots\ldots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\ldots\ldots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\ldots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داویلر سومبول کی د فاکتور پرځاي ، چې ګڼونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ لیکل کیږي.

یادونه : ما کله a,b او کله بیا x,y لیکلي، دا په یو ډول لیکنه ښکاریږي،
خو زه کله کله داسې ستونځې لرم .
په ۱۰ . ۲ برخه کی د بینومیالکوایفیڅینت لپاره ښوول شوو خویونو۲ په بنسټ د پاسکال
دریکوډي منځنی محور ته سیومتري پراته کوایفیڅینته سره مساوي دي. داچی هر کو-
ایفیڅینت وربانديې پورته کوایفیڅینتونو زیاتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو)
د تمرین وظیفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله) مقایسه(شي) د اویلر سیمبول په
استعمال
د یوه بینوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زیاتون پرمختک د یوه طبیعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول
لیکلو ته اجازه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۱ (د بينوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ايندکشن له لارې:

د ايندوکشن پيل : (n = 0)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ايندکشن نيونه : (n = k)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n$$

$$+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دايندکشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k$$

$$+\binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کږې پرتی) برابر پوتنځ یا توان ځلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونخویونو د استعمال له لارې سره راټول (یوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{0} = \binom{k+1}{1}, \binom{k}{2} + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{2}, \ldots, \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = \binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوې اړیکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}, \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بینوم له جملی د یوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}(-b)^i$$

بیلګي:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

۱۰ . ۴ کومبیناتوریك:

کومبیناتوریك د یوې ډیری د پای غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخي یوځاییولو په څیر راوړل شي، په یوځاییولو کی کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنګه په راټوځاییولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي د غړو تکرار راشی او یا هم نه. له دې امله د یوځاییولو یا ټولګی درې ډولونه توپیروو(Komplexion هم ورته وایي)، په نامه پرموتیشن، وارییشن، کمبینیشن (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چې په لاندې برخو کی یو په بل پسی څیړل کیږي او په اخرنی جدول کی به لیدیدونکی څرګند شي یا لیدوړو ښوول شي

۱۰ ۰ ٤ ۰ ۱۱ **پرموتیشن**Permutare
(لاتین: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پیژند ۱۰ . ۳ :

د n غړو یو پرموتیشن (ځاي بدلون)بې له تکرار داسی »یوځاي درول« دي، په کوم کی چې n غړي په یوه د زړه پوري ترتیب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتیبونه تل د مختلفو پرموتیشنونو یا ځايبدلونونو په مانا ده

بیلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتیشن

الف : 1 2 دی 12 21

ب : a , m دی am ma

۲ - د درې غړو پرموتیشنونه

الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

4123	3124	2134	1234
4132	3142	2143	1243
4213	3214	2314	1324
4231	3241	2341	1342
4312	3412	2413	1423
4321	3421	2431	1432

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایي ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیداېښتي ده، چې د پښتو لیکسیکایي ترتیب پچه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کښ کښته لور ته بیا بیرته پورته

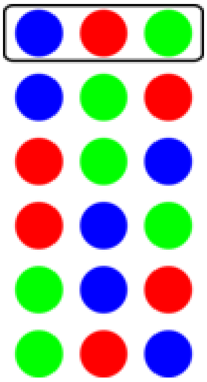
uams	samu	masu	amsu
uasm	saum	maus	amus
umas	smau	msau	asmu
umsa	smua	msua	asum
usam	suam	muas	aums
usma	suma	musa	ausm

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ (ا ت ج ګ دي:دلته طبعاً له ښي وکيڼ لورته ترتيبيږي(

اتجګ	تاجګ	جاتګ	ګاتج
اتګج	تاګج	جاګت	ګاجت
اجتګ	تجاګ	جتاګ	ګتاج
اجګت	تجګا	جتګا	ګتجا
اګتج	تګاج	جګات	ګجات
اګجت	تګجا	جګتا	ګجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلګی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دي مانا چی د ليکسکا لغاتو ترتيب ته »کتې متې« (ورته) دی، چی د غړو پيدايښتي لړی مخته پرته وي (په تورو، په ګڼونوکښطبعی يو په بل پسي). دبيلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دي غړو) يا تورو(جوړ شوي پرموتيشنونه) لغاتونه(maus همدا رنګه saum په دي ترتيب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ (کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ګ پرموتيشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی يي تاګج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی يي جتاګ ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته درې غونډارو لپاره نظم یا ترتیب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که لیکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي لیکو $6! = 720$:

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو Pn ګڼون (شمیر یا تعداد) ، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې ډول دی : $Pn! = n$

اوبنونه : د پوره ایندکشن له لارې :

دایندکشن پیل : $(n = 1):\quad P_1 = 1! = 1$

د ایدکشن نیونه : $(n = k):\quad P_k = k!$

د ایندکشن غوښتنه : $(n = k+1):\quad P_{k+1} = (k+1)!$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په k! پرموتیشنونو کی د ځل په څیر یو(k+1) -ام غړی راځي. دا (k+1) - ام غړی کیدی شي له لومړې تر (k+1) - ام ځاي پورې ودریږي، داسی چی د (k+1) -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن k+1 پرموتیشنونه د k+1 غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\,(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلګه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسی (دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شئ) کی لس زدکوونکی په یوه لیست کی خپل نومونه لیکلی شي ؟

اوبی یا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ •

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتیبونه، د کومو څخه چی i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کیږي،

د i = 1 , 2 , ... ,k لپاره، نو پرموتیشن د تکرار) د تکرارسره پرموتیشن(سره نومیږي . د غړو شمیر په پرموتیشن کی بیا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

بیلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتیشن په کوم کی چی غړی a یو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کیږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دي ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتیشن، په کوم کی چی a دوه ځله، غړی b دري ځله رامنځ ته کیږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندي ډول دی

abbba	abbab	ababb	aabbb
	babba	babab	baabb
	bbbaaa	bbaba	bbaab

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتیشن ګنون یا تعداد $P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)}$ ، له کومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کیږي ، په لاندي ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه یا اوبیونه: که په پرموتیشن کی n = n1 + n2 + ...+ nk (دلته دي ګنونه دn ایندکس کي ومنل شي) غړو یو له بل توپیر لرودی (مختلف وي) ، نو n! پرموتیشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچې د ni غړو لپاره ni!
پرموتیشنونه موجود دي، نو ni پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څیر رایو ځاي کیږي،

دا په دې مانا چې د!n شمیر په $n_i!$ باید وویشل شي (i = 1 . ..., k)

بیلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کی چی لومړی (n_1-1) -ځله او دویم (n_1-2) - ځله رامنځ ته کیږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دویم (n2 = 3) -ځله رامنځ ته شي، دی

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ وارییشن اوښتنه یا بدلیدنه Variation :

تعریف ۱۰ . ۵:

د n غړو واریشن (بدلیدنه یا اووښتنه Variation) لاتین(بدلونه اووښتنه تغیرونه یا بیا تغیرونه) و k -ام ټولګي ته(وهرې k ټوټی ته، $n \leq k$) هر له k غړو یوځاںکول (یوځاي درول، یوځاي لیکل) دی، کوم چی د n غړو د لړۍ پرلپسی په نظر کی نیولو سره جوړیږي..

بیلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c وارییشن و دویم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ab	ba	ca
ac	bc	cb

۲ - د څلورو غړو d , a , b , c واریېشنونه و ۲ - م ټولګي ته دي:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

د څلورو غړو d , a , b , c واریېشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دې

dab	cab	bac	abc
dac	cad	bad	abd
dba	cba	bca	acb
dbc	cbd	bcd	acd
dca	cda	bda	adb
dcb	cdb	bdc	adc

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واریېشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

51	41	31	21	12
52	42	32	23	13
53	43	34	24	14
54	45	35	25	15

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو واریشنونه و n -ام تولګي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا برابر کیږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو و k -ام تولګي ته د واریشنونو ګڼون (تعداد) $V_k^{(k)}$ دی :

$$V_k^{(k)} = n(n-1).(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبنونه : د مکلمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې) ایندکشن په k اړه لري، n ځاي په ځاي دی یا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ایندکشن پیل :(k = 1)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

تیك (صحیح) دی ، ځکه چی له n غړوکیدی چی له یوه غړی جوړ واریشنونه جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : (k = k0) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت:):(k0 +1 = k)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دایندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واریيشن لپاره، په دې واریيشن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی n - k0 غړو شمیر دی .که په ترتیب یو له دې n - k0 غړو د دې k -م تولګی واریشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې يو دk+1 ټولګي n - k0 واريشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واريشنونو $v_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واريبشنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0)=\frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چيرې يود n - k0 غړو ورزيات په يو بل ځای کېښوولی وی، نو يودk+1 ټولګي واريېشن به يې لاس ته راوړی وی، کوم چې همدا اوس موجود دی. دا سړی په بيلګه ۲ (n = 4, k = 2 , k =3) باندې ليدوړ کولی شي)

بيلګي:

۱ - د درې غړو واريېشنونو شمير و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)}=\frac{3!}{(3-2)!}=6$

۲ - د څلور غړو واريېشنونو شمير و دوم ټولکی ته دی: $v_4^{(2)}=\frac{4!}{(4-2)!}=12$

د څلور غړو واريېشنونو شمير ودريم ټولګي ته دی: $v_4^{(3)}=\frac{4!}{(4-3)!}=24$

۳ - د پنځه غړو واريېشنونو شمير ودوم ټولګي ته دی: $v_5^{(2)}=\frac{5!}{(5-2)!}=20$

پيژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واريېشنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چې يوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واريېشنونه د تکرار سره نوميږي يا بلل کيږي.

بيلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واريېشنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ca	ba	aa
cb	bb	ab
cc	ba	ac

۲ - ځلور غړو a , d , c , b د دويم ټولګی واريېشنونه د تكرار سره دي:aa

da	ca	ba	
db	cb	bb	ab
dc	cc	bc	ac
dd	cd	bd	ad

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دريم ټولګي واريېشنونه دي(دا لاندې ولاړ ترتيب له كيڼ وښي لور ته دی، خو په لاندې كې په څېړ شوی)

311	211	111
312	212	112
313	213	113
321	221	121
322	222	122
323	223	123
331	231	131
332	232	132
333	233	133

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام ټولګي د وارییشنونو شمیر $V_{W_n}^{(k)}$

$V_{W_n}^{(k)} = n^k$:د تکرار سره دی $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل (k = 1) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحیح دی، ځکه چی له n غړو څخه n وارییشنونه،چی هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه (k0 = k) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه (k0+ 1 = k): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د (k0 + 1) -ام درجی وارییشنونه د nk وارییشنونو چی k0 – امه درجه وارییشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چی له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دې، چی په واریشنونو بی له تکرار شوې ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمیر $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ وارییشنونه دی.

بیلګي :

۱ - د درې غړو و دوم ټولګي ته د وارییشنونوشمیر له تکرار سره دی

$$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$$

۲ - د څلور غړو و دوم ټولګی ته د وارییشنونو شمیر له تکرار سره دی

$$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د درې غړو و دریم ټولګي ته ض واریيشنونو شمیر له تکرار سره دی

$$V_{W3}^{(3)} = 3^3 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښی یوځای کیږي.

د یوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښو شمیر دی

$$V_{W2}^{(1)} + V_{W2}^{(2)} + V_{W2}^{(3)} + V_{W2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبینیشن (Kombination (لاتین: یو بل سره تړل)

تعریف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته (n > k) یو کمبنیشن هغه دی چی هر یو له k غړو یوځاي دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نیولو سره، جوړوي.

کمبینیشن له وارییشن منځ ته راځي، که چیری نظم په پام کی ونه نیول شي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډول دی:

ac bc

ac .....

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډل دی

ab bc cd

..... ac bd

ad ....

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې څلو غړو ودريم ټولګي ته کمبينيشنونه په لاندې ډول دي:

bcd abc

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دريم ټولګي ته کمبينيشنونه په لاندې ډول دي(لاندی هم بايد له کيڼ لاندې لورته په ښی لور ليکل شوي وی)

345 234 123

235 124

245 125

134

135

145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د کمبينيشنونو شمير دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اوريیشنونو شمير دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبينيشنونه له واريیشنونو په دې توپيريږي، چی ترتيب په نظر کی نه نيول کيږي، دا بيا دا مانا لري چی ټول د k غړو k! پرموتيشنونه په يو کمبينيشن کی يوه ته يوځاي کيږي

.له دې امله لرو :

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینشنونو شمیریا ګڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دی‌د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمیر دی

الف (یو شپږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : یو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تیپ عددونه د یوه ۴ عددونوګروپ څخه بوځاي کیږي، چی له ایستل شوو شپږ عددونو (۴ تیک یا صحیح) او دوه عددونه(۲ پاتی عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبینیشن، په کوم چی یواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبینیشنونه د تکرار سره نومیږي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینشنونه دي.

aa ....

bb ab ......

cc bc ac

۲ - د ځلور غړو d , a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي

aa ....

bb ab ....

cc bc ac ....

dd cd bd ad

۳- د درې غړو 1 , 2 , 3 و دریم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي(لاندې لیکنه باید له کینې لور پیل وی، خو دلته له ښی لور پیل شوی وکینې لور ته)

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تکرار سره د کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی(چی په kد پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نخښنه وي . (نخښنه شپږ اړخیز ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لوېږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،وارییشن،کمبینیشن ټولګه

داا	د په پا یوې برخی راټولونه م کی نیولو شوو غړو		د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه
	له نظم تیریدنه	نظم په پام کی نیونه	
	کمبینیشن	وارییشن	پرموتیشن
د ټول غړي یوله بل توپیر لري	د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $C_n^{(k)}=\binom{n}{k}$	د n غړو وارییشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $V_n^{(k)}=\frac{n!}{(n-k)!}$	دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګڼون $P_n=n!$
له تکرار سره	د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)}=\binom{n+k-1}{k}$	د n غړووارییشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)}=n^k$	د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,\ldots n_k)}=$ $=\frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ – لاندې فاکولتی وشمیری

الف) 7! ، ب) 3!.5! ، پ) 6! / 4!.I0!

۲ – لاندې ویشونه ساده کړی

a) $(n+1)! / (n-2)!$ b) $(2n)! / n!$ c) $n! / 2n!$

۳ – لاندې افادې وشمیری!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\dfrac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زیاتونونه وشمیری!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونی(استعمال) په بنسټ وګټی!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2-y/3)^4$ e) $(2\ \ a+3\ \ b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده کړی!

a) $(-1+a)^2-(1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

c) $(\ \ ab-1)(-a-\ \ ab)+ab$

۷ – د بینوم په یو خل یی بیل (تجزیه) کړی!

a) $25a^2+10\,ab+b^2$ b) $(49a^2-42a+9$

c) $169a^2-130\,ab+25b^2$ d) $2x+2.\ \ 6xy+3y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ - الف) د غړو ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ پرموتیشنونه په لکسیکوګرافي نظم ولیکی!

ب) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو ځایونو کی« fahne » او« hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر» دي.

۹ - الف) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟

ب) څومره پنځهٔ ځیفري ګڼونه د پنځه ځیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟

پ) د غړوa,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ - الف) د غړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکی، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.

ب) د دي پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګڼی!

۱۱ - څومره تنظیم شوي جوړي د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ - د څلورم ټولګي څومره مختلف واریشنونه د

الف) بي له تکرار

ب) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟

۱۳ - یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرځونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دی. څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو ځل سوری شي؟

۱۴ - له شپږ غړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دی،

الف) بي له تکرار

ب) له تکرار سره؟

۱۵ - یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ - څومره مختلفی ازمایني ممکن دي که په یوه تولید کی له هر ۲۰ یوه وازمایل شي؟

۱۷ - په موټرو ترافیك نخښې په لاندې توګه یوځای شوی : یوه د ځاي نښونه ډله د نخښې الف بې پسې څلور ګروپ یا ډله راځي، چې له ځیفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د یوې کره ټاکلې الف بې پيژندنښې یا ترافیکی نخښې ممکن دي؟

۱۸ - د مختلفو اندازو او د خاممواد جوړ نلونه ، د رنګونې له لارې یو له بل توپیریدی شي ، که څلور رنګ نښوني ولرو؟

۱۹ - د منډې یوه میچ په اخرکی شپږ پاتی منډې وهونکی برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟

۲۰ - په څومره ډوله

الف) اته مختلفې مرغلرې،

ب) درې سرې، څلور شنې، یوه زرغونه مرغلره

ترتیبیدلی شي؟

۲۱ - څومره تلفونونه کیدی شي وتړل شي کی یواځي پنځه ځایزه نمره موجود وي؟

څومره تلفون تړل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځایزې وي او په 0 پیلکیدنه یی اجازه ونه لري؟

۲۲ - د درې شپږسترګیو (یا -اړخیزو) سره (ځیره مکعب دی اومخونه له یوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته یې د پښتو نوم نه راځي او االماني یی Würfel دی) څومره مختلفی اچونی ممکن دي، چې ټولې شپږسترګې مختلفې سترګې ګنون وښايي؟

څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګیو سره ممکن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چی څه به تکرار وي، خو هغه لاتین متل دی، چی » تکرار د زدکړې مور ده .«
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چی n اووښتونې یا مجهولی یا ناپیژندونکی لري، وقف ده، چیرته چی m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی شي
په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر څیړنی لاندې نیول کیږي، چی د ښوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي، چی د حالتونو توپیریدنه یې اړیینه ده۰
دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی دری ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نیسي۰
یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ د برابرونونو له څیرې پوهیږو، چۀ دا یوه کرښه ورکوي، چې لاتین یا کۀ غواړئ انګریزي یې لاین نوموليٰ٠ د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسې منځپانګی سره یې توپیر وي،نو موږ هم ورته له دې امله لاینیز وایو٠

۱۱ . ۱ . لاینیز برابرون د دوه ناپیژندونکو سره

داسی یو مساوات د دوه ناپیژندونکو سرهکیدي چی په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11 . 1)$$

دلته کیدی شي چی ناپیژندونکی لویي x او y په خوښه رییل ګنونه وي چی یو له بل سره په ورکړ شوي بنه تړلي. یا په بل عبارت : x او y واریابلی(اووښتونکی یا لنډ: اووښتوني) دي، برابرون (۱۱ . ۱) لاینیز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چی د هغي څیره په y,x کواوردینات کی ناپای کرښه ده(۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)

ځانګړی حالت : $a = 0$ یا $b = 0$ په ځانګړې توګه کرښه انځوروي یا په ګوته کوي چی د y - محوراو همداسی د x - محور سره غبرګه د ه .

که دا (۱ . ۱۱) برابرون د دواړو نایژندونکو یا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات یا ټاکنبرابرون ونیول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ددې مسئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهیدل غوښتونکی وي.

د (۱۱. ۱٠) برابرون اوبیونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x ,y) ډیری ده، چی(۱۱.۱) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت $a , b |= 0$ ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱) د y په لور داسی ځوابوو.

$$y = - (a/b) x + c/b \qquad (11 . 2)$$

کیدی شي چی x په خوښه وټاکل شي اوy له (۲ . ۱۱) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چی ناپاي ډیرې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځی یعني د اوبیونې ډیری یا اوبیډیری L په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = - (a/b) x + c/b \} \qquad (11 . 3)$$

داسې لوستل کیږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډیری ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون)٠

ددې لپاره لنډ لیکل کیږي: د (۱۱ . ۱) برابرون اوبی یا حل $y = -(a/b)x+c/b$ ،د خوښی x ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

طبعآ کیدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نیسو، نو د لته د برابرون (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښهy ۰

دا چي په لاندې کی موږ د درېو یا ډیرو ناپیژندونکو یا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپیژندونکې د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, ...$ سره .

ددې په نخښونو سره کیدی شي چی په ځرګند ډول وښایو:

لاندې برابرون د دوه ناپیژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, ...(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دې مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپیژندونکو یا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کیښوول کیدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, ...(11,5)$$

په خوښه x_2

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; ....(11,6)$$

x_1

په خوښه

د a1 =a2 = b = 0 (0.x1+ 0.x2= b = 0(لپاره ناپای ډیر ځوابونه

د په خوښه

$$x_1, x_2, ...(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$$

لپاره

$$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$$

په ځتوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.

نوټ : دلته

$$\infty^i$$

دا مانا لري چې د ناپیژندونې یا مجهولی

$$x_i$$

لپاره i = 1,2.. په خوبنه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاینیز برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سره

د دوه برابرونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1a_{12}x_2 = a_1$$

$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;..................(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کیدی شي چې په اووښتونو یا واریابلو x 1 اوx2کی د بلواکبرابرون یا فنکشنمساوات په ځیر ونیول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښې یو بل غوځې کړي نو دا د مساواتو په سیستم (۸ . ۱۱) کی د کرښو یوګونی(بهتره : یوګونی، یواځنی د بل ځه لپاره کارول شوی) اوبیونه ده یا حل دی.

که دواړه کرښې یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چې د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخې تیك یا فقط مساوات I یا مساوات II حل شي. دلته ناپای ډیر

$$\infty^1$$

ځوابونه موجود دي.

داسي هم کیدی شي چې فورمال

$$\infty^2$$

رامنځ ته شي، که ټول

$$a_{ik} \wedge a_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څیړو. دا څیړو چی، که دا برابرون اوبیونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کیږي، چي کرښه I اوکرښه II غبرګي ځغلي مګر یو په بل نه وي پرتی.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپیژندونکو یا اووښتونو سره، کیدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - یو یواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دی (اصلي حالت)

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دی پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لري)

۳ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابره دی)

۴ - ناپاي ډیر ځوابونه موجود دي.

(ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي)

د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپیژندونکی لري، کیدی شي په اسانتیا وپیژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دی.

په سیستمونو کی چي درې یا زیاتي واریابلی یا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پیژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنکه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پیل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پیدا کړو. دلته باید دري بنسټیز د مساواتسیستم د ځواب کاردودونه)متودونه(تکرار شي:

۱ . د برابر یا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

دواړه برابرونونه د یوې نامعلومی په لور اوبی کیږي(د بیلګي په توګه د x دوه په لور(، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابرون د یوې نامعلومي سره منځ ته راځي۰

۲ - یو د بل پر ځاي کیښولو متود:

برابرون یا مساوات د یوې ناپیژندونکې (د بیلګي په توګهx دوه) په لور ځواب کیږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کیږي، په دې ډول د یوې ناپیژندونې برابرون منځ ته راځي (د بیلګي په توګه دx یو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سرِی یو ټاکلی څو برابره (کیدی شي چی کمیز یا منفي هم وي) د II د I برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسی چي یوه ناپیژندونی بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نیتجي سره بیا دا بله ناپیژندوني څیرِي. دا د داوړو نامعلومو(ناپیژندونو) لپاره کیداي شي . دا متود دبرابرونونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چی د دیترمینانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .
دا متود په درې ځانګړو برابرونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول څلورځلوني(ځله ووني یا ضریبونه) بایدله صفر توپیر ولري یعني $a_{ik} \neq 0$ که چیرې یو $a_{ik} = 0$ د بیلګي په توګه $a_{21} = 0$نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د دریګوډي جوړښت لرودی:

$$I............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;.....a_{11} \neq 0$$

$$II....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;.........(11,9)$$

دلته نو
$a_{21} = 0$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجي څخه یي چی په I کی کښیښودل شوې وی x_1 هم معلومیدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوریتم په استعمال بیا برابرون د دریګوډي شکل باندې اړول کیږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :

سیستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4

II x1 - 2x2 = -5

دا سیستم یواځنی یوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړیکی نه لري

سیستم ۲

2x1 + 3x2 = 4

II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانۍ ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دیٰ . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښایی او په دې ډول د مساواتو اوبیونې ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بې ډیله څرګندده ده چې برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په څټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چې II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$

$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$

$-(7/2)x_2 = -7$

$x_2 = 2;\Rightarrow$

$x_1 = 2-(3/2).2$

$x_1 = -1$

ب) د بل په ځای کینولوکاروونه (عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کی ځای په ځای کیږي٠

$II'':;.........x_1 = 2x_2 - 5$

$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$

$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$

$7x_2 = 14$

$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$

پ) د زیاتونکاروونه: x_1 له منځه ځي، که (-2) ځله د II برابرون و I ته زیات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I:\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2x_1+3x_2=4$$
$$(-2)II:\ldots\ldots\ldots -2x_1+4x_2=10$$
$$I-2II:\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7x_2=14$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_2=2$$

کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II څخه x1 وشمیرل شي:

$$x_1=2x_2-5=4-5=-1$$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي
x2

له منځه یو وړل شي، په دې شکل چې د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$$2.I:\ldots\ldots\ldots\ldots 4x_1+6x_2=8$$
$$3.II:\ldots\ldots\ldots\ldots 3x_1-6x_2=-15$$
$$----------------------$$
$$2.I+3.II:\ldots\ldots\ldots 7x_1\ldots\ldots\ldots=-7$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_1\ldots\ldots\ldots\ldots=-1$$

یادونه : په پورته کې یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته ایښول کیږي، پوهیږو، چې چیرته ټکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :
سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف (مساوي ایښوولو:

I' : x1 = 2 -(3/2).x2
II': x1 = 2 -(3/2)x2
2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x
0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته
x_2
په خوښه. دا په دي مانا چې
x_2
هر ارزښت نیوی شي ۰ له 'I څخه ناپای ډیر ځوابونه لاس ته راځي
$x_1 = 2 - (3/2)x_2$ او x_2 په خوښه.

ب) د بل په ځاي ایښوولومتود: $I' \quad x_1 = 2-(3/2)x_2$,
په II کی ایښول کیږي

$$II' \quad 4.(2-(3/2)x_2) + 6x_2 = 8$$
$$8-6x_2+6x_2 = 8$$
$$0.x_2 = 0 \quad x_2$$

په خوښه له 'II لاس ته راځي
$I' : x_1 = 2 - 3/2\, x_2$ x_2 په خوښه

پ) د زیاتون متود یا لار یا طریقه:

$$2.I \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$
$$II \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$

$$II - 2.I : \ 0x_1 + 0x_2 = 0$$

که یواځی دا مساوات په نظر کي ونیول شي ، نو x_1 او x_2په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چې د x_1 او x_2 ترمنځ په I یا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یواځي یوه ناپیژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:

$$x_1 = 2-(3/2)x_2$$

x_2په خوښه

په همدې ډول:

$$x_2 = 4/3 -(2/3)x_1 ,$$

دلته x_1 په خوښه ټاکل کیږي

بیلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$$I': \quad x1 = 2 -(3/2)x2$$
$$II': \quad x1 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$0.x2 = 1/ 2$$

دا یو په ځتوالی یا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو رییل ګڼ x2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي ليکلو عمليه: $I': \quad x1 = 2 - (3/2)x2$,

په II کی دی په ځای شي

$$II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$$
$$8 - 6x2 + 6x2 = 10$$
$$0.x2 = 2$$

دا مخامخوالی یا په ځتوالی یا تضاد دی ، پس ځواب نه شته.

پ) د زیاتون متود:

$$2 . I \qquad 4x + 6x = 8$$
$$II \qquad 4x + 6x = 10$$

$$2.I - II \qquad 0.x + 0.x = -2$$

په ځتوالی یا تضا د دی ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پیښتنو ځوابونو لپاره اړوند لاربښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم یا بڼه برابرونسیستم ورکړ شوی:

$$I \qquad x /(a+b) +y/(a-b)$$
$$II \qquad x /(a-b) +y/(a+b)$$

دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $b \mid= a$ او $b \mid= -a$ وي، یعنی $|b| \mid= |a|$ وي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود ترلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کیدی شي.

لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:

د I ځل له $1/(a+b)$ او II ځل له $-1/(a-b)$ څخه وروسته دا لرو:

$$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$$

$$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$$

له دې سره د y دواړه ځله ووني یاضریبونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په څټ) نخښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توګه مو یو برابرون د یوې ناپیژندونکی سره مخ ته پروت دی:

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له $1/(a+b)$ او IIله $-1/(a-b)$ سره ځل شي کیدی شي: چی y په ورته ډول وشمیرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومی چی ځموږ د څیړنی لپاره بي مفهومه دی.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو څیړو چی کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات) * (تر څیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

.1 a = 0 , b |= 0

مساوات)*(داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

. 2 a |= 0 , b = 0

برابرون(*)(په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په ښتوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو , y = a - x دلته x په خوښه دئ
3 . a=b=0
دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دئ.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د (3x-2y)(2x-3y) سره ځلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي x , y راپیدا کړو . موږ ځاي پر ځاي کو

$$u=1/(2x-3y)\ ,v=1/(3x-2y)$$

او لاس ته راوړو:

$$11u+18v=13 \iff 11u+18v=13$$

$$27v-2u=1 \qquad -2u+27v=1$$

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$$33u+54v=39$$

$$4u-54v=-2$$

$$37u=37$$

$$u=1 \Rightarrow v=1/9$$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$$1=1/(2x-3y) \iff 2x-3y=1$$

$$1/9=1/(3x-2y) \iff 3x-2y=9$$

له دې څخه غوښتونکی ځواب x = 5 , y = 3 لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ . ۱ . ۳ دویمه درجه دیترمیناتي او د کرامر قاعده

که په ټولیز سیستم(11.8) باندې د زیاتون متود استعمال شي، نودx2د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{12}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ (وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - {}_{21}.I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};\ x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},.........(11,12)$$

که د ارزښتونه په (11 . 8) کی ځای په ځای شي نو تصدیقیږي، چی(11 . 12) په ریښتینی د (11, 8) ځواب دی. له (11 . 10) تر (11 . 12) سړی په واقعیت یا ربښتونی کی د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي(لاربښودوي.)

پیژند ۱۱ . ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه ریبلو ګڼونو $a_{ik}, (i, k = 1, 2)$ د

د ۲ -امه درجه دیترمینانت لاندې ، لاندینی ګڼ پوهیږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};.............(11,13)$$

د اصلي دوه کونجتږي یا دیاګونال (قطر) د توکوځل، تري کم(منفی) د څنګ یا فرعی دوه کوجنتږي(قطر) د توکو ځل(یا) د اصلي دوه کونجتږي یا قطر د توکو ځل څخه د څنګ یا فرعي دوه کونجتږې د توکو ځل کمیږي یا منفی کیږي)

یادونه : دا اوس او وروسته دیترمینانت بڼه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په دیترمینانت کې کربښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (11 . 13) کی د xi ځله ووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په (11 . 8) سیستم کی . د (11.13) دیترمینانت له دې امله د (11 8) (له ماځخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدلیږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شمیرپوهنیزه ناسمي منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو (ضریبونو) دیترمینانت بلل کیږي.

که په (11. 13) کی لومړی (درز، ستن یا متِه یا ولاړه لیکه یا-کیله) د دیترمینانت ولاړه لیکه(په ځای) چی د xi ځله ووني یا ضریبونه دی د (11 . 8) برابرونسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 ولیکل شي نو(په x1 اړونده) لاندې
دیترمینانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{22} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه یا نمره دې) ۱۱،۱٤ (وي‌په همدې ډول که د) 11 . 13 (
دیترمینانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې دیترمینانت لاس ته
راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots (11,15)$$

که له (11 . 10) تر(11 . 12) پورې له (11 . 13) تر (11 . 15) پرتله
یامقایسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۱ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو یا ضریبونو دیترمینانت لپاره په (11. 13) کی

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سیستم (11 . 8) یواځنی ټاکلی ځواب لري
x1=D1/D ; x2 = D2/D /11,17)
په داسی حال چی D1 او D2 د (11 . 14) او (11 . 15) له مخی شمیرل کیږي.
د (11 . 10) او (11 . 11) له امله لرو

جمله ۱۱ . ۲ :
که په (۱۱ . ۱۳) کی د ځلونو دیترمینانت D لپاره باوري وي
(11,18) 0 = D
او د کم له کمه یوې دیترمینانتD1 یا D2 لپاره په (14, 11) یا (11 , 15) باوري
وي
D1|=0 \/ D2 |=0 (11,19)
نو (11 . 8) سیستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون یی یو د بل سره مخامخ دي (
تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :

باوري دي

$$D=D1=D2=0 \quad (11.20)$$

نو يو له برابرونونو I يا II زياتي دیَ) دواړه برابرونونه يو بل ته اړ دی يا د بل په واك کی دي(او د ۱۱ . ۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعماليدلی شي يا کار ترې اخستل کيدی شي.

د ښوونبيلګو په څير دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلګي (۱۱ . ۱ . ۲ برخه) کارول شوي سيستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونکي په ديترنمنانتو ځواب کړي، که چيرې ما دا کار سرت ونه رساوه۰.

بيلګه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7\neq 0$$

پس يوائځنی تاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\-5 & -2\end{vmatrix}=-8+15=7\neq 0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\1 & -5\end{vmatrix}=-10-4=-14$$

له دې امله باوري دی

x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,

بيلګه۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\8 & 6\end{vmatrix}=24-24=0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\4 & 8\end{vmatrix}=16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپاي ډېر ځوابونه موجود دي) بيلګه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بيلګه ۱۱ . ۸ :   د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D =   2   3   =12 -12 = 0

او ورپسې

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چې ځواب نه شته(د 0=| 4 = D2له شميرلوکيدی شي، چې تيرشو)

بيلګه ۱۱ . ۹ :

موږ بالاخره غواړو چي په بيلګه ۱۱ . ۴ کې ورکړ شوی مساواتسيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی   D , D1 او D2 شميرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$\text{.........................} = \frac{a^2-2ab+{}^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2} = -\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت $ab \neq 0$:

دلته دیترمینانت $D \neq 0$ او دا د برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x = \frac{D_1}{D} = \left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right) : \left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right) = \frac{2b}{a^2-b^2} \cdot \frac{(a^2-b^2)^2}{4ab} = \frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د D1 = D2 له امله)

دوم ۱ حالت $a=0, b \neq 0$: دلته $D = 0$ مګر

$D1 = D2 \neq 0$

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته $D = D1 = D2 = 0$

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلګه ۱۱ . ۴ کي ښوول شوي .

دوم ۳ حالت $a = b = 0$:

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو وروسته دبيلا بيلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$
$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

١١ ٠ ١ ٠ ٤ د ګاوس الګوریتم

په ١١ . ١ . ٢ . برخه کي څېړل شوو متودو ټيك په نظر نیولو سره (برابرو لیکلو- په ځاي - او د زیاتون عملیه) ، کره پوهیدلی شو چی ددې په مرسته ټولیز د برابرونسیستم (8 . 11)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه دربېګوډیز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

١ . که $a22 |= 0$ وي، نو لاس ته راځي:

الف) $x2=a2/a22$

ب) برسیره پر دې که $a_{11} \neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

$$x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=$$
$$(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)$$

٢ . که $a22 = 0$ او $a2 |= 0$ وي نو ځواب موجود نه دی یا نه شته

٣ . که $a22 =0$ او $a2 = 0$ وي، نو ٢- م برابرون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بیا ا. برابرون د ١١ . ١ . ١ برخی متود په مرسته ځوابولی شي.

د (11 . 8) سیستم د ځواب پرابلم په دې ډول کمیږي، چی دا سیستم په دریګوډی بڼه یا – څیره واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس الګوریتم دی. یا (11 . 8) سیستم دریګوډی څیره لري او یا ټول aik د صفر سره برابر نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی (11 . 8) سیستم په روځنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

		x1	x2	RS
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II	a21x1+a22x2= a2	a21	a22	a2

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پریښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - ځله له I برابرون څخه کم شي ، نولرو

		x_1	x_2	Rs
I	$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$	a_{11}	a_{12}	a_1
II'	$0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$	0	$a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$	$a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$

که II' لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

		x1	x2	RS
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II'	b22x2 = b2		b22	b2

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که b22 |= 0 وي ، نو x2 له II' اوx1 لهI لاس ته راځي.
-که b22 = 0 , b2 |=0 وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که b22 = b2 = 0 وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی لهI او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

			x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$		2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$		1	-2	-5

که غوښتونکی دریګوډیځیره غواړو لاس ته راولو نو I همداسی پریږدو او له II ځخه د I یو یو په دوه ځله کموو :

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له 'II لاس ته راځي $x2 = 2$
او له I ځخه لاس ته راځي. $x1 = 2 -(3/2)\ x2 = -1$

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (ځیړو. دلته د لمړی لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	10
II'=II-2.I	0	0	2

سیستم۲

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	8
II'=II-2.I	0	0	0

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ ځه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په ځیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅیړل شي

دوم واریانت | اول واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II+(2/3).I	7/3	0	-7/3
1.	2	1	-1

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II-(1/2).I	0	-7/2	-7
2.	-1	2.	2

څلورم وایانت | دریم واریانت

	x1	x2	Rs
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I=I-2.II	0	7	114
2	1.	-1	1.

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I'= I+(3/2).II	7/2	0	-7/2
-1	2.	2	2.

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا څلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوي، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب) له II' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

x2= -7 / (-7/ 2) =2

ت) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

x = (1/ 2)(4 - 3.2) = -1

واریانت ۲ :

ا) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له 'II ځخه دې x1 وشمیرل شي

پ (له 'II لرو: 1- = x1

ت) له I ځخه لرو: x2 = 2

واریانت (امکان) ۳

ا) له II ځخه دې x2 وشمیرل شي

ب) له 'I ځخه دې x1 وشمیرل شي

پ) له 'I لرو 1- = x1

ت (له II لرو 2 = x2

واریانت (امکان) ۴

ا) له II دې x1 و شمیرل شي

ب) له 'I ځخه دې x2 وشمیرل شي

پ (له 'I لر x2 = 14 / 7 = 2

ت) له II لرو:

x1 = -5+2.2 = -1

ټولی ځلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په ځلورمه واریانت کی په ټولګښونو شمیرنه کیږي، »مخته وونه« یا مخوونه(برتري) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زیات برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سرهره

که ځوك له دوه زیات برابرونونه د دوه اوښتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توګه باید په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه x1, x2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توګه حل نه لري. یواځي په ځانګړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې ځیړو او بیا د ګاوس الګوریتم له لارې.

بیلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

a) I x1 + 2x2 = 3 b) I x1 + 2x2 = 3

II 2x1 - x2 = 1 II 2x1 - x2 = 1

III 3x1 + x2 = 2 III 3x1 + x2= 4

له I او II ځخه د ځرګندو یا معلومومتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی ځل یواځنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

له) a او)b څخه لرو1 = $x1 + 2x2$ که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په (a) کې :$1.1+3.1 = 4 |= 2,$ په (b) کی : $3.1 + 1.1 = 4$

نو سيستم (a) ځواب نه لري او سيستم ($\hat{b}$) يواځني ټاکلی ځواب لري

يعني $x1=x2=1$

بيلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بيلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوت اوس د ګاوس د الګوريتم له لارې ځواب کوو.

a)	x1	x2	RS	b)	x1	x2	RS
I	1	2	3	I	1	2	3
II	2	-1	1	II	2	-1	1
III	3	1	3	III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5	II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=II-3.I	0	-5	-7	III=III-3.I	0	-5	-5
III"=III'-II'	0	0	-2	III=III'-II'	0	0	0

په a) کی تضاد پيژندلکيږي ($III':0.x1+0.x2=-2$) ځواب نه شته يا وجود نه لري .

په b) کی تضاد مخ ته نه دئ پروت .($III':0.x1+0.x2=0$) لهII' څخه لرو:

$x2 = 1$ او له I څخه لاس ته راځی : $x1=3-2.1=1$

۱۱ . ۲ لاينيزبرابرونتسيستم د درې ناپيژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ يو برابرون د دري ناپيژندونکو سره

مو ږ يو مساوات د دري ناپيژندونکو سره تر څيرني لاندې نيسو:

$$a11x1 + a12x2+ a13x3 = a1 \quad (11 . 21)$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

$$I . \quad a11=a12=a13=0 \quad (11 . 22)$$

دلته $x1 , x2$ او $x3$ يو له بل پوره خپلواك ټاکل کيدی شي. ويل کيږي چی ناپاي ډير ځوابونه مخ ته پراته دي ($x1$ په خوښه، $x2$په خوښه او $x3$په خوښه)

$$2. \quad a11=a12= a13= 0 ,a1|=0 \quad (11 . 23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$$0x1+0.x2+0.x3 = a1 \,|= 0$$

اوبیونه نه شته.

۳- د کم له کمه یوه ځلجوړې i , k لپار دې aik |= 0 وي. (بې د ټولیز وبندیزونو یا عمومیت د محدود والی دې a11|= 0 وي (. کیدی شي چې x2 او x3 په خوښه وټاکل شي (ناپاي ډیر ځوابونه)، او لاس ته راځي

x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3) په خوښهx1 او x3 (11,24)

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپیژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسیستمونه د درې اوښتونو یا ناپیژندونکو سره

$$a11x1+a12x2+a13x3=a1 \qquad (11,25)$$

$$a21x1+a22x2+a23x3= a2 \qquad (11,25)$$

موږ دا را ویستلي حالتونه ، چیرته چې د ټولو i, kلپاره aik= 0 ، په پام کی نه نیسو. دا حالت هم په پام کي نه نیسو چې دوم برابرون د لومړي په څیر وي (ناپاي ډیر ځوابونه. او یا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي یا ځتوالي یا تضاد کی وي (ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پیژندونکي دي. موږ په یوه بیلګه کی دا اصلي حالت څیړو چې یو ناپیژندونکي یا نامعلوم (د بیلګي په توګه x3) په خوښه ټاکل کیږي او دا نورې دوه ناپیژندونکی یا اووښتونې (x1 او x2) یواځنی لاس ته راځي، او یا یواځنی ورکول کیدی شي (ناپاي ډیر ځوابونه).

بیلګه ۱۱ . ۱۵:

x1 x2 x3 RS

---

1 1 1 3 I x1+x2+x3=3

II x1+2x2+3x3=6 1 2 3 6

II'=II-I 0.x1+x2+2x3=3 0 1 2 3

له 'II لاس ته راځي

$$x2 = 3 -2x3$$

له I څخه لاس ته راځي

$$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, x1= x3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې لاس ته راځي
,x1=x3,x2 = 3 -2x3 x3 په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه یا معادلې یا مساوات د درې ناپیژندونکو سره څیړو

I a11x1+a12x2+a13x3= a1 (11 . 26)

II a21x1+a22x2+a23x3= a2 (11,26)

III a31x1+a32x2+a33x3= a3 (11,26)

له دې سیستم څخه کیدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخې د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتونتیورم (-قضیه) فکر غواړي او د دریمي درجي دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پیژند ۱۱ . ۲:
رییل ګڼونو aik (i,k = 1,2,3 (یو درې درجه منظم د دیتمرمینانت سیستم

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\dots\dots\dots\dots(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی رییلګڼ پوهیدلی شي):

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}-a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32)})-a_{12}(a_{1}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{33});\dots\dots\dots\dots(11,28)$$

له دې سره د دریمی درجي دیترمینانت شمیرنه د دوهمی درجی دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. . ۱۱ . ۲ تعریف او په ځانګړې توګه (11 .28 (فرمول په لاندې ډول توضیح کیدی شي:

پیژند ۱۱ . ۳ : په (11 . 27) کی د دیترمینانت D لاندېدیترمینانت Aik لاندې هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چی د D دیترمینانت i- می لیکی او k - م درځ یا متې د لرې کولو یا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي(زه د ماتریکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې دا لیکې او متې یا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پیښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه یې پسې لیکل شوې)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کیدی شي چی د ۱۱ . ۲ دیترمینانت په دې فورم ولیکل شي

پیژند ۱۱ . ۴ :
د دریمی درجي دیترمینانت D لاندې، چی په (11 . 27) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پو هیدل کیږي:

$$D = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

د زیاتون عملیي څخه، چی دلته نسبت د دوه ناپیژندونکو مساواتو ته چی دوه ناپیوندونکی لري، روښانه ده، د (11 . 26) څخه لاس ته راوړل کیږي:

$$Dx1 = D1 \, , Dx2 = D2 \, , \; Dx3 = D3 \quad (11 . 29)$$

په داسی حالت کی چی Di داسي لاس ته راځي چی د ځله وونودیترمینانت (11 . 28) کی سړی i - م درځ یا ستن یا متېه د (11. 26) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; \ldots\ldots (11,30)$$

موږ دا نتیجه بي له ښووني ورکوو.
له (۱۱ . ۲۹) څخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :
که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونودیترمینانتو(۱۱). ۲۷ ،په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$D \neq 0$ (11 . 31)

با وري وي ، نو (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم یواځنی ځواب لري

$x1=D1/D$; $x2=D2/D$; $x3=D3/D$ (11,32)

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $|Di| = 0$ کم له کمه د یوه i ($i = 1,2,3$) لپاره وي، نو د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم ځواب نه لري (په (۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D1 = D2 = D3 = 0$ وي، نو په (۱۱ . ۲۶) کی کم له کمه یو برابرون له ضرورته زیات دی او دا (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم کیدي شي چي د ۱۱ . ۲ . ۲ متودونو باندې ځواب شي (وړاندیز دئ چی د ګاوس الګوریتم له متود ; چی په ۱ . ۲ . ۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بیلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندې سیستم

I x1 -x3 = -2

II x1 +x2 -x3 = 0

III 2x1 - x2 = 0

کی دئ

$$D = \begin{pmatrix} 10-1 \\ 11-1 \\ 2-10 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1-1 \\ -10 \end{pmatrix} - 0.\begin{pmatrix} 1-1 \\ 20 \end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix} 11 \\ 2-1 \end{pmatrix} = -1-0-1.(-1-2) = 2$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -20-1 \\ 01-1 \\ 0-10 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1-1 \\ -10 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0-1 \\ 00 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 01 \\ 0-1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1-2-1 \\ 10-1 \\ 200 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 0-1 \\ 00 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1-1 \\ 20 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = 4:$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 10-2 \\ 110 \\ 2-10 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 10 \\ -19 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 10 \\ -10 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 11 \\ 2-1 \end{vmatrix} = 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یواځنی ټاکلی ځواب موجود دی.

$x1=D1/D=2/2=1, x2=D2/D=4/2= 2 ,x3=D3/D=6/2=3$

بیلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سیستم

$$\begin{array}{ll} I & x1 + x2 + x3 = 0 \\ II & x1 \quad -x3 = 0 \\ III & 2x1 + x2 \quad =1 \end{array}$$

کي دی.

دا بیلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښايي ، چې اوبیونه نه شته ۰ دې ته باید ګوته ونیسم، $D = 0$ او $0 =| D1= -1$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوریتم

د ګاوس الګورتیم لومړی د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپیژندونکي لري او همدارنګه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چې درې ناپیژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوریتم موخه په دې کی پرته ده چی (11 . 16) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریګوډیفورم را اوړي.

$$\begin{array}{ll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11 . 34) \\ II & b22x2+b23x3=b2 \\ III & c33x3=c3 \end{array}$$

بنسټیز حالت : که $a11|=0,b11|=0, c11|=0$ وي نو یو په بل پسی سرړی کړی شي چی له III $x3,$ او له II $x2,$ وشمیري. مګر په (11 . 34) کی ځانګړي حالتونه هم پیژندل کیږي:

-که $c3|=0,c33=0$ وې، نو یو په ښتوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که$c3=c33=0$ وی، نو III له ضرورتزیات دی سړی یواځی I او II څیړي.

- که$c33=c3=0$او برسیره پر دې $a11|=0, b11|=0$ وي، نو x3 په خوښه ټاکل کیدی شي او x2له II او x1 له I چی x3 ته اړ وي، شمیرلکیدی شي (ناپای ډېر ځوابونه)

-برسیره پر دې که $b22=b23=0 , b2|=0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چی $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$وي ، نو II له ضرورت زیات دی او له $a11|= 0$ کیدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي، او x1له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي چی $x2$ او $x3$ ته اړ (په واك کی یا تابع) وي (ناپاي ډیر ځوابونه ځوابونه) .
که ټول ځلونه او د مساواتو ښی خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د ګاوس الګوریتموس د دري ناپيژندونکو(11 . 26) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دئ
لومړی پل (قدم) : نیسو چی په (11 . 2 6)کی $|a11 =| 0$ دی. دا د نمرې بدلولو په بنسټ همیشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چی ټول $aik = 0$ وي) .
دلته I ورکول کیږي، او له II د I دا $a21/a11$ - ځله او له III دا $a31 / a11$ - ځله د I کموي. ددې څخه لاندې سیستم لاس ته راځي:

$$\begin{array}{ll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \\ II & b22x2+b23x3=b2 \\ III & c33x3=c3 \end{array} \quad (11 . 35)$$

دویم پل (قدم) : د $b22 |=0$ نیوني سره په 'II او 'III باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخې سره سم د ګاوس الګوریتم استعمالیږي : سړی 'II بي تغیره پریږدي اوله'III دا $b32/b22$-ځله د 'II کموي، له دې راپیداکیږي

$$\begin{array}{ll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \\ II & b22x2+b23x3=b2 \\ III & c33x3=c3 \end{array} \quad (11 . 37)$$

د ګاوس د شیما فورمالیتي سره سم بیا دا شکل غوره کي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3
II' = II-(a21/a11)I		b22	b23	b2
III' = III-(a31/a11)I		b32	b33	b3
III'' = III' - (b32/b22)II'			c33	c3

$$x3 = c3 / c33$$
$$x2=(1/b22)(b2-b23x3)$$
$$x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلگه ۱۱ . ۱۸ : دا سيستم ۰(مقايسه بيلگه ۱۱ . ۱۶)

I   x1 -x3= -2

II   x1 + x2-x3 = 0

III   2x1 -x2 = 0

د گاوس الگوريتم سره په لاندې ډول حل کيږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	-1	-2
II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0
II'= II - I	0	1	0	2
III'= III - 2.I	0	-1	2	4
III'' = III' + II'	0		2	6

x3=6/2=3

x2=2……………………

x1=-2+x3=-2+3=1

بيلگه۱۱ . ۱۹: (پرتله بيلگه ۱۱ . ۱۷ (دا سيستم

I   x1 + x2- x3 = 0

II   x1 -x3 = 0

III   2x1+ x2 = 1

د گاوس د الگوريتم په مرسته په لاندې ډول حل کيږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	0
II	1	0	-1	0
III	2	1	0	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

II'=II-I	0	-1	-2	0
III'=III-2.I	0	-1	-2	1
III''=III'-II'	0	0	0	1

دلته دی "0 = 1" تضاد. سیستم نه اوبی کیږي يا حل نه لري.

بيلګه ۱۱ . ۲۰: (مقايسه يا پرتله بيلګه ۱۱ . ۱۷) دا سيستم

I $x1 + x2 + x3 = 3$

II $x1 + 2x2 + 3x3 = 6$

III $2x1 + 3x2 + 4x3 = 9$

په لاندې ډول د ګاوس په الګوريتم اوبيونه ده

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	3
II	1	2	3	6
III	2	3	4	9
II'=II-I	0	1	2	3
III'=III-2I	0	1	2	3
III'' = III'-II'	0	0	0	0

$=x3$ په خوښه

$x2 = 3 - 2x3$

$x1 = 3 - x2 - x3 = 3 - (3 - 2x3) - x3 = x3$

۱۱ ۰ ۳ په خوښه ډير مساوات ، په خوښه ډير ناپيژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاينيز سيستم برابرونونو په لار ښونی پيل کوو m (برابرون د nناپيژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1..................(11,37)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$
$$..$$
$$..$$
$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوبنه يا ازاد پريږدو چی د برابرونونو ګڼون (تعداد) m د ناپيژندونکوn د ګڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرګندو دندو يا وظايف موږ دلته له څلور ناپيژندونکو څخه نه پورته کيږو او يوائی لاندې دوه متودونه څيړو

۱۱ ۰ ۳ . ۱ دn - م درجی ديترمينانت او د کرامر قاعده

پيژند ۱۱ . ۵ :
د n رييل ګڼونو aik يوه منظم سيستم n- م درجي ديترمينانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};........................(11,38)$$

لاندې سړی لاندنې رييل ګڼ پوهيږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې ديترمينانت Aik د (n-1) - م درجی ديترمينانت ده، چی پاتيږي، که په Dکیi - مه ليکه اوk - م درځ ، متِه يا ستن (ليکه او درځ چی aikپه کی ولاړ وی) په کربنه لرې کړي يا کربنه پرې تيره کړي، يعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجی ديترمينانت شميرل و- (n-1)-ام درجی ديترمينانت شميرلو ته راتيتيږي .
په ځانګړي توږه د څلورمی درجی ديترمينانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}; A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}\,etc$$

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو) په) 11 . 37 (کی لرو) n=m د
جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

$$Dx_1=D_1, Dx_2=D_2, \ldots Dx_n= D_n \qquad (11 . 42)$$

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت) ۱۱ .
۳۸ (کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .
د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره (پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰
(

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,43)$$

له(11 . 42) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):
د ځله وونې یا ضریب دیترمینانت (۳۸.۱۱) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د
nناپیژندوکو سره په (۱۱ . ۳۷) د m = n سره) باوري دی

$D |= 0$ (اصلي حالت) (44 . 11)

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري(حل لري

$$x_1=D_1/D, x_2=D_2/D, \ldots, x_n=D_n/D. \quad (11 . 45)$$

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري .
که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د
اوبیونې لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو)

بیلګه ۱۱ . ۲۱:
لا ندې سیستم دې حل شي

I	x_1		$+x_3$		$= 0$
II	$2x_1$	$+x_2$		$+x_4$	$=0$
III		x_2		$-x_4$	$= 4$
IV	x_1	$-x_2$	$-x_3$	$+x_4$	$= -2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}1010\\2102\\010-1\\1-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\10-1\\-1-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}212\\01-1\\1-11\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0010\\0102\\410-1\\-2-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}012\\41-1\\-2-11\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2-1\\-21\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}41\\-2-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1010\\2002\\040-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}002\\40-1\\-2-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}202\\04-1\\1-21\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}40\\-2-1\end{vmatrix}+\left|2\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}\right|+2\begin{vmatrix}04\\1-2\end{vmatrix}=$$
$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1000\\2102\\014-1\\1-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\14-1\\-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}+\left|2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}=4-2+2(-2+4)=6\right|$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1010\\2100\\0104\\1-1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}100\\104\\-1-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}210\\014\\1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}04\\-1-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}01\\1-2\end{vmatrix}=$$
$$=4+2.2-(-4)=12;$$
$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;x_2=\frac{-12}{-6}=2;x_3=\frac{6}{-6}=-1;x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چی د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغي له مخی څرګندولی شو چی کوم حل)ځواب(مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بیلګه څرګندوو

بیلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بیلګه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II -2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV-I	0	1	-2	1	-2
III" = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV" = IV' +II'	0	0	-4	3	-2
IV'" = IV" + 2.II"	0	0	0	-3	6

x4 = -2

x3=1/2(4+3.(-2))= -1

x2=0+(-1)(-2)= 2......

x1 = -(-1) = 1 ....

بيلګه ۱۱ . ۲۳:

دا برابرونسيستم

I x1 +x2 +x3 +x4=4

II x1 -x2 -x3 +x4=0

III 3x1 -x2 -x3 +x4=2

حل يا اوبيونه ی نه لري، لکه د ګاوس له شيما څخه چی ليدل کيږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2
II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10
III'' = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2

دلته III" په ښتوالی یا تضاد خوندي لري " 0 = -2 "

بیلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4

II x1 -x2 -x3 +x4= 0

III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4

IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10

V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چی oe1 (ناپای ډیر) اوبیوني لري

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8
II' = II-I	0	2	- 2	0	-4
III'= III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV -I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II''= II'+2.IV'	0	0	2	6	8
III'=III'+4.IV'	0	0	4	12	16
V'' = V' +2.IV'	0	0	2	6	8
III''' = III''-2.II'	0	0	0	0	0
V'''=V''-II	0	0	0	0	0

ګورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سرې کړي شي چی x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 له II'' x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 IV' او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4 په خوښه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4 ، په خوښه x4 ټاکو

او x3=4-3x4 په خوښه x4 ټاکو

یادونه : هغه کڼ یا نوره هم ښه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي۰

سرې د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په III' او V' پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په II' اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په III' او V' لیکو مو کرښه تیره کړې وی) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځي له کرښی II' جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سیستم بلل کیږي

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad a11x1+a12x2+a13x3= 0 \\ &\text{II} \quad a21x1+a22x2+a23x3= 0 \quad (11.\ 46) \\ &\text{III} \quad a31x1+a32x2+a33x3= 0 \end{aligned}$$

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$$x1=x2=x3=...=xn=0 \qquad (11.\ 47)$$

که د ځلوونو د یترمینانت (۱۱ . ۳۸) لپاره 0 =| D باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۱. ۸ : یو هوموګین مساواتسیستم یواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري وي بیلګه ۱۱ . ۲۵ :

دا هوموژین برابرونسیستم

I x1 +x3=0

II x1 -x2 =0

III x1 +x2 +x3=0

د

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1+(1+1)\neq 0$$

له امله یواځنی ساده اوبیونه x1=x2 =x3= 0 لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۶:

دا هموګین مساواتسیستم

I x1 +x3 = 0

II x1 +x2 = 0

III x1 +x2 +x3 = 0

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1+1=0$$

د

له امله ناساده اوبیونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوریتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- یا باقي سیستم په معنا دی.

x1 x2 x3 RS

---

0 0 1 I 1

0 II 1 -1 0

0 III 0 1 1

II'=II-I 0 -1 -1 0

III' = III 0 1 1 0

II'' = II + III' 0 0 0 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چې II"تضاد نه لري x3په خوښه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I
څخه لاس ته راځي x3-=x1نوx3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نوx3 په خوښه

. تمرينونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چې ورسره بلد يو-پوهيږو او يا هم

۱ – كرښيز مساواتسيستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرينونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو څخه كار اخستلس شي، چې بيايې و ازمايو. د لته دې د زياتون يا جمعي قانون او همداسې د ګاوس الګوريتم ته لومړيتوب ورکړ شي ا و د ديترمينانت سره شميرنه دې يوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$ b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$ d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$ b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$ d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$ b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$
$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$

d) $4 + y = x$
$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$
$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$
$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3$
$\frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2} + \frac{3x_2}{2} = 3$
$3x_1 + x_2 = 2$

b) $\frac{2x_2 - 5x_1}{6} + \frac{x_1}{6} = \frac{x_2 - 2x_1}{3}$
$\frac{5-3x_1}{3} - \frac{4x_2 - 1}{4} = \frac{6x_1 + 23}{12} - \frac{3x_1 - 4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1 + 3x_2} - \frac{1}{3(3x_1 - 2x_2)} = \frac{1}{6}$
$\frac{5}{3x_1 - 2x_2} + \frac{6}{4x_1 + 3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1 - 2) + 4(2x_2 + \frac{3}{2}) = 0$
$5(x_1 + 3) - 3(x_2 - \frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1 + 4x_2 = 8$
$5x_1 - 2x_2 = 9$
$7x_1 - 8x_2 = 10$

b) $6x_1 - x_2 = 1$
$9x_1 + 2x_2 = 5$
$3x_1 - x_2 = 1$

c) $5x_1 - 3x_2 = -3$
$3x_1 + 5x_2 = 5$
$3x_1 - 1{,}8x_2 = -1{,}8$
$0{,}9x_1 + 1{,}5x_2 = 1{,}5$

d) $2x_1 - 3x_2 = 10$
$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$
$x_1 - 1{,}5x_2 = 5$
$0{,}5x_1 - 0{,}75x_2 = 2{,}5$

۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x_1 + x_2 = a$
$ax_1 - x_2 = b$

b) $3x_1 - 2x_2 = 5a$
$2x_1 - 3x_2 = 5b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2-4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شميرنه

۱ . ۳ . ۱ کوم دوه اعداد لاندې خويونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع يا څلورځ کمون(تفريق) يې په ۱۰۰ لوييږي، په داسي حا لې چې ضرب يې په۳۲۵ زياتيږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه يا زياتون دومره لوي دی، لکه د تفريق مربع يې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزيات شي او له دويم عدد کم شي، نو د مربع کمون د يا تفريق يې ۹۹ دی، وښايئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګڼونو څخه هر یو یې په 2 لوېږي، نو ګڼونه څانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونوڅخه 3 کم شي ، نو داسې لاس ته راغلي ګڼ ځان نیسي لکه : 3 : 2 . دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګڼونو څومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره ځل یا ضرب شي، نو د ځلونو زیاتون یې 2222 دی. هر یو له دې ګڼونوڅومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دریکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پړیکشن یا پریوستون یې د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمخ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چې له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لرې دی نسبت و X ته ، دواړه مخ کلي X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلي دیوال، چې 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځي اوږده د هوارې دنته په $100\ m^2$ زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خوندي کوي او دوه وتللارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1 / 4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړي درې بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړي ۷ بوتله او له دوم درې بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 الماني مارکه(DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود $450\ m^3$ اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتي (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل درې دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی $40\ m^3$ اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته $60m^3$ اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یو ځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم درې ورځي کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 5 / 1 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ ایرتیا وری؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۶ . د یوې ګردۍ په چاپیري چې ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقیې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقیۍ، که هغوي یو د بل په خټ لور حرکت وکړي، هر بدن په یوه ثانیه کی څومره واټن تی کوي یا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په یوه ګردۍ چی چاپری یي ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانیوکی. دواړو بدنونو سرعت څومره دی،که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم ؟

۲ . ۲ . کربنیز مساوات سیستمونه د درې مجهولو سره

۱ – مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

a) $x + y = 14$, $x + z = 15$, $y + z = 16$

b) $x_1 - x_2 = 4$, $x_1 + x_3 = 18$, $x_2 - x_3 = 6$

c) $x_1 + x_2 = 6{,}6$, $x_1 - x_3 = 2{,}6$, $x_2 - x_3 = 2$

d) $x + y + z = 25$, $3x - 2z = 1$, $20y - 16z = 0$

e) $2x + 3z = 13$, $3x - 4y = 3$, $5y - 6z = 9$

f) $12x + 24y - 42z = 30$, $4x + 8y - 14z = 10$, $6x + 12y - 21z = 15$

g) $5x + 3y + 2z = 207$, $5x - 3y = 37$, $3y - 2z = 19$

h) $x_1 + x_2 - x_3 = 17$, $x_1 - x_2 + x_3 = 13$, $-x_1 + x_2 + x_3 = 14$

i) $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11$, $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$, $6x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 39$

j)
$$4x + 4\tfrac{1}{2}y - 6\tfrac{3}{4}z = 20$$
$$2\tfrac{1}{5}x - 2\tfrac{1}{3}y + 1\tfrac{1}{2}z = 5\tfrac{2}{3}$$
$$1\tfrac{2}{3}x + 1\tfrac{3}{4}y - 4\tfrac{1}{2}z = 3\tfrac{1}{3}$$

k)
$$\tfrac{2}{5}x - y = 0$$
$$\tfrac{2}{3}x - z = 1$$
$$-\tfrac{2}{3}y + z = 2$$

۲ . ۲ – مساوات سیستمونه د ناټاکلو ضریبونو سره

a) $x_1 + x_2 = 2c$, $x_1 + x_3 = 2b$, $x_2 + x_3 = 2a$

b) $x_1 + x_2 = 2(a + b)$, $x_1 + x_3 = 2(a + c)$, $x_2 + x_3 = 2(b + c)$

c) $ax + by - z = 1$, $ax - by + z = b$, $-ax + by + z = a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

d) $$\begin{aligned} ax + y - cz &= 2a \\ -ax + y + cz &= 2c \\ ax - y + cz &= 2ac \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 2a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= 2b \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 0 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{2}{a} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{2}{b} \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= a \\ y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} &= b \\ z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= c \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} \frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} &= a + b \\ \frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} &= b + c \\ \frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} &= c + a \end{aligned}$$

۳ . په خوښه زیات مساوات د په خوښې زیاتو مجهولو سره

a) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 &= 1 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 &= 10 \\ 6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 &= 9 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 21 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 &= 19 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 &= -24 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 3 \end{aligned}$$

هوموجین مساوات سیستمونه:

a) $$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 20x_1 - 10x_2 + 15x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 9x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . الجبري مساوات یا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاینیز- یا ناکرښیز- یا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چی د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره یوارزښته (اکویوالنت) نه وي ، نالاینیز – یا ناکرښیز مساوات بلل کیږي او عمومي فورم یی په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \qquad (12 . 2)$$

دلته F (x) په x کی یوه ناکرښیزه یا ناخطي وییمه یا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چی ټول د xارزښتونه پیدا شي د کومو لپاره چی (12 . 2) باوري وي. باید په پام کی ونیول شي چی ایا یواځي رییل ارزښتونه پیدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چی پیدا کړو. د بیلګی په توګه لاندې ناکرښیز یا لاینیز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رییل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چی د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره یې مساوات باوري کیږي .ددې په څنګ یا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رییل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دي وکتل شي)، بلکه لاندې ایماګینار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وکتل شي) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړیکو ته پاملرنه وشي: اړیکو $y=F(x)$ ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندوني بولم(ښه نومه ونه يې اوښتوني ده) په څټ یا برعکس (2 . 12) یو ټاکنمساوات دی او x هلته یوه ناپیژندونکی یا اوښتونی دی.

د (2 . 12) برابرون یا مساوات اوبیوني یا حل ته د برابرون د F (x) صفرځای یا د مساوات F(x)=0 جذر یا ریښه هم وايي.

هغه برابرون یا مساوات چی په (۱۲ . ۲) فورم نه دئ ورکړ شوی کیدی شي چی په دې لاندې فورم واړول شي. د بیلګي په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$ او f(x)=g(x)

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کيږي

F(x)=f(x)-a.g(x)=0 او F(x)= f(x)-g(x)= 0

د نالاینیزو برابرونونو لپاره د لاینیزو برابرونونو په څیر راغونده (اختمامیه، رابنده، راتړلی) تیوري نه شته. په پولیزه یا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخی چی د صفرځاي معلومیدی شي. باید په نومریکو (numerischen Methoden) متودونو یا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې یا تقریبي ډول پیداشي

نالاینییز برابرونونه په دوه ټولګیو ویشل کیږی: الجبري او تراسځندنت چی په دې او راتلونکی څپرکي یا لکه چی ما استعمال کړې برخه کی یی څیړو، چي اوبیونې یی روښانه افاده شوې (explizit لاتین: واضح یا روښانه ، افاده شوی، اکسپلیځښت) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څیړل کيږي چی په لاندې نورمال فورم یا – بڼه اړول کیدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0 ....(12,3)$$

دلته په (2 . 12) کی یو نالاینیز بلواک یا – فنکشن (F (x د یوه n - م درجی پولینوم په څیر مخ ته پروت دی . موږ په (۱۲ . ۲) کی د ضریبونو(ځله وونو) لپاره یواځی رییل ګڼونه پریږدو (په دې مانا چي ځلونه یواځي رییل وي، یواځی رییل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په (۱۲ . ۳) کی کیږ اړخ ته n - م درجه پولینوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0 ....(12,4)$$

ته ټول ریشنل (- ریښتونی) بلواک یا فنکشن هم وایي، ځکه چی د ریشنل شمیرله عملیو زیاتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واریابلی او ai د رییل ضریبونو، ځلونو یا فاکتورونو باندې د ویش کارونی کارولو (عملي استعمال) له لارې منځ ته راځي .ټولیز برانرون یا

$$b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0 = 0; b_n \neq 0 ....(12,5)$$

کیدي شي په bn|= 0 ویش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاینیزفنکشن یا ۰ بلواک (F (x په (۱۲ . ۲) باندې په واریابلي یا اووښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمیر کاروني یا عملیي او بالاخره دویش کارونه وکارول شي یا اجرا شي او رییل پارامتر (Parameterپه شمیرپوهنه کې ثابت (همغۀ) او یا مرستندویه لوي ده) تشکیل شي نو فنکشنونو ته بیا مات ریشنل فنکشنونه ویل کیږي. دا تل د دوه پولینومونو یا ریشنل فنکشنونو د ویش په څیر انځوروړ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0}{c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1 x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ....(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) یا (۱۲ . ۳) برابرون اړول وړ دي . دا باید په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳) لپاره یواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چیرې د نالاینیزبلواک یا - فنکشن جوړولو کی د ریشنل شمیرعملیو تر څنګ د توان (مټ، په جګ) یا پوتنځ کول او جذر نیولوته هم اجازه ورکړل شي نو بیا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږیږ. یعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ویل کیږي او (۱۲ . ۲) برابرون بیا الجبري برابرون بلل کیږي ، دا ډول مساوات هم کیدی شي چی په (۱۲ . ۳) فورم واړول شي.

هره n - مه ریښه یا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د G(x) افادې يا ويينې له منځه وړل کيدی شي, که چيرې ځوك دا برابرون په يوه خوا راوړي او بيا د برابرونونو دواړه خواوې د n په توان کړي يا د n پوتنځ يا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په ځرګندو يا معلومو بيلګوځيړل کيږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځيرنه د (۱۲ . ۳) فورم برابرونونو ته راکښته کيدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابرون هم بلل کيږي. ټول نالاينيز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسځيندنت برابرون بلل کيږي . د ترانسځيندنت رابرونونو درې تيوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاريتمي برابرونونه ، او ګونومتريکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر ځيرني لاندې ونيول شي.

۱۲ . ۲ ځلوری(مربع-) مساوات په توان(مټ، جګ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاينيزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان يا مټ (په جګ ۲ هم ويل کيږي) برابرونونه دي چی ځلوری يا مربع برابرونونه بلل کيږي .د دې ټوليزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دئ

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; ....(12,8)$$

په b2 يي ويش په لاندې ډول يو ورته ارزښته (اکويوالنت äquivalent) نورمالبڼه يا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_b; a_0 \neq b_0 / b_2); ....(12,9)$$

ددې حل د ځلوری پوره کونې يا مربعتکميل ځخه په ګټه د بينوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a / 2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a^2{}_1}{4}; ....(12,10)$$

په دې ډول کيدی شي چی (۱۲ . ۹) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$$x^2+a_1x+a_0=(x+a_1/2)^2+a_0-a_1^2/4 = 0 <=>$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

[x+a1/2]²=(a1²/4)-a0 (12,11)

که وي

(a1²/4)-a0>0 <=> a1² -4a0>0 <=> a1²>4a0 (12,12)

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابرون پوره کړي: داصدق کوي

$$x + \frac{a_1}{2} = \sqrt{(a_1^2 / 4) - a_0};........................(12,13)$$

یا

$$x + \frac{a_1}{2} == -\sqrt{(a_1^2 / 4) - a_0};........................(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بینا تل نا کمیز یا نامنفي ګڼ پو هیدل کیږي، چی څلوری یا مربع یی a ده) . له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) څخه رییل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{(a_1^2 / 4) - a_0}; x_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{(a_1^2 / 4) - a_0};........................(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم لیکلی شو

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{(a_1^2 / 4) - a_0};........................(12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توګه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پو هیدل کیږي چی دواړه ارزښتونه

x2 او x1

په ریښتونی څلوری برابرون یا مربع مساوات پوره کوي.

په لاندې حالت کی

$$(a_1^2 / 4) - a_0 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 - 4a_0 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 = 4a_0;.............(12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لارې تیك یو رییل اوبی لرو:

$$x_{1,2} = x_1 = x_2 = -(a_1 / 2) \pm 0 = -a \;\; / 2;.................................(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیونې (۱۲ . ۱۸)څخه غړیږو.

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};...................(12,20)$$

له دې څخه هم چی په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};...................(12,21)$$

نو لاندې جمله ںی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د څلوری یا مربع) په توان یا جګ د ۲) برابرونونو د اوبیونې فرمول) د څلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) $x^2+a1x+a0=0$

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټیك دوه ځوابونه لري

د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساواتو لپاره ښوول کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۲ (د وييتا(Vieta)جمله) :

که x1 او x2 د ځلورې - يا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) اوبيوني وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2;............................(12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2);....................(12,23)$$

حل : (۱۲ . ۲۳) فرمول په دريواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې ځخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د (۱۲ . ۲۲) فرمول د تصديق لپاره د بينوم دريم فرمول او $i^2 = -1$ استعمال ځخه په په (۱۲ . ۱۲) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په (۱۲ . ۱۷) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲ . ۱۹) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وييتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کيږي يا تصديقيږي

جمله ۱۲ . ۳ :

يو ۲ درجييز پولينوم کيدی شي چی په دوه لايني فاکتورونو يا ضريبونو يا ځله وونو بيل يا ټوټه يا تجزيه شي:

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2);..................(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = b_2 (x - x_1)(x - x_2);..................(12,25)$$

چيرته چي x1 او x2 د څلورى برابرونونو يا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبيونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) څخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نيولو سره لرو

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + a_1 x + a_0 =$$

$$= \frac{1}{b_2}(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ څخه دې ته راځول کيږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره ريښل اوبيو څخه خبرې وکړو(وغږيږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0;..................(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲) .(۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کيدی شي چی د فنکشن

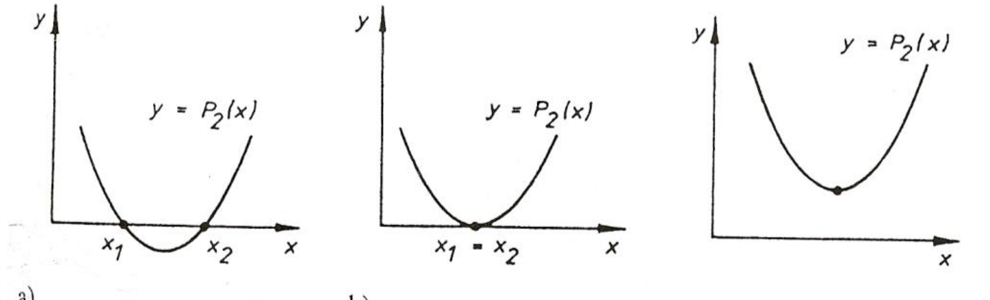
$$y = p_2(x) = x^2 + a_1 x + a_0$$

ځيرو يا شکلونو (ګراف) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټيزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که x هرڅومره کوچنی شي)که x د کميز ناپای په جګ يا توان شي) او همدارنګه x هرڅومره لوي شي (که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوييږي (ستريږي يا غټيږي) ، ځکه چیx^2 نسبت و x ته په توان يا قوي جګيږي له ټولو پولو(yد ناپای لور ته ځي)۰ د دې ډول پولو کره پيژند يا تعريف په ۱۹ - برخه کي لوستل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۲) حالت کی د x - محور په داړو ریيلو ځايونو x1 او x2 کی غوځيږي؛
په (۱۲ . ۱۷) حالت کی په x1 = x2 ځای کی يي لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت
کی ګډ ټکي ورسره نه لري یا نه وررسيږي (پرتله څيره . ۱۲ . ۱)



a) b) c)
Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، (
۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بيلګو روښانه شي.

بیلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

$a1 = -1 , a0 = -6$ او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی یاتعقیب څخه باوري کیږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3 - 2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله (۱۲ . ۱۷) حالت مخ ته لرو ۰ دوه ئیز رییل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱

څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1=x2=2$

جمله ۱۲ . ۳ :

په لاندې ډول باوري کیږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x+x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$,$a0=13$ او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت (۱۲ ، ۱۹) مخ ته لرو.

د کونیوګیرت(کنجوګیري) کمپلکس جوړه اوبیونو یا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې بڼه یا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm 3i$$
$$\Rightarrow x=2+3i; x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x=(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د جملی ۱۲ . ۳ له مخې داسی دئ

$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسی (۱۲. ۹) اوبی په ښکاره ډول ساده کیږي، که یو ځلی a0 اویا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو

$$x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ څلوری(مربع-)برابرون چی په نورمالبڼه

مخ ته نه دي پراته

که یو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو باید په دې بڼه واړول شي.

بلیگه ۱۲ . ۴ :

$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$

$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$

$-x^2-2x-4=x^2-8x$

$x^2-3x+2=0$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$

$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول یا ناپیژندلی یا اوړیدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو باید په صفر ویش ناممکن یا ناشونوالی په پام کي ونیول شي.

بیلګه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$

تيك هلته مانا لري، چې وي $2x^2+2x-4 \neq 0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کیږي او بیا ازمائل کیږي، چي ایا د ماتلاندې شرایط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$

$$-x^2 = -4$$

$$x_{,2} = \pm 2; x = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پیل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانګړي برابرونونه ،

چی په څلوری یا مربع برابرونونو بیرته بدلیدلی شي

د n - مي درجی مساواتو(۱۲ . ۳) يو څو ځانګړي حالتونه کیدی شي چی د څلوری برابرونونو يا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي يا اوبی شي۰ دا ځانګړی حالت موجود دی یا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = ... = a_{n-3} = 0 \qquad (12, 27)$$

دn- مى درجى برابرون بيا داسى دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; .... (12,28)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; .... (12,30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : په پورته کې له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون یو ځلوری - یا مربع برابرون دی، چی د جملي ۱۲ . ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی یا حل لري x = 0 چی دا (n-2)- ځله رامنځ ته کیږي x3 = x4 = ... = xn=0

بیلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبیونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دئ، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; ....(12,32)$$

یو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ یا جفت - وي

n = 2k (12 . 33)

او فقط (ټیك) ځله وونې یا کوایفیځینتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; ....(12,34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; ....(12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره د y لپاره څلورې برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12 , 36)$$

د لاندې ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k / 2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0};......................(12,37)$$

د(۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1;..........................(12,38)$$

ټولې اوبیونې وخیرلی شي، چې د k = 1 لپاره ساده دی، د k = 2 لپاره(بیکوادرات برابرون) (د څلورې یا د مربع مربع) یا د رییلو y1 او y2 لپاره د تراوسه څرګندو میتودو سره تل کیدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټولیزه توګه ستونځی لري.

بیلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بیکوادرات برابرون $x4 + 5x^2 -6 = 0$ کیدی د سوبستیچیوشن یعني بدلون له لارې $y = x^2$ په څلورې برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملې ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چې د بیرته بدلون(-سوبستیچیوشن) له امله لاس ته راوړو

$x^2 = 4 , x^2 = -9$

لاندې اوبی یا حل لري

$x1 = 2 , x2 = -2 , x3 = 3i , x4 = -3i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسیستمونه چی بیرته په څلوری برابرونونو بد لید لی شي

یوه د نالاینیزو مساواتسیستمونو لړی کیدی شي چی په څلوری برابرون یا مربع مساواتو بیرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بیلګي راوړو.

بیلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$

$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کیږي، $y = 1-x$، او دا حل په دوم برابرون کی اینوول کیږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$

$$x = 3, x_2 = -2$$

د (۱۲ ، ۴۰) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2, \; y2 = 3$$

نو دا نه لاینیز برابرون لاندي اوبیوني لري

$x1 = 3, y1 = -2$ او $x2 = -2, y2 = 3$

بیلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سیستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی يواځي د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وريا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو(ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کيږي:

$$y + x = xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کيږي

$$y = 1 - ax \qquad (12, 43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کی ايښول کيږی يا ځای په ځای کيږي

$$1 - ax + x = x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2 - ax + 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی (۱۲ . ۴۴) برابرون مخامخوالی لري يا په ښتوالی لري يا تضاد لاس ته راکوي » $1 = 0$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴) ښخه لاس ته راځی $x^2 - x + 1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه بايد په پام کی ونيول شي:

د $a > 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو $a > 4$, او د $a < 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \qquad (12, 46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ريل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12.47)$$

په دې پوروې د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بايد وازمايیل شي چی د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول) نابرابر په صفر دي . ټل 1 /2 < x1 دی. که x2 = 0 وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هيڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی
که y1= 0 يا y2 = 0 وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی يا ناممکن دی، نو دلته هم لرو $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$
په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) سر ه سم، دوه

مختلف رييل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي
د x1 , y1 او . x2, y2

$$1/4-1/a=0 \Leftrightarrow a=4 \qquad (12, 49)$$

لپاره(۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲، ۴۴) ډبل رييل حل لري

$$x1 = x2 = 1/2 \qquad (12,50)$$

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت ډبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

$$y1 = y2 = 1 - 4.(1/2) = -1$$

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ . ۱۹) يو ريل، ډبل ګڼلی حل موجود دی

$$x1=x2=1/2,\ y1=y2=-1 \qquad (12, 51)$$

د

$$1/4-1/a < 0 \Leftrightarrow 1/a > 1/4 \qquad (12, 52)$$

لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د a > 0 لپاره (۱۲ ، ۵۲) د a<4 کتمت (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کتمت دی (له دې امله په ښتوالی يا تضاد) .
نو د(۱۲ ،۵۲) باور لري، د

$$0 < a < 4 \qquad (12, 53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره . په دې حالت کی (۱۲ ، ۴۴) کونجوګیري کمپلکس اوبیونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; .... (12.54$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخی په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; .... (12,55)$$

له دې ارزښتونو هیڅ هم صفر کیدی نه شي .پس په یوځاي شوي یا راټوله توګه لرو:
برابرونسیستم (۱۲ ، ۴۱) د a = 0لپاره اوبی نه لري، د a < 0 , په همدې ډول a >
4لپاره دواړه ریل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د a = 4 لپاره ریيل ډبل ګڼلي
اوبۍ (۱۲ ، ۵۱) او د 4< a >0لپاره دوه کونجوګیري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ،
(۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲ . ۳ دریمه درجه مساوات یا - برابرونونه

ددې لپاره چې په زړه پورې n- (ام (درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د
مساواتو مربع سیستم جملو ته ورته جملی د دریمی درجی مساوات لپاره ځیرو.
د دریمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولینوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad (12 , 57)$$

لاندې بنستیز خویونه لري: که x ډیر لوي شي یعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$
نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چې دx^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بیړه
جګیږي او بیا همداسي و x ته هم . که a1 او a2 کمیز یا منفي هم وي نو y به د لویو
x- ارزښتونو لپاره زیاتیز یا مثبت وي. داچي x^3 د کمیز x - ارزښت لپاره له صفر
کوچنی دی، نو په همدې ډول
x->-o د y -> -o
لپاره .د دې ډول »پولوارزښت یا لیمس« لپاره کره تعریفونه بیا په ۱۹ برخه کی په
پراخه توګه څیړل کیږي .د یو-x ارزښت) خورا کوچنی هم کیدی شي (شته چې د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- --------------

لپاره 0 > y وي اود یو x - ازښت) چی خورا لوي هم کیدی شي) ، د کوم لپاره چی y>0 دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ باید د مساوات (۱۲ . ۵۶) یو رییل اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلګو کی سړی کړی شي چی په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائیلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توګه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلګی:

بیلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \qquad (12, 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$$X = 0, 1, -1, 2$$

$$Y = 12, 6, 12, 0$$

په دې توګه یو رییل صفرځاي پیدا شو

$$x\,1 = 2 \qquad (12, 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شیما په بنسټ یو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چی بیا د مټ(توان= لوړولو ته اړتیا نه پیدا کیږي او پولینومونو د فنکشن ارزښت ساده پیدا کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 + (11 / 2)\, x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad (12 . 61)$$

د صفرځاي پیداکولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰)مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي)ترتیب شي وشمیرل شي (، څکه چی هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$$X = 0, 1, 1/2$$

$$Y = -9, 16, \quad 0$$

نو

$$x1 = 1/2 \qquad (12, 62)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) یو رییل صفرځای دی

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12, 63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3

Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لارې لاندې رییل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12, 64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \qquad (12, 65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1

Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12, 66)$$

په ټولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چی د دریم درجی برابرونسیستم (۱۲ . ۵۶) لپاره تل یو رییل اوبی یاحل $x1$ شته دی. دا یو واقعیت دی چی بي له ښوونی یی لیکو، چی دا پولینوم (۱۲، ۵۷) بي له پاتي په لاینیز فاکتور ($x - x1$) ویشل کیدی شي او یو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دريمه درجه برابرون (۱۲ . ۵۶) کم له کمه يو رييل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.............(12,67)$$

دلته نو بيا نور د دريمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلورى برابرون يا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کيدى شي چی لاندې جمله فرمولبندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دريمه درجه برابرون درې اوبيونې يا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad (12 , 68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - درې رييل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی (موجود دي)

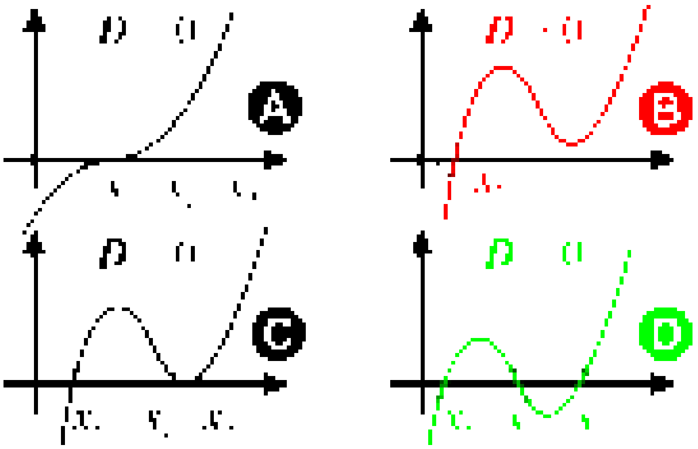
۲ - يو رييل حل x1 او ددې سره مختلف يو ډبل رييل حل x2=x3شته دی .

۳ - يو رييل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - يو رييل حل x1 او يوه جوړه کونجوګيرت کملکس اوبيونې يا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څيره د ډولو راشنل فنکشنونو(۱۲ . ۵۷) تيپيکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښايي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کیدی شي د دریمی درجي پولینومو لپاره د وییتا جمله تصدیق کړي چې د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دریمي درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اوبیونې وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$

$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$

$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx2 او x3 اوبیونې ولټول شي.

بیلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سرې دا ځواب د ۱ . . ۲ ۴ . برخي له مخي د پارشل Partial -(ټوټه-(ویش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$..\underline{x^3+2x^2}$$

$$........-x^2-4x+12$$

$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$

$$..............-6x+12$$

$$..............-6x+12$$

له x² - x - 6 = 0 څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو رییلو ځوابونو سره
، $x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$
او داسی دئ:
$$x^3-3x^2-4x +12 = (x - 2)(x-3)(x + 2)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخی اوبی
$x1 = 1 / 2$
لري او داسی دئ:
$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا (□) له $x^2 +6+9=0$ څخه لاس ته راځي
$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه رییل حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل رییل حل سره، یعنی لرو $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دئ
$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د(۱۲ . ۶۴) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري
$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$
له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي
$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$
نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی
$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$
او داسی دی
$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵) برابرون د (۱۲ . ۶۶) برابرونونو له مخی ځواب x1 = 1 لري، او داسی دی

$$(x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملی ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه ریبل حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) \qquad =(x-1)(x^2-4x+13)$$

۱۲ . ۴ د ریښی (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کی د ریښی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرګند شو چی څنګه د ریښی برابرون په ریشنل برابرونو اوله دې سره n- می درجي برابرونو بدلیدلي شي۰ دا دې دلته د بیلګو په څیر پاتي وي. یواځي ریبل اوبیونې به و څیرل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :

د ریښي برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4}=16;..........................(12,72)$$

ډیر ساده کیدی شي چی په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4}=9; \sqrt{2x+4}=3; 2x+4=9; 2x=5; x=5/2;........(12,73)$$

د ازمایلو لپاره که (۱۲ . ۷۳) برابرون په (۱۲ . ۷۲) برابرونونو کی خوندي شي، نو څرګندیږي چی دا دx-ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4}=7+3.3=16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۵:

د ریښی برابرون یا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0; ....(12,74)$$

کیدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3; ....(12,75)$$

د ازمایني لپاره، که (۱۲ . ۷۵) د پیل په برابرون (۱۲ . ۷۴) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون (۱۲ . ۷۴) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره یا په دې تعقیب د پیل برابرون ځواب نه لري.) داسي کیدی هم نه شي، ځکه چي تل $2x + 19>0$ دی)۰

دا ساده بیلګی موږ. ته را ښایي چي باید د ریښی مساواتو حل تل وازمایل شي چی ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیږدي چی ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمایلو لپاره نه دی چي ګوندې تېك یا صحیح شمیرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب یو اړیین سما ندیز پل یا ضروری منطقي پل دی .

په ټولیزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f(x)=g(x) \qquad (12,76)$$

په یو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x)=G(x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي ، یا تری کم شي، یاداوړه خواوې په یوه ګڼ ځل (ضرب) شي او یا وویشل شي (په دې حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ریښی لاندې راشي او یاپه توان پورته شي نود پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په څټ (برعکس، مخامخ). کیدی شي چی اړول شوی برابرون (۱۲ . ۷۷) زیات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) ته . دا به په لاندې بیلګه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلکه ۱۲ . ۱۶:

د ریښي یا جذر برابرون یا مساوات

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1} \qquad (12.78)$$

څلورئ یا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1,$$

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بیا څلورئ یا مربع کولو سره سړی یو مربعمسوات لاس ته راوړي

$$x(x-1) = 0 \quad (12,79)$$

چې لاندې اوبې یا ځواب لري :

$$x_1 = 0, x_2 = 1 \qquad (12.80)$$

دا د (۱۲ . ۷۹) اوبیونې دي، مګر باید و ازمایل شي چې ایا دا د (۱۲ . ۷۸) اوبیونې هم دي که نه.

د $x = 0$ لپاره په (۱۲ . ۷۸) کې دوه ریښې نه دې تعریف یا ددوه ریښو پیژند نه شته، نو $x = 0$ د (۱۲ . ۷۸) اوبیونه نه ده .

د $x = 1$ لپاره لاس ته راځي $1 - 0 = 1$

له دې امله $x = 1$ د پیل بیلګې (۱۲ . ۷۸) یوګونی ځواب یا اوبی دی .

بیلکه ۱۲ . ۱۷:

د ریښې برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,............(12,81)$$

کیدی شي چې په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} \Rightarrow$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;.........(12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برابرون یا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, ...(12,83)$$

د ټولونورو x لپاره $x^2-4x+3| = 0$ دی ، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2 - 7x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x3 = 0, x4 = x1 = 3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پیل برابرون ډکوي.(باوري کوي، پوره کوي)

د $x = 3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله $x = 3$ د پیل برابرون یا مساوات (۱۲ ۸۱) اوبی یا حل دی . د

$x3 = 0$ او $x2 = 1,$

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون (۱۲ . ۸۱)

اوبی حل $x = 3$ (12 . 85)

یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $x^2 - 4 = 0$ b) $3x^2 + 27 = 0$

c) $x^2 - 9x = 0$ d) $5x^2 = 125x$

1.1.2. a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$ b) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

c) $(x - 6)(x + 5) = 0$ d) $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضريبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سيتم، کوم مو مربع مساوتو ته لاربنبنودوي يا بيايي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$ b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مې درجې ځانګړي مساوات، چېپه مربع مساوات بیرته اړول کیدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو یا معلومو ضریبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو یا نامعلومو ضریبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a-b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a+b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مې رجې مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$ b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$ d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د x او هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$ b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$ d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګڼونه ځان داسې نیسي لکه 1 : 3 . ددې ګڼونو د مربع زیاتون ۱۵۶۰ دی. دا ګڼونه څه نومیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د درې یو په بل پسې ګټونو د لوی ګڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنیوګټونو د مربعو زیاتوننږ. دا ګټونه څه نومیږي یا کوم دي؟

پ) د کوم مثبت ګڼ لسرځله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت) مات 1/4 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزیه کړی، چې لاندې زیاتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ یې لاس ته راشي.

۶ . ۲ . الف) په یوه برابر برقجریان کی مقاومت په دیرش اوم Ω 30 لوییږي، په کوم کې چی د برققوه په همغه د 220 V (وولټه) شپانونګ په پنځه امپیر (1,65A) کوچنی‌شي . مقاومت او برققوه څومره دي؟

ب) دوه سیخونه چی مقاومت یی Ω 60 یو له بل توپیر لري،چې یوه د غبرګ چالانولوعمومي مقاومت Ω 22,5 کړي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوی دي؟

۶ . ۳ . الف) یوه د بایسکلځغلونی لار چې ۲۲۵ کیلو متره اوږده ده، د یوه موادو موټر څخه په درینیم ساعته لنډ وخت کې وهل کیږي،چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بایسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بایسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دی؟

ب) د سپورت جشن کې یو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپیل څخه یونیم ساعت وروسته له یوه بایسکلسپورتي څخه وروسته کیږي، کوم چې له مخامخ کیدو, نیم ساعت وروسته B ته رسیږي، او سملاسي بیرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسیږي په کوم کې چې ځغاستنی و B ته رسیږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لرې ده؟

پ) دوه ډبډبي ځغاستي یوبل باندې نیغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور په ډبډبیو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانیه کې، دوم څلور متره په ثانیه کې دی دوي له ۳ ثانیو وروسته یو ۳۵ متره لریوالی یو له بل لري، دوي یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لروده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت) د ګادي يو لاین د موټرځغاست سرك لمړی برخې سره غبرګ غزیدلی. د یوه موټر ځغاستي پیل کې د یو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشینونه په همغه ځګوالي دي، که موټرځغاستی منظم تعجیل او يو تعجیل د $10m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72 \ km / h$ دی؟

ټ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لايپخيږ ښخه د ديساو په لور بايسکل ځغليدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له ديساو ښخه د لايپخيږ په لور راتلونکی بايسکل ځغاستی سره مخامخ کيږي. ورستنی ۱۰۰ دقيق د مخه ديساو ته راځي لکه دوم ولايپخيږ ته. د ديساو او لايپخيږ ترمنځ لريوالی يا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړنجيز دريځګوډي کې ، کاتيتې ځانونه داسې يوبل سره نيسي لکه 3:4 ، هيپوتينوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتيتې څومره اوږدې دي؟

ب) د یوه ولاړکونجيز دريګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتيتو زياتون يي۱۷ سانتيمتره اود يوې کاتيتې او هيپوتينوزې زياتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ) د یوه سمکونجيز (ولاړکونجيز) دريګوډي کاتيتې څومره لويي دي، که د هغوي زياتون ۴۲ سانتيمتره وي ، د دريګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت) د یوه ولاړګوډي نيمی (قطر) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نيمي اوږدوالی ۱۰ سانتيمتره لويږي. د سمکونجيز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري. د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاړاړخ)

ټ) د یوې ګردۍ وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګرډۍ کې دننهخاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا څونډي مربع اړخ)

ج) د یوې ګردۍ نیمی باید څومره لوي، که چې دننه منځشوې مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح) که د یوې ګردۍ نیمی (قطر) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردۍ هواره دوه برابره کیږي. د ګردۍ سرچیني نیمی څومره لویه ده؟

خ) د یوه نیمغونډي نیمی څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشه کی یې ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د دریمې او څلورمې درجې مساوات

2.1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې د لاندې مساااتو حلونه یا اوبیونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازماېښت وکړئ!

۳ . ۱ – ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا څلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\frac{4}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\frac{\sqrt{x}-3}{7}-\frac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\frac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\frac{16-\sqrt{x}}{2}-\frac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\frac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\frac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\frac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $|\sqrt{3x+7}|+|\sqrt{4-x}|=3$

3.1.10. a) $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $(\sqrt[3]{x}-1)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۲ – رېښه مساوات د نامعلومو ضريبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x} = a$ b) $\sqrt[3]{x} = b$

c) $a - \sqrt[3]{x} = b$ d) $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$

3.2.2. a) $\sqrt{x - a} = b$ b) $\sqrt[3]{a - x} = b$

c) $\sqrt[4]{a^4 + x} = a$ d) $\sqrt[6]{a^6 - x} = b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - \sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$

b) $(a - \sqrt{x})\,(b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})\,(d + \sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax} - b}{\sqrt{ax} + b} = \dfrac{3\sqrt{ax} - 2b}{3\sqrt{ax} + 5b}$ d) $\dfrac{2a + 3\sqrt{bx}}{3a + 2\sqrt{bx}} = \dfrac{3b + 2\sqrt{ax}}{2b + 3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c + d}$ d) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a\sqrt{x} + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c\sqrt{x} + d}$

3.2.5. a) $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$ b) $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$

c) $\sqrt{x + a} = a - \sqrt{x}$ d) $\sqrt{x + a^2} - \sqrt{x} = b$

3.2.6. a) $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \dfrac{b}{\sqrt{b - x}}$ b) $\sqrt{x + a} - \sqrt{5x - 3a - 4b} = \dfrac{2b}{\sqrt{x + a}}$

c) $\sqrt{x + a} - \sqrt{x - a} = \dfrac{x + a - b}{\sqrt{x + a}}$

d) $\sqrt{3a - 2b + 2x} - 2\sqrt{3a - 2b - 2x} = \dfrac{a + 2b + 2x}{\sqrt{3a - 2b + 2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{3x^2 - 1} - \sqrt{3 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ ، ۳ – مساوات سیستمونه، چې ریښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$, $\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$, $x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$, $x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$, $y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$, $y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسځندنت برابرونونه يا ـ مساوات

لکه څنګه چې په ۱۲ . برخه کې دې ته ګوته نيول شوې وه، چې دلته يو اځي هغه ترانسځندنت مساوات څېړل کيږي، کوم چې بيرته په الجبري مساواتو اړول کيدی شي.
دا بيرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ريښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کيږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون يا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کيدی شي چې اړولی فرمول زياتې اوبيونې يا حلونه نسبت د پيل برابرون ته ولري. له دې امله بايد د اړول شوي برابرون ټولې اوبيونې په پيل برابرون کی ځاي په ځاي يا کيښوول شي او وکتل شي چې کوم له دې د پيل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ريښه يي برابرونونو يا مساواتو کی ، دلته هم يواځی رييل اوبيونې پلټل کيږي.

۱۳ . ۱ لوګاريتمي مساوات

د لوګاريتمي مساواتو او اکسپوننشل يا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پيدا کولو لپاره اړيين يا ضرور(ضروري يا اړيين شرايط) دی، چی د يو عدد(ګڼ) aلوګاريتم، د b په بنسټ، معلوم کړو يا وڅيرو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 ....(13,1)$$

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کيدی شي (۱۳ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په څټ یا برعکس د 10 =| e|= b لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b \ldots\ldots\ldots\ldots(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دئ

$$l\,\mathrm{og}_b\, x = c \ldots\ldots\ldots\ldots(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c \ldots\ldots\ldots\ldots(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $: \log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبیونه په لاندې ټولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c \ldots\ldots\ldots\ldots(13,5)$$

دلته (f(x یوه الجبري وبینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دئ

$$f(x) = b^c \ldots\ldots\ldots\ldots(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

$x^2+x+6=2^3= 8$ (همداسی) ⇔ $x^2+x-2=0$

او لاندې اوبیونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کیڼې لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وییینه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x) + r_2.\log_2(x) + r_3.\log_b g_3(x) + ... = c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}..................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x - 1) + \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3(x-1) = 2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه ریښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له څلوری یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

ټیک دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وبینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني

که $1<(b+3)/(b-2)$ وي.

د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دې لرو $-2<3$دا د ټولو b لپاره پوره دئ

.د $2 \leq b$ لپاره د $b+3 \leq b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \leq 3$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دئ. د $2 \leq b$ لپاره اوبیونه نه شته دئ.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وینې یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه $y1,y2,..$ په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳/۵) لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳/۹) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په ځلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .
د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره
له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي.

$$x_1 = 10^2=100 \text{ او } x_2 =10^{-1}= \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$

د $x>0$, مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندې $(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$, \quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$
$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې ځلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0 , y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1 = lox_1 = 5; y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5; x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_4 \sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \text{..............................} (13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وييني يا افادي(f (x اکسپوننتونه ياجګګڼونه وي، نو:

$$af(x)=b,a>0\ ,a|=1,b>0 \qquad (13\ .\ 16)$$

په دې ډول د لوګاريتمولو له لارې يو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b .... (13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دی.

بيلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې څلوری برابرون يا مربع مساوات ته بيايي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2\ ,\ x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پيل برابرون اوبيونې يا ځوابونه هم دي.

بيلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کې د يوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3\ ,\ x_2 = -4$$

بيلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کيدی شي چې ناپيژندونکي د اکسپوننت يا په جګ څخه د دوه واره لوګاريتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \quad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg\frac{15}{7}}{\lg\frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;..................................(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13 . 19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وبینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0 \;;..................................(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13 . 21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبيونو y_1, y_2, y_3;............... لپاره بايد

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 .... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بيلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x \, (y^2 = 3^{2x})$ سره په ځلوری

برابرون يا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بيرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, \; x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبيونه نه لري

بيلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} .... (13,25)$$

کې داسې بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} .... (13,26)$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};..............................(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$
$$y_1=0; y_2=1$$

ټیك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;..(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پیلبراږون پوره کوي٠

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

$\ln^2 x-\ln x+1=\log_2 8 = 3$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x=-1 , \ln x=2, x1=e^{-1}=1/e , x2=e^2$

۱۳ . ۳ ګونومتریکي- یا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګونومتري ساده برابرون لاندې څېره لري

$$\sin x=a\ ,\ \cos x=a \qquad (13\ .\ 29)$$

$$\tan x=a\ ,\ \cot x=a, \qquad (13\ .\ 30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه (۱۳ . ۲۹) ځوابونه لري ، که $-1 \leq a \leq 1$ باور ولري، نور ارزښتونه sin x او cos x نه شي غوره کولی(پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشميرني سره د تکمو یا ګوټکونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) یو ځواب لاس ته راځي
د(۱۳، ۲۹) لپاره

a F sin a F cos

د (۱۳،۳۰) لپاره

a F tan a 1/x tan

دا چي tan x او cotx پریودې همداسی 180^oلري او په یوه اينتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180^oلري د(۱۳ ۳۰) تيك يو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x0 د(۱۳ . ۳۰) یو ځواب وي) چی د بیلګي په توګه د جبشميرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ... -3, -2, -1, 01, 2, 3, ...; .... (13, 31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په (۱۳ ، ۳۱) کی د بیلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30^o + k.180^o$$

د کونجونو فنکشنونه sin x او cos x پریودې(تل بېرته راګرځېدنه یا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اينتروال کی دوه حلونه لري. که چيرته د جبشميرني سره يوه اوبيونه x_0 پيداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x = -x_0$ هم يو حل دی، او $x = -x_0$ د cos x = a په حالت کی يو بل اوبی

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د (۱۳ ، ۲۹) يو هغه اربيونه يا حل وي، چی د بيلګي په توګه په جبشميروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....;...................(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°;...(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....;...................(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°;...(13,35)$$

بيلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشميرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: (په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º

(په لينده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427

د) ۱۳ . ۳۲ (،) ۱۳ ، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبيونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13, 833427 + k.360º = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657º + k.360 = 2,9001 + k .6,28318.$$

بيلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبيونه د جبشميروني سره مومو

$$x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.$$

د (۱۳ ، ۳۴) او (۱۳ . ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k .360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۸:
د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4,843000$ حل په جبشميرني پيداکوو

$x_0 = -59,999988° = -60° = -1,04718$
له دې امله د) ۱۳ . ۳۱ (له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي
$x_k = -60° + k.180° = -1,04718° + k.3,14159$

بیلګه۱۳ . ۱۹:
د برابرون $\cot x = 4,843000$ ټولې اوبيونې يا حلونه د جبشميرني سره داسې
$x_0 = 11,666677° = 11,67° = 0,203675$
لاس ته راځي. په دې توګه د (۱۳ . ۳) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:
$x_k = 11,67° + k.180° = 0,203675 + k.3,14159$

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $2 > 1$ له امله اوبيونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په ځرګندومتودو یا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a , \quad \cos f(x) = a \qquad (13 . 36)$$
$$\tan f(x) = a , \quad \cot f(x) = a \qquad (13 . 37)$$

دلته کیدی شي چې $f(x)$ الجبري او يا ترانسځيندنته افاده ويکه بدل (سوبستيتوتي) شي
$$y=f(x) \qquad (13.38)$$
نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي
$$\sin y = a , \cos y = a \qquad (13 . 39)$$
$$\tan y = a , \cot y = a \qquad (13 . 40)$$
دا کیدی شي د جملی ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبيونې يا حلونه دې $y1, y2, y3, ...$ وي .
د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د $f(x) = yi , \ i = 1,2,3,...$ ټولې اوبيونې يا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360° ,\ k = ...,-3,-2,-1, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$, $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبوني (حلونهو پـه توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90° + 3k.360° + 120° = 210° + 3k.360°$$

$$\overline{x}_k = 3y_k + 120° = 450° + 3k . 360° + 120° = 570° + 3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x,$$
$$\sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x, ...) \qquad (13 . 42)$$

دلته که د بیلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13 . 43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}} , \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y} , \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2} , \ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2y^2 \quad (\text{usw.}$$

لپاره نور

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳)، پهy ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13 , 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې ....y_3. y_2 , y_1 وي. نو بیاد(۱۳.۴۳)سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin x = y_i, i=1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چې په (۴۲ . ۱۳) کي ښول شي ، وازمایل شي، چې ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۴۲ . ۱۳) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x), ...) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سرې بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:

برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د (۴۲ . ۱۳) ، (۴۴ . ۱۳) سره ځان په رینه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \Leftrightarrow \pm\sqrt{1-y^2} = 1-y \Leftrightarrow 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0 , y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي ، چې د y2=1 لپاره برابرون (۵۰ . ۱۳) او له دې سره سم برابرون (۴۹ . ۱۳) تل پوره دي. د دې په څېر یا خلاف y1 فقط د (۵۰. ۱۳) حل دی ، که د
رینبی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښه وي. دا حالت یوائې هلته مخ ته پروت دی، چې cos x>0وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۵۱ . ۱۳) سره برابرون (۴۶ . ۱۳)حل یا اوبی شي او
حل یا اوبونه یی په (۴۹ . ۱۳) کی کیښول شي:

$$\sin x = y_1 = 0 , x_k = k\pi ; \ k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1 , x_k = \pi/2 + 2k ; k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (۵۲ . ۱۳) په (۴۹ . ۱۳) کینوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځي جفت ګڼونه دي($x\pi = 2k\pi$) که(۱۳ . ۵۳) په (۱۳ . ۴۹) کینوول شي، نو لاس ته راځي

$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د (۱۳ . ۴۹) ټولې اوبیونې په لاندې بڼه لاس ته راځي

$x_k = 2k\ ,\ x_k = \pi/2 + 2k\ ;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,...$ (13 . 54)

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0$ (13.55)

سره کیدی شي د ریښی مساوات څخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \qquad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳,۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \qquad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4},$

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad y_2 = -1. \qquad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې اینوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad x_k = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\overline{x}_k = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \qquad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1, \quad \overline{\overline{x}}_k = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi, \qquad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60° \\ 180° \\ 300° \end{Bmatrix} + k \cdot 360° = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \qquad (13.62)$$

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول ارزښتونه x وشميرئ، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره يې ازمايل يا ازماېښت اړيندئ.

۱ - لوګاريتمي مساوات يا برابرونونه

1.1. a) $\log_4 (x+1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg \sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln (x-1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg (2x+5) - \lg (3x+1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg (x-1)^2 = 6 \lg 2$

1.3. a) $\lg (x-1) + \lg 3 = \lg (x^2 - 1)$

b) $\lg (x+1)^2 = \lg 2 + \lg (x+1) + \lg (x-1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg (x+4)$

d) $\lg (x-2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg (x+1)$

1.4. a) $\lg x + \lg (x+1) + \lg (x-1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2 \lg x = \lg (4 + x^3)$ c) $\lg (152 + x^3) - 3 \lg (x+2) = 0$

d) $2 \lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg (a - \frac{1}{a}) = \lg (1 - \frac{1}{a}) + \lg (1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg (ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg \frac{x}{abx - 1} = \lg (a-1) + \lg (a+1)$

d) $\log_a (2x+1) = \log_a (x-1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg (x^2+1) = 2 \lg^{-1} (x^2+1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1-x)} + 5 \lg (1-x) = 6$

1.8. a) $2\lg \lg x = \lg (3 - 2 \lg x)$ b) $\log_2 (x-14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 (3x - 26)$

c) $4 \log_3{}^3 5x - 7 \log_3 15x + 7 = 0$ d) $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25\lg x}$

c) $x^{\log_5(5x)-4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$

c) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$ d) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0$ b) $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$

c) $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1$ d) $\frac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$

۲ ـ اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$

c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$

c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$

c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$

c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$

e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$

g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$ b) $2^{x+1} - 3^{x} = 2^{x+3} - 3^{x+2}$

c) $3^{2x-1} - 5^{3x-2} = 3^{2x+1} - 5^{3x+2}$ d) $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x} + 2 = 0$

e) $5^{4\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 = 0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2 = 0$

g) $3^{x+1} - 2 = 9^{x}$

h) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^{x} + 5^{x-1} + 5^{x-2}$

i) $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$ j) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$

k) $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$ l) $3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}} + 0{,}5 + 9 = 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x} - 17 \cdot 2^{-(x+2)} + 1 = 0$

e) $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2}$ f) $12\sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$

i) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

2.8. a) $\frac{3^{x} + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x} + 1}{2^{x} - 4^{x}} = 6$

c) $4 + \frac{2}{3^{x} - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x} + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x} = x$

۳ – گونومتريكي – يا كونجكچيز مساوات

3.1. a) $\tan x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x = \frac{2}{5}$ d) $\tan x = -1$

3.2. a) $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0{,}309$ b) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 0{,}809$ d) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$ j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$ l) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x - 3\sin x\cos x = 0$ b) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

c) $\tan^3 x + \tan^2 x \ \ 3\tan x - 3 = 0$ d) $\tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 0$ b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 1$ d) $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$

e) $1 - \sin x = \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$ f) $2\sin^2\frac{x}{2} = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$

g) $1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0$ h) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$

i) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$ j) $1 - \sin x\cos x + \sin x - \cos x = 0$

k) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$ l) $\sin x\cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$

m) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$ n) $(\cos x)^{\sin x} = 1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

۱۴ . ۱:نابرابرون(نامساوات)

۱۴ . ۱ . ۱ بنسټيزې کلیمی او شمیرقوانین

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنخښنی<, ≥,> او ≤ له لارې یو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کی به نابرابرونونه تر څیړنی لاندې ونیول شي، چی یوه یا دوه ریيلی واریابلی یا اوښتونی ولري . یو نابرابرون د دوه واریابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښايي، د هغو سره چی واریابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګنددي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دی ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واریابل یا اووښتونې یی غوره کولی شي او په ترم کی د هغي ځاي په ځاي کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونی وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډیري L کی سره راټولیګي.
په لاندې برخه کی به ډیر د وینامنطق(وینا‌سم اندیز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ (او د ډیري عملیو سومبولونه) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شمیرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونیول شي(مقایسه برخه ۳)، دلته دې a , b , c او dرییل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c,$ (14,1)

$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c$ (14,2)

$a:b<b:c$ (14,2)

$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c$ (14,3)

$a:c> b:c$ (14,3)

$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c$ (14,4)

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په ښټ کیږي یا که غواړئ برعکس کیږي. د بیلګي په توګه $3<4$ مګر که داوړه خواوې د 1 - سره ځل شي نو لاس ته راځي $-3>-4$ -

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښنو > سره باور لري دا په دې مانا چې$a \le b$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز (مثبت)دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$a.b>0 \Leftrightarrow$ (14,5)

$\Leftrightarrow a:b>0\ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0),$ (14,5)

$a.b<0 \Leftrightarrow$ (14,6)

$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0).$ (14,6)

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \mid= 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې توییریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$a.b \ge 0 \Leftrightarrow (a \ge \wedge (a \ge 0) \vee (a<0 \wedge b<0)$ (14,7)

$a:b \ge 0 \Leftrightarrow (a \ge 0 \wedge b>0) \vee (a \le 0 \wedge b<0)$ (14,8)

۱۴ . ۱ ۱الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :

یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلګڼونوR برخه ډیر) ده۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو اینتروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشي ، د ګڼکرښی یوه ټاکلی برخه ده، چی له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینتروال کی دننه وي یا خونديږ وي نو د بند

اینتروال څخه غږیږو او که اینتروال پوري اړه ونه لري، واز اینتروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینتروالونه.
د اوبیډیری په ورکولو سره په ګڼکرښی باندې، لاندې د انیتروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینتروال مختلف تیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده۰

1. $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ واز اینتروا ، اخر تخري په اینترول اړه نه لیر
2. $[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ بند اینتروال ، اخر توري په اینتروال ئوري اړه لري
3. $[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$ ښی واز اینتروال
4. $(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$ کیڼ واز اینتروال
5. $(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$ ښي لورته ناپاي او کیڼ لور ته واز اینتروال
6. $[a,\infty) = \{x \mid x \ge a\}$ ښي لور ته ناپای او کیڼ لور ته بند اینترال
7. $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$ ښي لور ته واز او کیڼ ورته ناپاي اینتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \mid x \le b\}$ ښي لور ته بند او کیڼ لورت ناپاي اینتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینتروال ، ټول رییلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیری
11. $\varnothing$ تشډیری

لاندې اینتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیری هم په اینتروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیری ټولنه ورسره جوړوي۰

1. $[-\infty,b] = \{x \mid x \le b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \mid x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \mid x \ge a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,\infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

.4 $[-\infty,\infty] = \mathbb{R}^+$

Alternative notationپورته ته الترناتیو یا بدیلي لیکنبڼه

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنبڼۀ په لاندې ډول ورکو لکیږي

$]a,b[= \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \le x \le b \}$

$[a,b[= \{ x \mid a \le x < b \}$

$]a,b] = \{ x \mid a < x \le b \}$

یادونه : داپورته د اینتروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انیتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$

نیم و از اینتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\le b\}$

نیم واز اینتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\le x<b\}$

واز اینتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اینتروال : $(-oe,b]=\{x|x\le b\}$

کښ بند ناپای اینتروال : $[a,oe)=\{x|x\ge a\}$

ښی واز ناپای اینتروال :۰ $(-oe,b)=\{x|x<b\}$

کیڼ واز ناپای اینتروال :۰ $(a,oe)=\{x|x<b\}$

ناپای اینتروال : {x د ګښکرښی ټکی دئ|x}=(-oe، oe)

بیلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستیزه ډیرۍ Rکی د لاندې برابرون پیژندډیرۍ غوښتنه منځ ته رااچوو.

$$x - 2 = 1 + 7 - x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : د دې ترم $T1(x) = x - 2$ پیژندډیری ده:

$D1 = [2 , oe)$

په همدې توګه د ترم $T2(x)=1+7-x$ پیژندډیری ی ده: $D2 =(-oe,7)$

د برابرون دپیژندډیرۍ لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \cap D_2 = [2,\infty) \cap (-\infty, 7] = [2,7]$$

لاندې څیره وګورې(متاسفانه، چې ښه څېره نه شم کښلی)

۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعدې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چی یوه اوښتونې یا مجهوله ولري، او اوبیونې یی په ټولیزه توګه د اینتروالونو له لارې انځوریږي.
(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو $5x-6<4+9x$ دواړو لورو ته $-9x + 6$ ورزیاتوو، نو لرو $-4x < 10$ دواړه خواوې په 4 - ویشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي $x > -5/2$

د اوبیونې ډیر یا اوبیډیری : $L=(-5/2,oe)$

که په یوه غوښتونکی حل یا ویش کی ځله وونی، همداسي پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مخنخښي په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چی وي، باید په پام کی ولرل شي، چی یواځي هغه د نابرابرون شمیرل شوي دx - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول ىی سملاسي (په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېرۍ یا برخحلډیرۍ کیدی شي چی د غوڅډیرۍ په څیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیرۍ شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوځډیرۍ جوړښت، کیدی شي چی د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په څیر په ګنوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیرۍ د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیرۍ ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

$$(3x-5)(x-2)<4(x-2)$$

که په (x-2) باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د $x > 2$ لپاره $(x-2)>0$

د $x = 2$ لپاره $(x-2)=0$

د $x < 2$ لپاره $(x-2)<0$

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته ښه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x-5 \le 4 <=> 3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځي هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځي هغه x د

$$x \in (2,\infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$$L_1 = (2,\infty)\bigcap(-\infty,3] = (2,3]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم حالت:

$$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$$

د لته په (x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.

د x = 2 ارزښت لیکلو ربښتیا وینا $0 \geq 0$ لاس ته راځي او له دې امله

L2 = {2 }

دریم حالت:

$$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$$

د 0 > 2 - x له امله د (۱۴ . ۳) له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کې راوړل شي:

$$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$$

د برخه اوبیډیریو ټولنی څخه ټول اوبیډیر) لاس ته راځي:

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$$

نو ټولې اوبیونې هغه x دي د کومو لپاره چې لرو: $2 < x < 3$

په لاندې بیلګو کې نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

(3x-1)/(2x+4)<2

د شرایطو 0=|2x+4له مخې، دا په دې مانا چې 2=| x د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د x>-2 لپاره 0<(2x+4)

د x<-2 لپاره 2<(2x+4)

سره سم یواځې دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

ځیره ۱۴ ۱ الف: دا ځېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبیډیری روښانه شو۰

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی۰

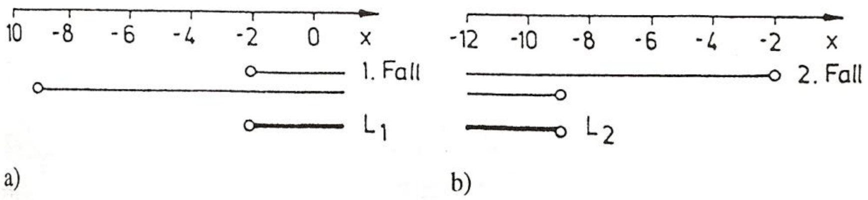


Bild 14 1

ځیره ۱۴ ا ب : دلته هم ګښونوکربښي شته، چۀ په هغي کي دا اوبیډیری روښانه کاړل شوي دي۰ ، که ځیره مي ونه کاړله، نو داکار بج ګران لوستونکی هم وکولای شي۰

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چی په (۵.۱۴) تر (۱۴ . ۸) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښایي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګي راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښته شوي، له دې امله يې ليکښه د مخکنۍ ليکښې سره توپير لري. دا لاندې لرو .

$$ax + b > 0, \quad a \neq 0 \quad ;$$

$$x^2 - 5 < 0 \quad ;$$

$$|2x - 5| \leq x + 10 \quad ;$$

دلته اوبيونې اينتروالونه دي. ښول کيږي، چې اوبيډيرۍ څنګه پيداکيږي او د دې لپاره

اړيين شرايط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه ګڼ زياتيدلی يا کميدلی شي
- که دواړه خواي د کميز ګڼ سره ځل شي يا په کميز ګڼ وويشل شي، نو مخنخښه تغير خوري. که زياتيز وي، نو دواړه خوا په توان کيدی شي او ريښج يې وستل کيدی شي، پام دې وي، چې برابرون بيا زياتيزه او که کميزه مخ نخښه غوره کوي او يا دواړه
- موږ (1.9:1 اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلسټ يا اوبيډيرۍ

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبيډيرۍ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ (1.9:2 اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \iff x^2 < 5 \iff |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روابسه تشيرح لپاره يا شننې لپاره يو د حالت توپير رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا يا

ورته $x > -\sqrt{5}.$ نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \iff -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبيډيرۍ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x-5 \leq x+10 \quad x \leq 15, \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x-5 \geq 0 \quad x \geq \frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \geq 5 \quad \Longleftrightarrow$$

(i) که وي $2x-5 \geq 0;$ نو دی $|2x-5| = 2x-5,$ او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 15.$$

(ii) $2x-5 < 0.$ نو دی $|2x-5| = -(2x-5)$ او لرو

$$-2x+5 \leq x+10 \quad \Longleftrightarrow \quad -3x \leq 5 \quad \Longleftrightarrow x \quad \geq -\frac{5}{3},$$

$$2x-5 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x < 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x < \frac{5}{2}.$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیری له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو څو تمرینونه ورکړ شوي، کهٔ ګران مینه وال یې غواړې تمرین کړي۰

لاندې نابرارونونه اوبی کړئ

(i) $\frac{3}{x+5} < 2$,

(ii) $\sqrt{x^2 + x + 2} > x$,

(iii) $|x+5| > |x-2|$.

بیلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$, $x|=-6$; $x |= 3$

د اصلي ماتلاندې (3-x)(x+6) سره د حٔل له امله باید بیا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونیول شي. شرایط، د کوموله مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کیدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې ومیندل شي:

$(3-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6> \vee (3-x)<0 \wedge x+6<0$

$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x>-6) \vee (x>3 \wedge x<-6) \Leftrightarrow -6<x<3$

نو (۱۴ . ۶) شوونې کوي یا ممکنه وي، چی هغه ورشو(ساحه یا ډیری یا نه هم شهچاپیریال) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز یا نفي دئ:

$(3-x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3-x) >0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$

$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x>3$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کې لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز ځله ووني یا مثبت فاکتور (3-x)(x+ 6) سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6 \ge 6-2x \Leftrightarrow x \ge 0 \Leftrightarrow x \in [0,\infty),$$

$$L_2 = (-6,3) \cap [0,\infty) = [0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x < -6 \vee x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-6) \cup (3,\infty)$

دا چې د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس(تاسیر لري:

$$x+6 \le 6-2x \Leftrightarrow x \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$$

$$L_2 = [(-\infty,-6) \cup (3,\infty)] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $: L = L_1 \cup L_2 = [0,3) \cup (-\infty,-6) = (-\infty,-6) \cup [0,3)$

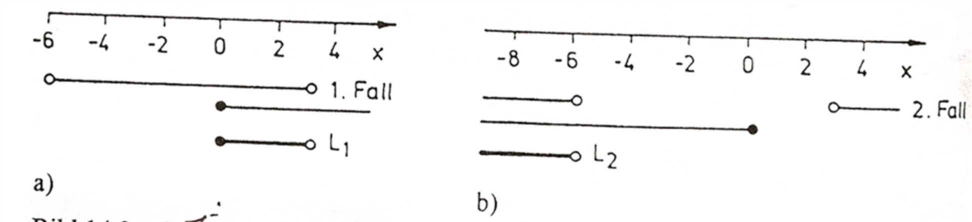


Bild 14.2 ځکره

د ځلورۍ برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د ځلورۍ ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کي نیولو سره دx^2 د مخ (کینږ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چې دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چې د اړیکنخښي په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولووروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x1=4 , x2=1/2$$

$$x^2-\frac{9}{2}x+2>0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2})>0 \Leftrightarrow (x>4 \wedge x>\frac{1}{2}) \vee (x<4 \wedge x<\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x>4 \vee x<\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د (۱۴ . ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېری : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسیره دې په یاد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کرېږ کښلو له مخې هم حل کیدی شي، په ځانګړي ډول هلته، چې اړوند مربع شکل رییل حل نه لري۰ بالاخره پهپای کې د وېش د مخنښي راوړلو یوه بیلګه ښایو.

بیلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\le 0,\ x\ne\frac{2}{3}$.

حل (۱۴،۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2}\le 0 \Leftrightarrow (x\ge -5 \ \wedge\ x<\frac{2}{3}) \vee (x\le -5 \ \wedge\ x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\le x<\frac{2}{3}.$$

د سیستم حل ډېری یا حل سټ: $L=[-5,\frac{2}{3})$.

۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی یا مجهولی یا اوښتونې سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیډیری L د یوګونو نابرابرونونو اوبیډیریو غوڅډیری ده . ګټور یا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کی په نمره کړی شي ، ددې لپاره چی دا یوګوني (دا په دې مانا چی یو یو) اوبی کړی شو.

بیلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\ge 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\ge 3-x \Leftrightarrow x\le 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سیستم اوبیډیری: Lدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۱۴ . ۸

$$-2<\frac{4x-10}{x-1}<3, x\neq 1$$

د داسی نابرابرون ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دئ:

$$I. -2<\frac{4x-10}{x-1}$$

$$II. \frac{4x-10}{x-1}<3$$

د همغه فاکتور(x-1) سره د ځل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرگ د لیدوړ بڼی سره وڅیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :
(یادونه: په لاندې کې دې (1)Fall لومړې حالت او (2)Fall دویم حالت وي)

....*I*..*II*

1.$Fall^{(1)}$ $x\in(1,\infty)$

	I	*II*
	$-2x+2<4x-10$	$4x-10<3x-3$
	$\Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow x\in(2,\infty).$	$\Leftrightarrow x<7 \Leftrightarrow x\in(-\infty,7).$
	$L_{I_1}=(1,\infty)\cap(2,\infty)=(2,\infty)$	$L_{II_1}=(1,\infty)\cap(-\infty,7)=(1,7)$

2.$Fall^{(2)}$ $x\in(-\infty,1)$

	I	*II*
	$-2x+2>4x-10$	$4x-10>3x-3$
	$\Leftrightarrow x<2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2).$	$\Leftrightarrow x>7 \Leftrightarrow x\in(7,\infty).$
	$L_{I_2}=(-\infty,1)\cap(-\infty,2)=(-\infty,1)$	$L_{II_2}=(-\infty,1)\cap(7,\infty)=\varnothing$

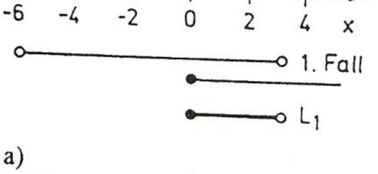
$$L_I=L_{I_1}\cup L_{I_2}=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$$

$$L_{II}=L_{II_1}\cup L_{II_2}=(1,7)$$

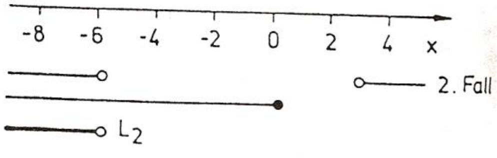
د LI او LII غوښدیرئ جوړول بیرته کیدی شي چي د یوګونو اوبیدیریوګنوړانګه باندې د لیدنی شي)(څیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیدیری:

$$L=L_I\cap L_{II}=(2,7)$$



a)



b)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو(ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیډیرۍ د یوه اوبیډیرۍ $R^2 = R \times R$ برخډیرۍ ده، چې د هوارې په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دی. په دې برخه کی به موږ یوائې د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \ (\geq 0 \ , <0, \leq 0 \ ) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو x , y او ثابتو ځله وونو(ضریبونو)

$$a,b,c \in R$$

سره د شرایطو $a| = 0 \vee b| = 0$ سره سم تر څیړنی لاندې ونیسو.
که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چی د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم (۱۴ . ۹) ، چی ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیډیرۍ په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو(د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پریښوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځاي شوي، نو راتلونکی کرښه د اوبیډیرۍ پورې اړه نه لري او کیدی شي یوائې ټوټه ټوټه کرښی (پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چی د ډیرۍ ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیرۍ پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د y په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چی په یوه کره نیولي x په روښانه توګه د لویو y - ارزښتونو لپاره پوره دی نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چی د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنی نیمی هوارې ټول ټکی اوبیډیرۍ L جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴)

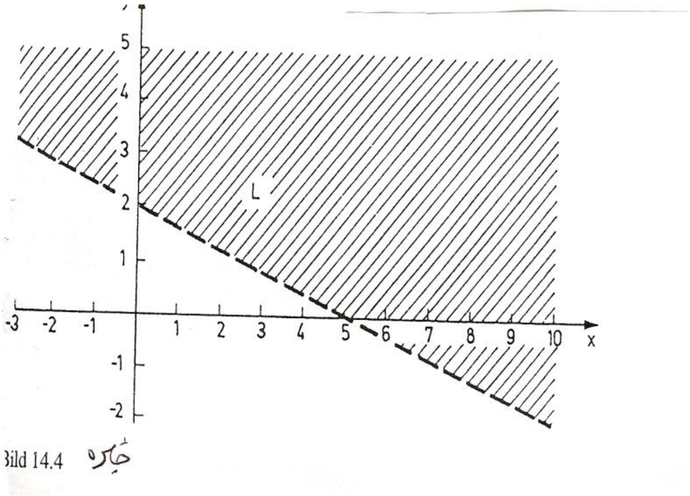
دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون (۱۴ . ۹) کی د مخه نیسي چي $b|=0$ دی. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دی، چی د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چی په کرښه ax+bx+c=0 نه وي پروت٠

ازمایو چي ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کی باور لري او یا نه.که ممکن وي نو د شمیرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0) ټاکو. دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا ریښتیا وینا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبیډیرۍ پیداشوی ځاي (ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسیا کوي) تصدیقوي.
دلته یوه ځیره کښل کیږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ږدو او بیا کرښه باسو٠ په کواوردینات کي د هوارې هغه برخه، چې اوبیډیرۍ ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابیډیرۍ ده٠

د یوه نابرابرونسیستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کیږی او بالاخر ه بي د یوګونو اوبیډیریو غوځډیرۍ نیول کیږي یا جوړیږي.



بیلګه ۱۴ . ۱۰:

I . $2x+y<6$

II. $4x-y>0$

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبیډیري LI کی پروت دۍ. دا چی په نابرابرون II کی د (0 , 0) سیده برابرون باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلګي په توګه (0 , 1) کیښول شي، کوم چی د په ځنوالي یا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې امله اوبیډیرۍ LII کی نه دی پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف(. ش ۱۴ . ۵ ب دسیستم حلډیری L ښايي چي له دوه نیمکربښو بندیږي یا له دوه نیم کرښومحدودیږي.
د وړاندیزارزښت لري چی د تمرینونو په خپلواك کار کولو کی د غوښتونکو اوبیډیریو L د یوګونو نیمهوارو غوځډیری حتي تر غاړې پورې رنګینه یا کرښی کرښی راوکښل شي، چی په دې ډول یی یو کواوردیناتسیستم د انځورولو لپاره بسیا وکړي .ش ۱۴ . ۵

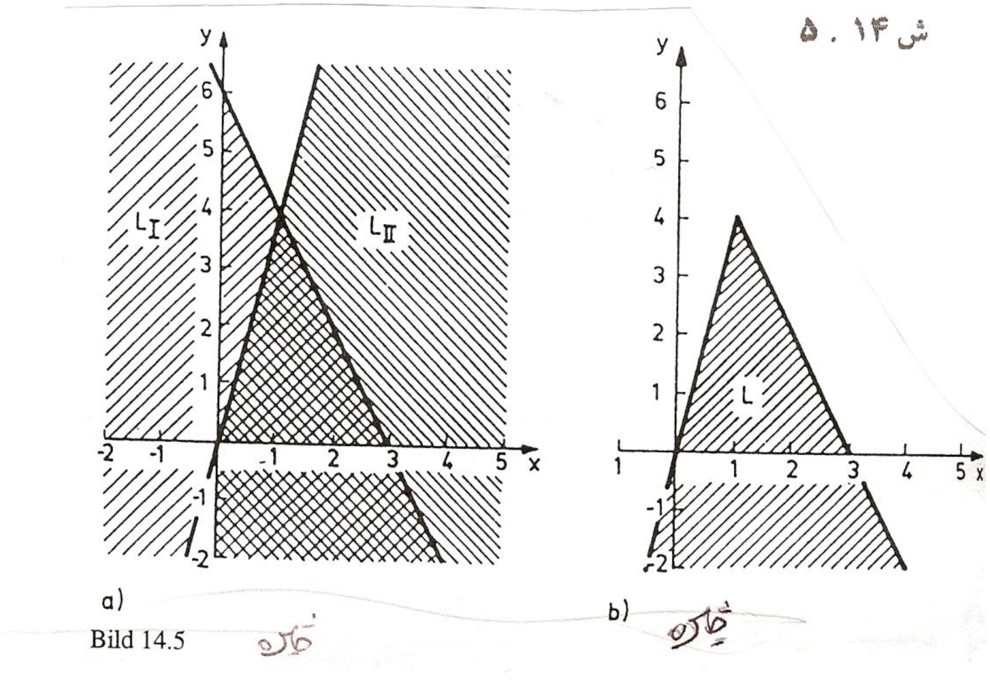


Bild 14.5

بیلګه ۱۴ . ۱۱:

I . $x-3y-6<0$ II. $-x+y+1<0$

III. $x-6<0$

دا اوبیډیری په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ کرښي
د پورته نابرابرونسیستم له مخې د هر نابرابرون لپاره کرښه کشل کیږي، په یوه کواوردینات سیستم کې او بیا د هوارې هغه برخه، چې دریواړه کرو کې رابنده منهواره وي، هغه يې اوبی دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

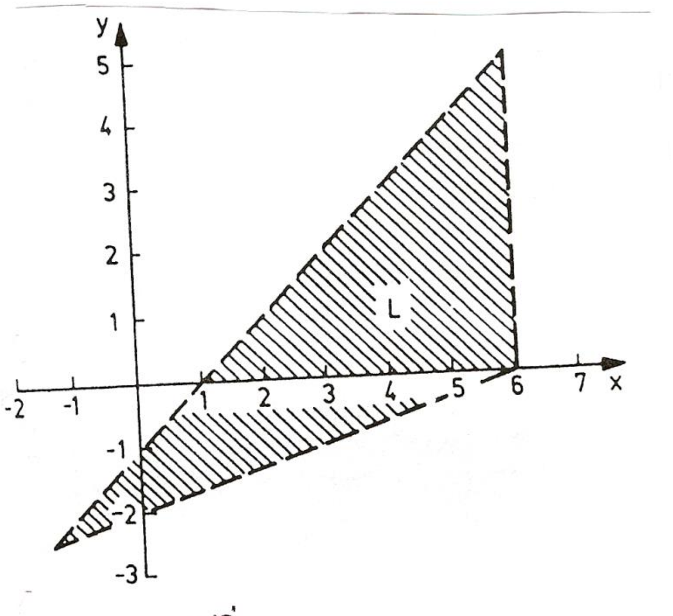


Bild 14.6 خاکره

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براورن یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه ځرګنده ده چی د یوه رییل ګڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیریږي٠
داسی دئ:

$T(x) = T(x)$ لپاره $T(x) \geq 0$ د (14,10)

$T(x) = -T(x)$ لپاره $T(x) < 0$ د (14,10)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چی د مطلقه ارزښت لرې پریښول شي، یا د نورو ترمونو سره په تړلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په (۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چي په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پریښول کیږي چی ځانونه په قاعده کي په اینتروال وښایي، کوم چی دیسیونکت(پردي) برخه ډیری د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چی (T(x ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چی د کنترول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رییل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي٠

$$|a \, . \, b| = |a| \, . \, |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b|$$ د $b \neq 0$ لپاره

۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چی ایا دا اوبیونې په نیول شوي یا فرض شوي اینتروال کي پراته دی او که یوائې د اوبې په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوبیوني اوبیډیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوبیونې شونی یا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم
کی انځوریږي .
د دواړو فنکشنونو غوځټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبیونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

(14,11) د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

(14,11) د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

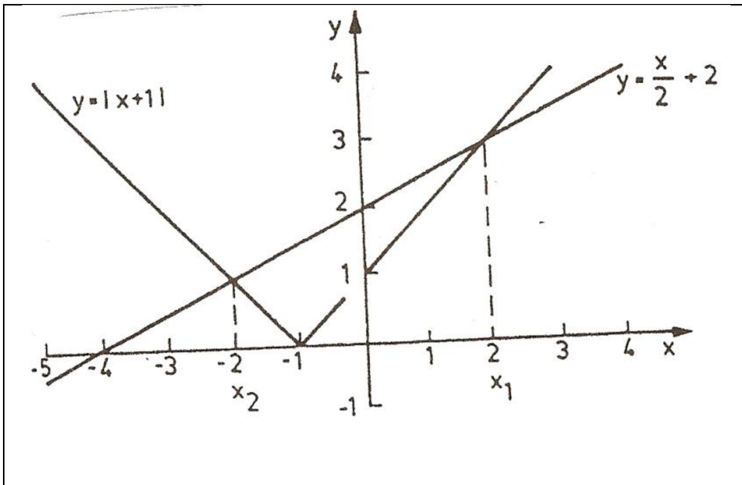
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیډیری $L = \{-2, 2\}$



په داسې حال کې چې د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$, ګرافیکی انځورونه، په ښکاره ډول یوه کرښه ده، کیڼ اړخ، $y = |x+1|$ د (۱۴ . ۱۱) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.
اوبی : کیدی شي په څ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شوونې یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینتروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

|1- x|-|2x+3|=1

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د x<1 لپاره |1-x|=1-x

د x>1 لپاره =-1+x

او(لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د x>-3/2 لپاره |2x+3|=2x+3

د x<-3/2 لپاره =-1x-3

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

	x<-3/2	-3/2<x <1	x>1
|-1+x|	1-x	1-x	−1+x
|2x+3|	2x+3	-2x-3	|2x+3|

له دې امله د برابرون اوبې کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1 - x - (-2x - 3) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1 - x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1 + x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = -5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په څټ یا تضادکی دی، چی x3 = -5

یواځي ښکارندډوله اوبی دی(دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په څیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبډیری : L = {-3,-1}

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې څرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي. د کينې اړخ یا لور مطلقه ارزښت خپلواك یا ازاد ښودل کیدی شی چی ټوټه ټوټه د مخه تیرشوي شمیرنو په بوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقیبیږي:

د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

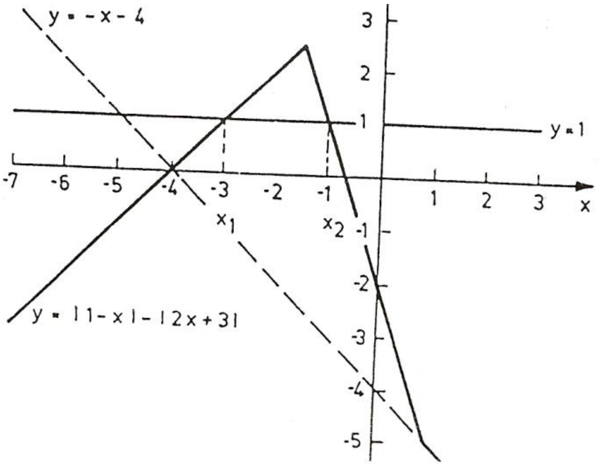
د $-2/3< x < 1$ لپاره $|1- x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - یا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شمیرل شوو اوبیونو پرتلې له پرتلې مقایسي ځیره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښايي، چی دواړه کرښې ریښتیا د $-3/2 > x$

او $-3/2< x < 1$-لپاره رښتیا هره یوه بله یوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره یو بل نه پریکوي. په دریم حالت کی د اړوند کرښی ټوټی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرتکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په ځیر حل د نیول شوي اینتراوال د باندې دی ځیره (شاید داځیره هم ځیره نه شي، کهٔ کرانو مینه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګټور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه ځیره باید ریښی او یا راغلی وي، یا راغلې وی۰



که د مطلقه ازښت نخښنی په یوه څلوري - یا مربع ترم کی له منځه وړل کیږي، نو کیدی شي چی د مخنخښني غوښتل شوي ځیرنی چي په برخه ۱۴. ۱ . ۲ کی تر ځیړني نیول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بیلګه ۱۴ . ۵ دې مقایسه شي)

بیلګه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x^2 - 6x + 5| = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x<5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2=0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5,65 \in [5, \infty)$, $x_2=3-\sqrt{7}=0,35 \in (-oe, 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

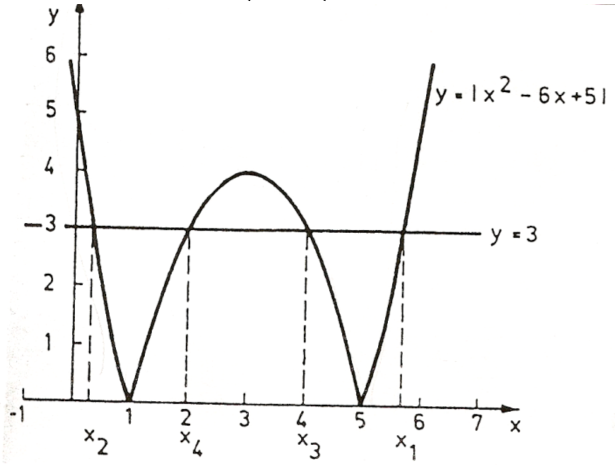
$L \Rightarrow x_3=4 \in (1, 5)$, $x_4=2 \in (1, 5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیډیری: $L = \{3-\sqrt{7}; 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

ځیره ۱۴ . ۹ د گراف له لاری اوبی ښایي. کیڼ لور $y=|x^2-6x+5|$

د (۱۴ . ۱۲) له امله د پارابوللیندو څخه یوځای کیږي. ځیره ۱۴ . ۹



ځیره ۱۴ . ۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبې کې ، په کوم کې چې n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$, $i = 1,2,...n$ منځ ته راځي، 2^n حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دئ ، کوم چې موجود دی ، چې د ترم $T_i(x)$ د تیپ یا بڼې وي چې یا
$T_i(x)$ >0 او یا $T_i(x)$ 0> راکوي، یعنی د دوه توکو د وارییشن امکاناتو ټولګې ته (پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښې د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰)
قاعدې سره سم 2^n برابرونونه منځ ته راځي، چې په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیونې $x_1,x_2,x_3,......$ ولرودئ شي. یوازې دا باید وازمایل شي ، چې ایا دا اوبې xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.
د دې ټولیزې تګلار پسی موږ په بیلګې ۱۴ . ۱۳ کې د
T1(x)=1-x, T2=(2x+1)
سره، په لاندې $2^2 = 4$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0: \quad (1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$$

$$2.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0: \quad (1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د3- = x1=1, x2لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرونو کې مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کې د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چې بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دئ

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : |7-3x|>2

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت:

$$7-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$
$$7-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$
$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$
$$-7+3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [, \infty)$$
$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$
$$\Rightarrow$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \setminus (5/3, 3)$$

په پورته کې د دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کيږي:

بيلګه ۱۴ . ۱۶: |x-5|<|x+1|

د يوګونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنخښی:

د x > 5 لپاره |x-5|= x–5

د x < 5 لپاره |x-5|=-x+5

او

د x ≥ 1 لپاره |x+1|=x+1

د x ≤ -1 لپاره |x + 1| = -x - 1

په يوه ليد وړ توګه په لاندې توګه راښوليګي رايوځاي کيږي يا راغونديږي :

	X > -1	-1≤ x<5	x≥ 5
|x-5| =	-x+5	-x+5	x-5
|x+1|=	-x-1	x+1	x+1

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1)$

|x-5|<|x+1|<=>-x+5<-x-1 <=> 0<-6

د هر x<-1 نابرابرون يوې ناريښتيا وينا ته لارښودوي، چې په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چې: L1 = Ø

دوم حلات $x \in [-1, 5)$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

|x-5|<|x+1|<=> -x+5<-x-1 <=> x>2<=>

$x \in [2, \infty]$

$L_2 = [-1, 5) \cap (2, 5) = (2, 5)$

دریم حالت: $x \in [5, \infty)$

|x-5| < |x + 1| <=> x - 5 < x + 1 <=> 0<6

هر 5 ≥ x نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: L3 = [5 , oe)

حلډیری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2, 5) \cup ([5, \infty) = (2, \infty)$

بیلګه ۱۴ . ۱۷: |x²-4x-21|<24

د x²-4x-21≥0 <=> x<-3 v x≥7

او x²-4x-21<0 <=> -3<x<7

څخه لاس ته راځي:

د x<-3 v x≥7 لپاره |x²-4x-21|=x²-4x-21

د -3<x<7 لپاره = -x²+4x+21

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -3] \cup [7, \infty)$

|x²-4x-21|<24 <=> x²-4x-21<24 <=> x²-4x-45<0

<=> -5 < x < 9 <=>

x ∈ (-5,9)

$L_1 = [(-\infty, -3] \cup [7, \infty)] \cap (-5, 9) = (-5, -3] \cup [7, 9)$

دویم حالت: $x \in (-3, 7)$

|x²-4x-21|<24 <=> -x²+4x+21<24 <=> x²-4x+3>0

<=> x < 1 v x > 3 <=>

$x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty),$

$L_2 = (-3, 7) \cap [(-\infty, 1)] \cup (3, \infty) = (-3, 1) \cup (3, 7)$

اوبیډیری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5, 1) \cup (3, 9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی به په یوه بیلګه کی داسی نامساوات وڅیړو، په کومه کی چی مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کی منځ ته راشی.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د (۱۴ ، ۱۰) له مخی د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) له مخی په هر وخت کی د همغه ترم مخنخښه باید په پام کی ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د$x<-1/2$ لپاره $|1+2x|=-1-2x$

او

د $x<1$ لپاره $(1-x)>0$

د $x>1$ لپاره $(1-x)<0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کی ګنوړانګه سره بیله یا توټه کیږي، داسی چي په راتلونکو ګڼلو کی یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

	$X<-1/2$	$-1\leq x<1$	$x>1$
$\|1+2x\|$	$-1-2x>$	$1+2x$	$1+2x$
$=1-x$	>0	>0	<0

لومړی حالت: $x \in (-oe, -1/2)$

$$-1-2x \leq 1-x \Leftrightarrow x \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$x \in [-2 , oe)$$

$$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [-2 , oe) = [-2 , -1/2)$$

دویم حالت $x \in [-1/2,1)$:

$$1+2x < 1-x \Leftrightarrow x<o \Leftrightarrow x \in (-oe,0]$$

$$L_2 = [-1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1 - x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو سټ(اوبیډیری):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لاینی ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

(۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه ښي لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بڼی(۱۴ . ۹) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1|>x-2x-4$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1<0$ لپاره $= x + y -1$

لومړی حالت: $-x -y +1 > 0$

$|-x-y+1|>x-2y-4 \iff -x-y+1>x-2y-4 \iff -2x+y+5>0$

$L1=\{(x,y)|-x-y+1 \geq 0 , -2x+y+5>0\}$

دوم حالت: $x-y+1<0$

$|-x-y+1|>x-2y-4 \iff x+y-1>x-2y-4 \iff 3y+3>0 \iff y<-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1\}$

له دې سره L1 او L2 د اوبيډيرئ دوه نابرابرونونو غوڅديرئ ده او کيدی شي، لکه څنګه يو نابرابرون د يوه ګراف سره انځور شي (ځيره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبيډيری بيرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبيډيريو ټولنديرئ ده۰ (ځيره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)۰

که په يوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې يا – وييني د (۱۴ . ۱۳) بڼی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نيولو سره څلور حالتونه يو له بل توپير کيدی شي.

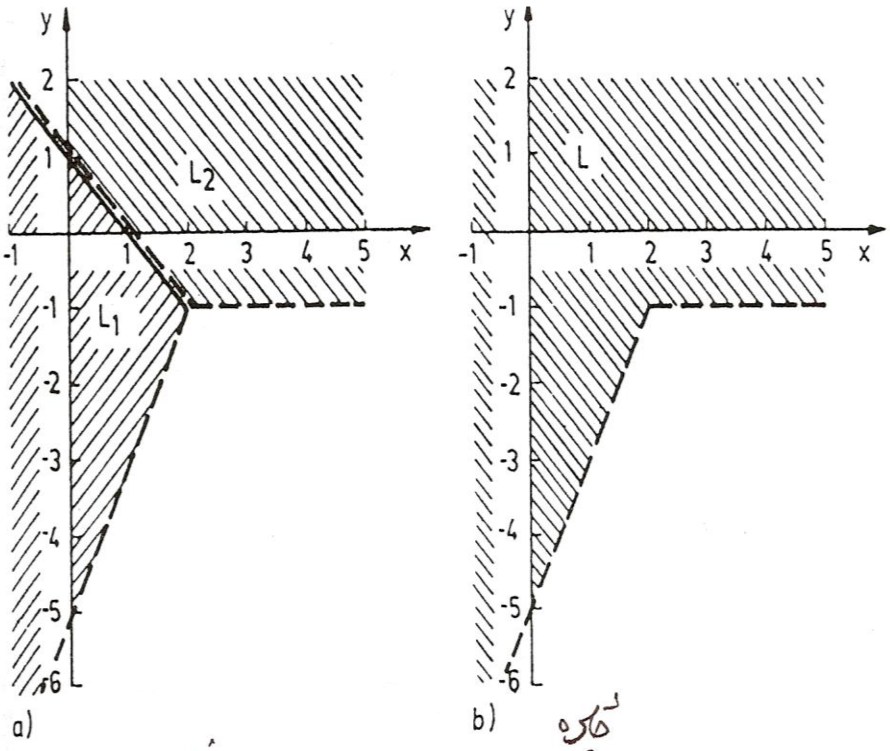


Bild 14.10 ځاره

تمرينونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې نامساواتو حلډېرې پيدا کړی

1. a) $8x-3<2x+9$ b) $5-7x\le 3x-10$

c) $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{1}{2}+\frac{x}{9}$ d) $3(3x-2)\ge 4(3-2x)$

e) $\frac{8x-5}{5}\le\frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}x>\frac{5}{4}x+\frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9}+6x\ge 2(\frac{5}{6}+3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8}-6)<\frac{x}{6}-\frac{x}{8}+1$

2. a) $(3x+1)(2x-1)<(5x-3)(2x-1)$

b) $(8x-9)(3x+2)\ge(2+7x)(2+3x)$

c) $(7x-3)(5-7x)>(3-7x)(5x+3)$

d) $(5+2x)(7-5x)\le(10+4x)(2-3x)$

e) $x^2-x-6\le 2x+4$ f) $x^2+5x-6>3-3x$

g) $x^2+3x\ge -2x-6$ h) $x^2-4x+4<4x-8$

3. a) $\frac{3}{2x-4}\le 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x}\ge 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2}<2$ d) $\frac{5x+3}{x}<-2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2}>5$ f) $\frac{9-3x}{x-3}>-3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3}<3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1}\ge 12-\frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4}\le\frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x}>\frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3}<\frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1}\le\frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{3x+1}{x-2}>4$ f) $\frac{x-3}{1-6x}-\frac{2x+1}{4x+3}\ge-\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{3x-3}\ge 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x}-\frac{2-6x}{1-3x}<\frac{3}{8}\cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x-3)(3x-2)<0$ b) $(x+3)(7-x)\le 0$

c) $x^2+4x+3\ge 0$ d) $x^2-8x+7\le 0$

e) $x^2+4x+5<0$ f) $x^2-6x+10>0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$

6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \le 0$

c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \ge 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$

g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4} \le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \le 0$

8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$

c) $8(x - 2) \ge \frac{20}{x+1} + 3(x - 7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x - 6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرۍ وټاکئ

9. a) $2 + x \ge 2x - 7$
$5(x - 3) \ge 2(x - 3)$

b) $x + 6 < 14 - 3x$
$6 + 7x \ge 3x + 5$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$

d) $x + \frac{1}{3} \le 2x - \frac{7}{6}$
$5(x - \frac{3}{2}) \le 2x - 3$

10. a) $x^2 - 3x < 0$
$2(x + 2) < 4x - 1$

b) $x^2 + 6x + 8 < 0$
$2(x + 2) > x + 3$

c) $x^2 - 9 < 0$
$x + 2 > 2(x - 1)$

d) $x^2 - 3x + 3 > 0$
$4(x - 1) < 2(x + 1)$

11. a) $x^2 - 4x - 5 \le 0$
$x^2 + 6x - 16 < 0$

b) $x^2 + 2x - 8 < 0$
$x^2 - 3x - 4 > 0$

c) $x^2 - 5x > 0$
$x^2 - 9 > 0$

d) $x^2 - 6x + 5 < 0$
$x^2 + 8x + 15 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. a) $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$ b) $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$

c) $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$ d) $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$

13. a) $3 - x < 2 - 4x$ b) $x+5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$

$x+3 < \frac{1}{2}(x+1)$ $4(x-1) < 13 - \frac{1}{4}x$

$\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$ $2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاڼیری په کارتیزې کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکې انځور کړئ.

14. a) $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$ b) $y < -\frac{2}{3}x + 2$

c) $x < 2y + 2$ d) $x > -y + 3$

e) $4x - 5y > 12$ f) $-3x - 8y \leq 24$

g) $2(y - 3) \leq 6(x - 1)$ h) $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$

15. a) $2x + 3y > -6$, $x - y < 2$ b) $3x - y > 3$, $x + y > 4$

c) $x > 1$, $x + 2y < 4$, $y + 3 > x$ d) $x - 4y - 6 \leq 0$, $2x + y - 3 \leq 0$, $y - 5 \leq 0$

16. a) $-2 < x + y < 2$, $-2 < x - y < 2$ b) $x > 2$, $-3 < y < 2 + x$, $x + y < 5$

c) $x^2 - y^2 \leq 0$ d) $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حاڼیری د شمیرلو او همداسې ګرافیکې لارې پیداکړئ.

17. a) $|x - 3| = 5$ b) $|x + 2| = 7$

c) $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$ d) $|x + 3| = |3x - 4|$

e) $|x - 4| = |2x + 3|$ f) $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$

g) $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$ h) $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$

18. a) $|x^2 - 2x - 8| = 7$ b) $|8 - 2x^2| = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $|2x - x^2| = 8$
d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$
e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$
f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$
g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$
h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$
b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلډېرۍ پیدا کړۍ

20. a) $|x - 2| < 3$
b) $|2 - 4x| \geq 1$
c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$
d) $|2x - 3| < x + 3$
e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$
f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$
g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$
h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$
b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$
c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$
d) $|15 + 2x - x^2| < 7$
e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$
f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$
g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$
h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$
b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$
c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$
d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$
e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$
f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلډېرۍ په یوه په یوه کواوردیناتسیستم کې انځور کړۍ او ا نځور یې وکاږۍ

23. a) $x + y < |3x + 2|$
b) $y + |x + 2| \leq 4$
c) $x + |y - 2| < 3$
d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$
e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$
f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$
g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$
h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ فنکشنونه(بلواك يا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د تابع(بلواك) او بیا زیاته د فنکشن په نامه ځموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، ځما په اند یا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی ځموږ د څیړلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریبلی واریابلی ریبل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن) د ریبلو ګڼونو ډیری باندې ، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه یواځنی څیرونه ده. D دپیژند ډیری نومیږي .

د ټولو ارزښتونو ډیریَ چي y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژنددیریَ یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .

د ي وې قانونمندیَ f له مخی هر $x \in M$ یواځني یوه $y \in W$ باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کې به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: y=(x/2)+1, D=R , W=R

بیلګی ۱۵ . ۲ ته : د x<0 لپاره y=|x|
دلته D=R,W = [0,∞) د x>0 لپاره y=x²
پام دې وي چی په داسی حالت کي له کیڼ و ښي لور ته یا ګډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دی ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیڅیت(واضح)روښانه و څرګند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ او ۱۵ . ۲ چی په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: y =f(x) که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل F(x,y)=0 دی او فنکشن ایمپلیڅیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به 2y-x-1=0 D=R,W=R,فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپلیڅیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیڅیت شنینیزه بڼه (ایمپلیڅیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیڅیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلګی په توګه : که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیڅیت حل کیدونکی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونې ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لارې لارښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)

$x = \varphi(t)\ ,\ y = \Psi(t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: $x=2t\ ,y=t+1;\ -oe< t <oe$ به یوه پارامتري انځورونه وی او $x = t\ ,\ y = t/2 + 1$ به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X	-2	-1	0	1	2	....
Y	2	0,5	1	1,5	2	.....

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....	-3	2	-1	0	1	2	3	...
Y....	3	2	1	0	1	4	9	...

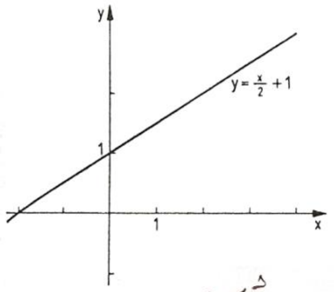


Bild 15.1 ځاره

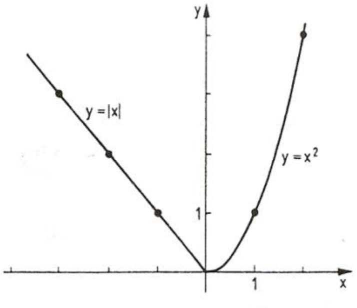


Bild 15.2 ځاره

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرښې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو

یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي .

څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال]a,b[کی هلته او هلته یا تیك هلته مونوتون جګیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$$f(x1) \leq f(x2) \quad (f(x1)>f(x2))$$
که د برابرونښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دیٔ

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینتروال] a,a-[کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي
$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$
د جوړه فنکشنونو ځیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي) دلته هم ځیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي) بیا هم ځیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

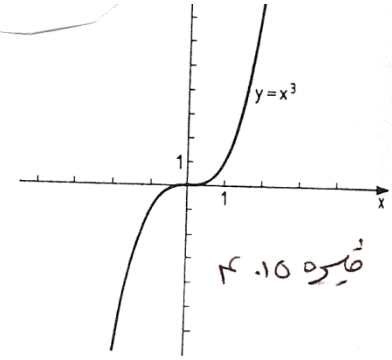
بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

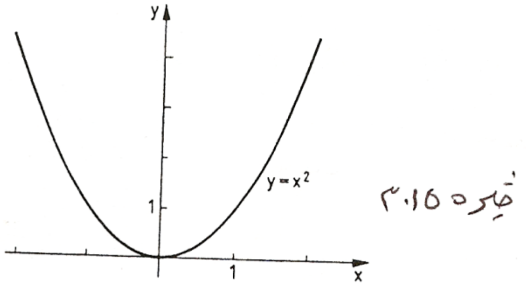
$$(-x^3) = -x^3$$

بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دیٔ:

$$(-x)^2 = x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





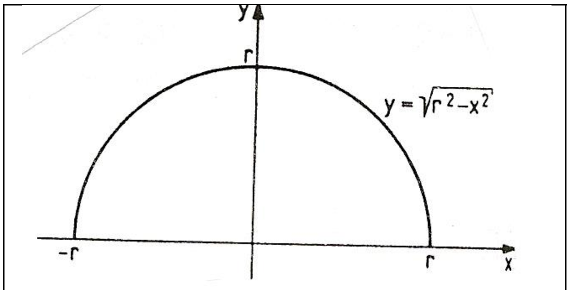
د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D (پیژندډیری ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري :

$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بیلګه ۱۵ . ۵:

	فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$ بند یا راګیر(محدود)(زه به دا له دې وروسته بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی ځیره ده $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \le r$ ش . ۱۵ . ۵

پیژند ۱۵ . ۵:

$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$f(x + p) = f(x)$

د دورانی یا تل راګځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول D ∈ x د f(x)=0 سره، د فنکشن f(x) صفر ځايونه بلل کیږي۰

د فنکشن صفرځايونه د مساوات f (x) = 0 د حل له لارې پيدا کيږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\ x + 1$ صفرځايونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دیَ (ځیره ۱۵ . ۱)

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځايونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 ,\quad x2 = -2$$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځايونه نه لري.) بيا هم ځير ۱۵ . ۶)

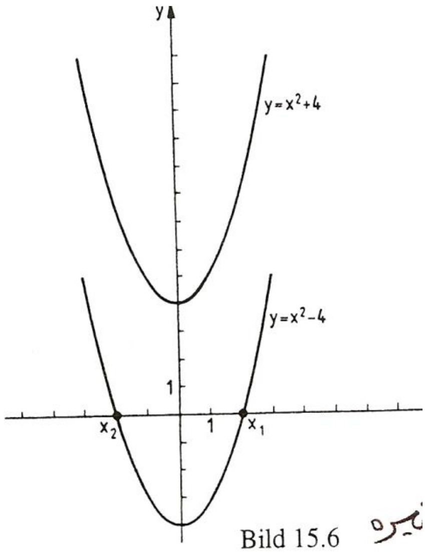


Bild 15.6 ځیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \quad , \quad y \in W \quad y = f(x),$

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (y = f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ښکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په ښت یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په ښت فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیزندونکی دي د y=f(x) په ښت یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په ښت فنکشن سره کتمت(- ورته) identic دی۰ د په ښت یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

کرافیکی ځیره y = x په کرښه د y =f(x)(هندارونه) یعنی په هنداره کی ځیرونه او لنډ یی: هندارونه) ده۰

بیلګي ۱۵ ، ۱ ته :

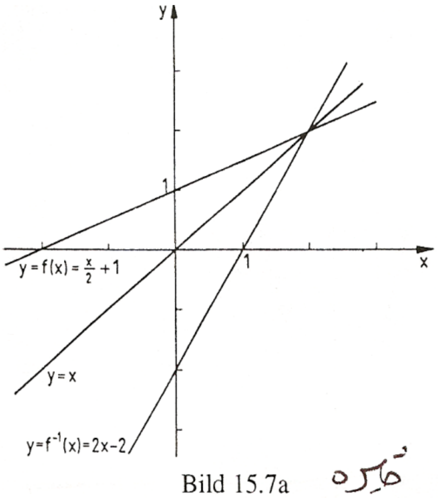


Bild 15.7a ځایره

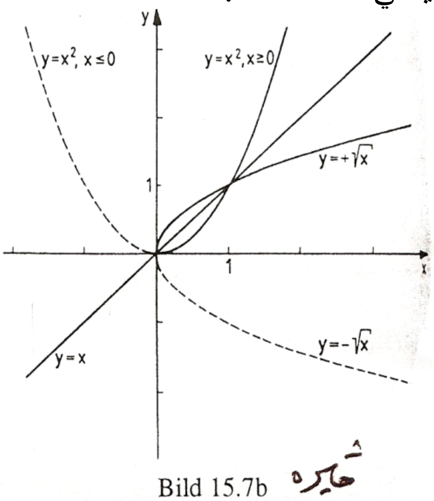


Bild 15.7b ځایره

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په ښت فنکشن داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سرې $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبې کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ځیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن
$x \in D \;\; y = x^2 ,$
ځیرره ش ۱۵ . ۳) په ځتکیدونکی دي یا په ځتکیدونکی نه دی.
هر $y \in W$ =[0,oe] پورې دوه[-oe,oe] = $x \in D$ اړه لري، یعنی $x=+y$او $x=-y$
مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونکی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2,x\geq0$
ته چپه- یا په ځت فنکشن $y=+x$ دی، او $y = x^2 , x < 0$ ته چپه- یا په ځت فنکشن $y = -x$ دی. (ځیره ۱۵ . ۷ ب) .
په تولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په ځت فنکشن
$y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کې بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ځیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړېوله خویونو له مخی وځیرل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي فنکشنونه) وځیرل شي. د فنکشنونو ځیرل به د هغو ځانګړېوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام وموميې، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالاینی فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینی فنکشنونو ځیره(ګراف) یوه کرښه ده چي په y = n کی دy - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m = \tan\alpha$

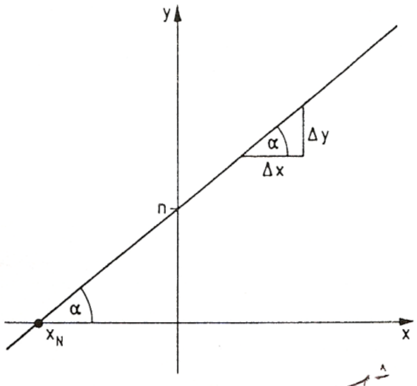


Bild 15.8

لري (ځېره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که m > 0 او لویږي یا ټیټیږي که m < 0 وي اوکه m = 0 وي،

دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که m|= 0 نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي (y = 0 لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښی برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرتېکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا نوره ښه غږځېکی n په y - محور د برابرونسیستم

$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو
$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$y=ax^2+bx+c , a \ |= 0$ (15 .3)

د مربع فنکشنونو څیره) ګراف (پارابول دئ چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیځینت) ځله وونی یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیړنی لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$
(خ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q$ $(a=1 , b=p , c=q)$ (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د څلورئ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:
$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2$ (15,5)
یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ئ ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:
$x_s= -p/2 , y_s =q - p^2/4$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$
(خ،۱۵ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. y = ax² (a|=0,b=0, c = 0)

د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د |a| > 1 لپاره خور، د |a|<1 لپاره پرسیدلی،د a > 0 لپاره پورته لور ته او د a < 0 لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:

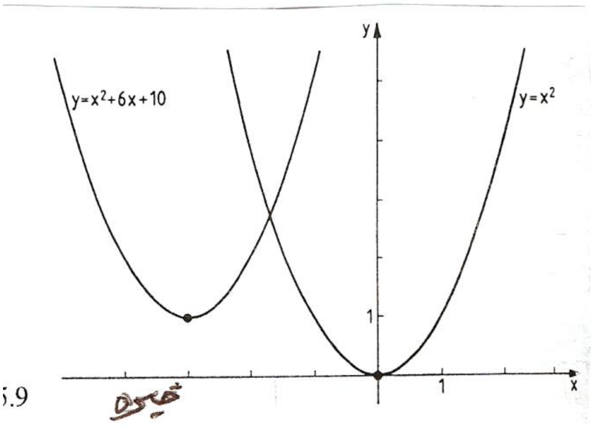
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(ځ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$



.9 شکل

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,(a=-1/2, b=1, c=4)

دککرۍ کواوردینات:

$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$

دا چي a = -1/2 دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

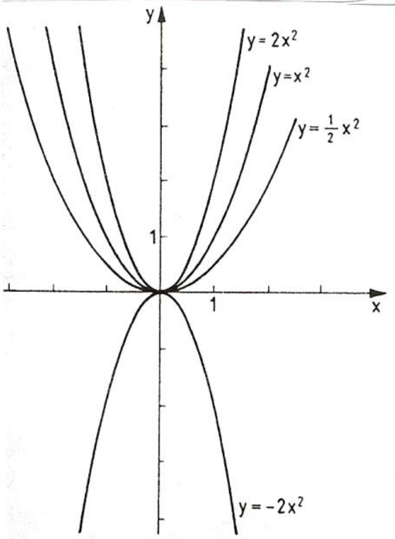


Bild 15.10 ځېره

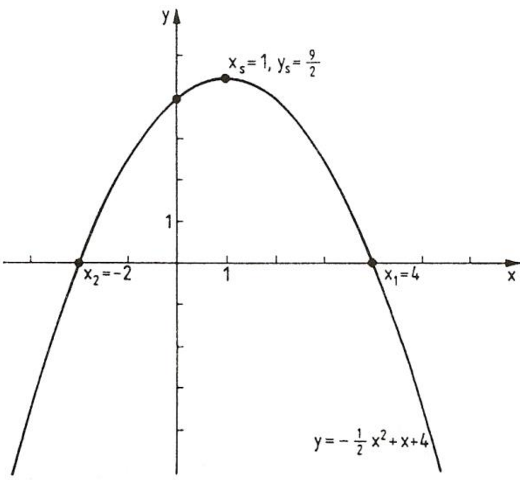


Bild 15.11 ځاړه

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونـي دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چی دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي٠

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته :
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چی برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

فنکشن$y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي
د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چي د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼی سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 له x_1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یی له x_1 سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x_1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (څرکندوو)

ځلونه یا ضریبونه	a_0	a_1	a_2	
منځنی ځلونه	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	$(a_3x_1+a_2)x_1$	a_3x_1	
منځنی زیاتون	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$a_3x_1+a_2$	a_3

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلگه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x_1 = -2$ او $x_2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.
یادونه: دا د هورنر شیمت زما په دې اوسنۍ د برینکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی).
اوبیونه) :

	1	-2	-14	-5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	7 = f(-2)
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	0=f(5)

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځایونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې ددریمی درجی ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړی کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او0 = f (x1) چی د$(x-x_1)$سره د ځلونې له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د ځلوری – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجې فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ,..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیشینت یا ځله وونې لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه
$x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$
لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
$x_1 = 2$		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
$x_2 = 2$		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
$x_3 = -2$		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $2x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$
لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چی د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفیرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټیلک تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره (f(x)تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty} [a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه دoe په لور ځي) .

که n جوړه اوa_n کمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه اوa_nکمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$

$$n,m\in N_0;a_k,b_i\in R;Q_m\neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیږي، که n<m وي او نااصلي مات دی که $n\geq m$ ، نااصل مات فنکشن کیدی شي چې د پولینوم ویش له لارې تجزیه (ټوټه) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریښتونی ماتی برخی د زیاتون په څیر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې
فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$ پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره یو صفرځاي لري، که $x = x0$ وي نو باور لري:
$P_n(x_0) = 0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x = x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$
د $x = x_P$ لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بیلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو ټوټي کولو وروسته په لاندې فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y = \frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دئ (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دئ (قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چی د قطبځای (ټيك ناپای ځای بللکيږي) xpکی کږه داسيمپټوټي کرښي $x = xP$ ته نزدې کيږي .د يوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې 0 / 0 شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن (n<m) د x په جګ پوتنځ يعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ويش څخه لاس ته راځی:

$$y = \frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}} + \frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}} + \ldots + \frac{a_1}{x^{-1+m}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{0}{b_m} = 0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن څيره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کيږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نيسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه يی د صفر په لور ځي، لکه ټولريشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن څيره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولريشنلبرخی ته نزدې کوي.

بيلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: $y = x/(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او د $x \to \pm oe$ لپاره د x- محور ($y = 0$) د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x-3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3=0$) په $x1=-3$ او $x1=1$ کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x = -2$ اسیمپتوتی دی، او د $x \to \pm oe$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

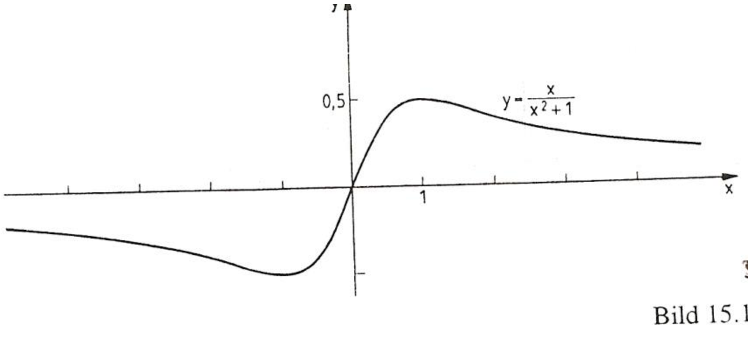
موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:

فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګې n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګې nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګې n لپاره ټولی کرېږ د تعریف ډیری(-) = D oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oe او ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري. (څیره ۱٤ الف ۱۵) د ناجوړه ګې د n لپاره(D = (-oe,oe او(W = (-oe,oe دي او (1-,1-) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰



څیره

Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library

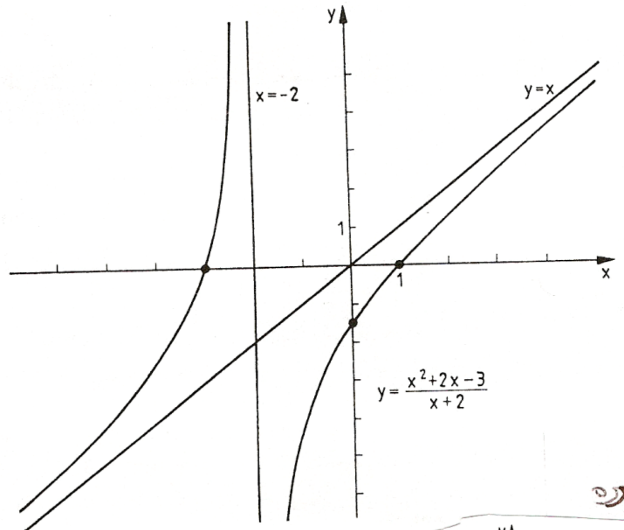


Bild 15.13

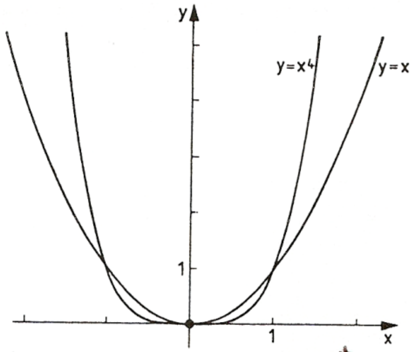


Bild 15.14a

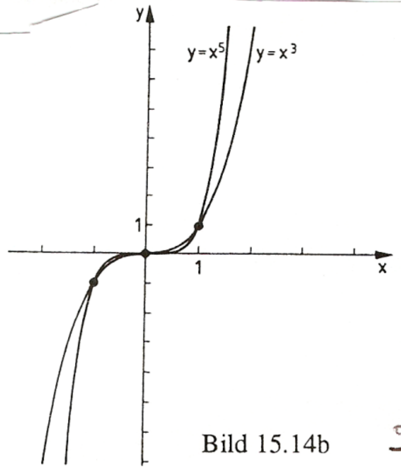


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په x = 0 کی د یوه قطب او y = 0 کی یوې اسیمپټوټی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز)   n لپاره ټولی کرږ د پیژند ډیري

D = (-oe,oe)\{0}   د ارزښت ډیري(W = (0,oe   لري اوګډټکي (1,1), (-1,1)

؟؟؟ څیره ش. ۱۵/۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون (کمیز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0   او(W=(-oe,oe او(1-،1-) ((

1,1) ګډ ټکی دی   (څیره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه څیرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

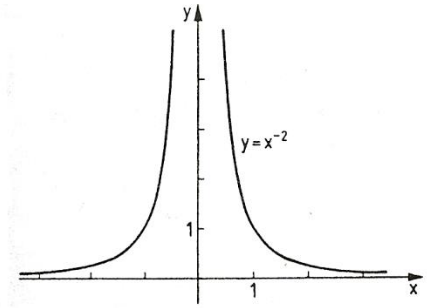


Bild 15.15a

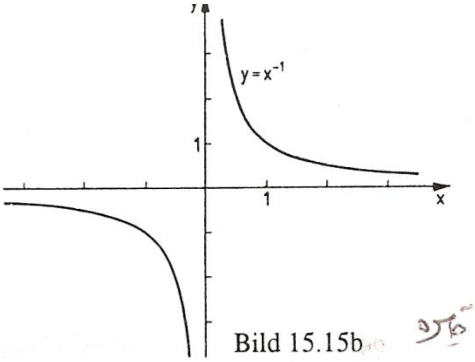


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي.(پرتله بيلګه(بيلګه ۱۵ .۳)

د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- يا پر ښت فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ , n \in N \backslash\{1\}\ , D = [0,\infty), W = [0,\infty) .... (15,8_b)$$

او رينبه فنکشن نوميږي (پيژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کيدی شي و

ريشنل ايکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ريشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ , a \in Q\ , x > 0 \qquad (15 . 8c)$$

نو د رينبي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په څير وپوهيدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرښت بيرته پوتنځ فنکشن دی.

ټوليز پوتنځ فنکشن پيژند د رييل ايکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رييلګڼونو کليمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پيژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R\ , x > 0 \qquad (15. 8d)$$

پوتنځ فنکشن نوميږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$, $x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښۍ فنکشن لرو

$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$, $x \geq 0$

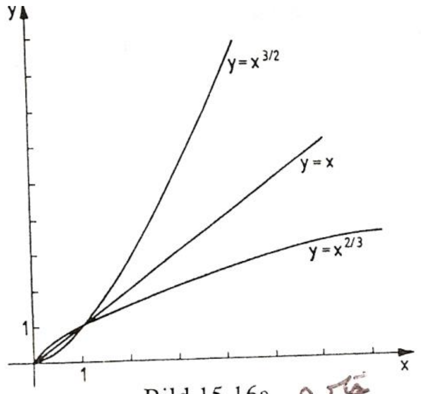


Bild 15.16a ځیره ب)

(ځیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}$, $x > 0$

ځیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2$, $x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښې فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښۍ کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری($D = [0,\infty$ کی پر ښۍ فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د$y= x^3$ پرښې فنکشن د[$D= (-\infty,0$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) ۰

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$y=a^x, a > 0, a \neq 1$..................................(15,9)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰
(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پیژند ۴ . ۱ وکتل شي)

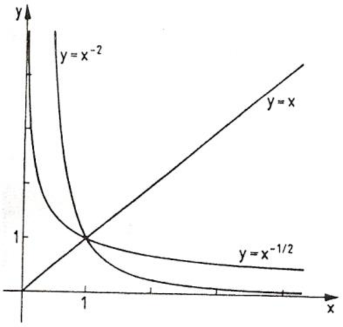


Bild 15.16b

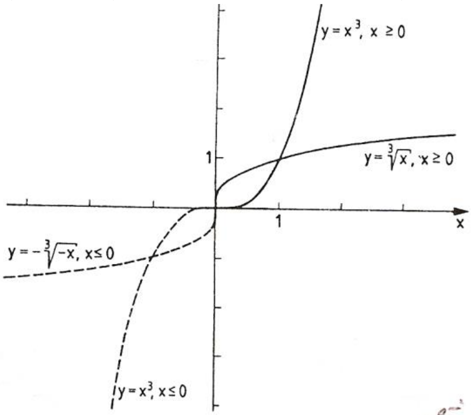


Bild 15.17

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژندډیری(D=(-oe,oe او ارزښتډیری(W=(o,oe لري. د $a^0 = 1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کږو ګډ ټکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹)
په کلکه یو غږیز- یا مونوتونجګیدونکی دئ اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنزدې کیږي .د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نزدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګې
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10)
په څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

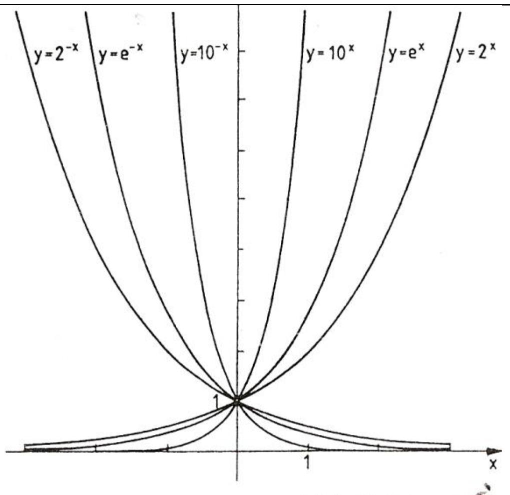


Bild 15.18

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دئ

$y = \log_a x , a > 0 , a |= 1$ (15.10)

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژنددېرئ $D = (0.oe)$ او د ارزښتدېرئ($W=(-oe,oe)$ لري.

د $y = \log_a x$ کرږې د ګرږو $y=a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکئ(1,0) د ټولوکرږو ګډ ټکئ دئ (څېره شته دئ)

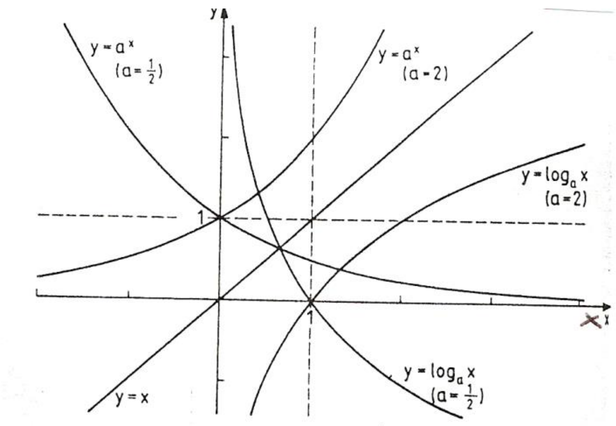


Bild 15.19 څېره

د a>1لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود x->0لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د 0<a<1لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د x> 0لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر یی یعني $y = \log_a x$

د a= 2 او a=1/2 لپاره انځوریږي .

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10}x = \lg x , y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریگونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

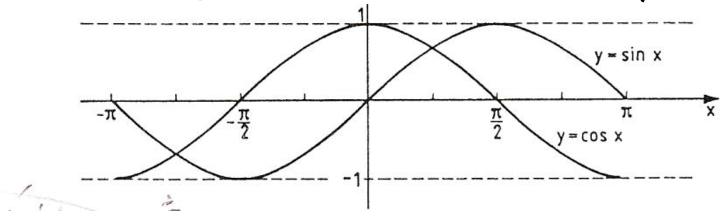
$$y=\sin x ;D=R,W=[1,1] \ldots\ldots (15,11_a)$$

$$y = \cos x; D = R, W = [-1,1] \ldots\ldots (15,11_b)$$

$$y = \tan x = \sin x / \cos x; D = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}, W = R, k \in Z \ldots (15,11_c)$$

$$y = \cot x = \cos x / \sin x; D = R \setminus \{k\pi\}, W = R, k \in Z \ldots\ldots (15,11_d)$$

د دې کږوتگلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریگونومتریکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریگونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه y=sinx , y= cosx پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$$\sin (x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi) = \cos x , k \in Z$$

لاندې فنکشنونه پریود π لري

y=tanx , y=cotx. دا په دې مانا چي

$$\tan (x + k\pi) = \tan x, \cot (x + k\pi) = \cot x , k \in Z$$

د تریگونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k \in Z$

د y=tanx, $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , k \in Z$ y=sinx لپاره او د y = cos x , y = cot x

لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري یعني y = tan x

په $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , k \in Z$ او y = cot x په $x_k = k\pi \quad , k \in Z$ کی.

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلگي په توگه

(c) ketabton.com: The Digital Library

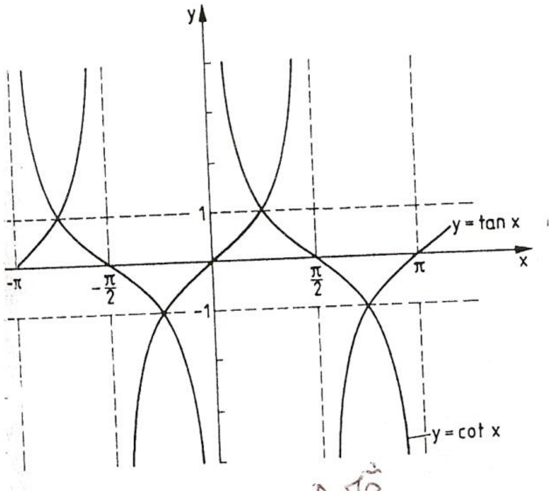


Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دئ او په انتروال $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګیدونکی یا پورته کیدونکی دئ

د $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ، او په ورته توګه

د $-\pi + 2k\pi \le x \le 0 + 2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی۰

د $0 + 2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ

د $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دئ

د $0 + k\pi < x < \pi + k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دئ ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

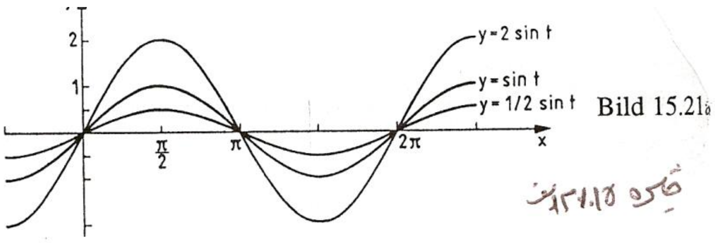
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

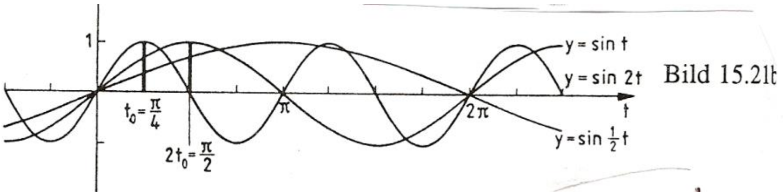
يادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پيژند (۱۵ . ۱۵) له مخې تړلې يا ځنځيري فنکشن دی.
موږ ترڅيرني لاندې نيسو چې د ساين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل
tاو زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږېڅيره باندې څه تاسير
اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثير په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول
يا راکشول دی که (|a| > 1)او يا پړسول دي که
|a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت
y = sin t دی، چيرته چې برسيره پردې د 0 > a لپاره په t - محور يوه
اينه څيرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2)
په فنکشن کی a امپليتودې Amplitude(جګوالی(نوميږي او د
شوينګنګ Schwingungرپيدنی پراخوالی يا ښه : سور باندې تاثير اچوي.
څيره شته



۲ - په فنکشن y = sinω t کی فاکتور ω په فنکشن y = sin t باندې يو وختني غزول که
$|\omega|<1$ يا پړسول که$|\omega|>1$ وي تاثير اچوي.چيرته چې د $\omega > 0$ لپاره برسيره پردې يو
په y- محور اينونه هم ده.
د يوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن y = sinω t يوه فنکشن ارزښت، دy = sin t
خپلواك ω-ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودې تاثير اچوي او y = ω t
پريودې $P = \dfrac{2\pi}{\omega}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



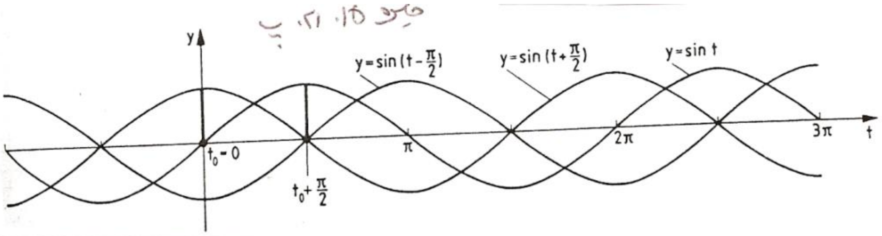
۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin (t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور φ 0< او یا له ښي لور φ 0> اچوي .
د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin (t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$ لپاره ۰
د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(ځیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

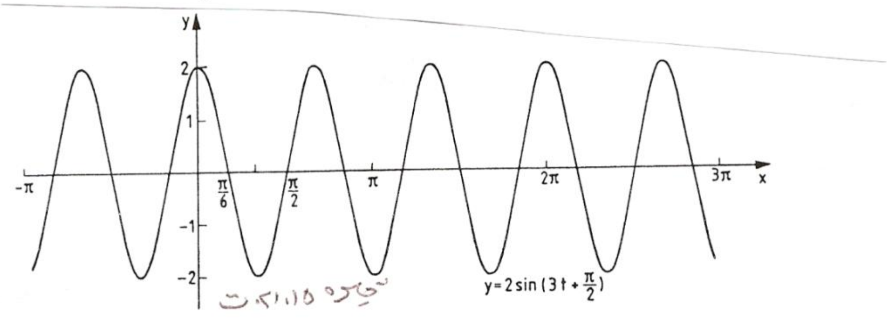
$$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi=-\frac{\pi}{2})$$

په فنکشن

$$y = a.\sin (\omega t +\varphi)= a . \sin\omega (t+\frac{\varphi}{\omega})$$

کی φ چې فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کرښه $y = a.\sin\omega t$ د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.





(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin (3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپلیتود a = 2 لري، پریودې یی $P=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{6}$ کې د sint و کیڼ لورته راکښل شوی دی.

ځبره ۱۵ . ۲ پ $\varphi=\frac{\pi}{2},\varphi=-\frac{\pi}{2}$

د تریګونومتري فنکشنونو(یواځني) په معکوسوالي یا په ځتوالي کی موږ په ځانګړو یوغږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند .۱۵ ۰ ۱۴ :

(پام: ځیرې له تشریح د مخه راغلې، بله لار نه وه)

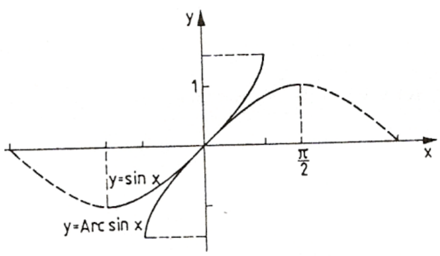


Bild 15.22

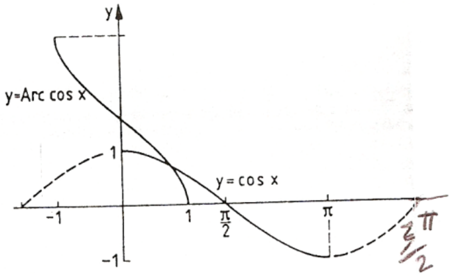


Bild 15.23

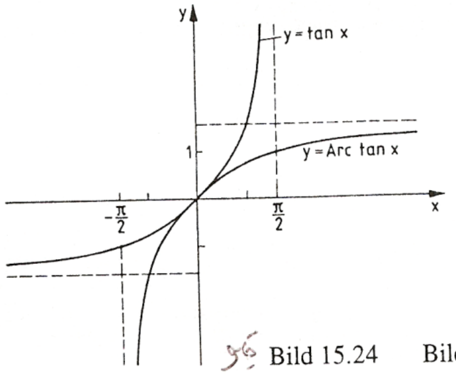


Bild 15.24

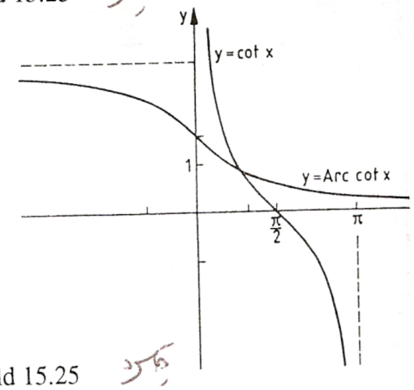


Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

1. $y = \sin x,\quad D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ W = [-1, 1]$ (15.12a)

2. $y = \cos x,\quad D = [0, \pi],\quad W = [-1, 1]$ (15.12b)

3. $y = \tan x,\quad D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ W = \mathbf{R}$ (15.12c)

4. $y = \cot x,\quad D = (0, \pi),\quad W = \mathbf{R}$ (15.12d)

پرځښ یا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \operatorname{Arc}\sin x,\quad D = [-1, 1],\quad W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (15.13a)

2. $y = \operatorname{Arc}\cos x,\quad D = [-1, 1],\quad W = [0, \pi]$ (15.13b)

3. $y = \operatorname{Arc}\tan x,\quad D = \mathbf{R},\quad W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (15.13c)

4. $y = \operatorname{Arc}\cot x,\quad D = \mathbf{R},\quad W = (0, \pi)$ (15.13d)

د تریگونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځیري (تړلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د x ∈ Dلپاره یو فنکشن (z = g(x د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د z ∈ Wلپاره یو فنکشن y= f(z) ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x تړلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي۰

یادونه : یو تړلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه z = f(x

دx ∈D, z∈ Wلپاره او w=h (z) دz ∈W,w∈ W*لپاره

او y=f(w) د W∈ W* لپاره لرو،

نو y=f[h(g(x))] هم د x یو تړلی فنکشن دی

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د z = 2x + 4 او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی

پ : د

$$, y = \cos w \quad w = \sqrt{z} \quad , \quad z = 2x + 4,$$

سره ترلي فنکشن $y = \cos\sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په ترلي فنکشن $y=\mathrm{Arctan}1/(x-1)$ کی $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\mathrm{Arctan}\ w$ دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :

ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$$

او

$$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942;y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1 \ ; \ w=1/z=1/1=1$

$$y=\mathrm{Arctan}w=\mathrm{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که $f(x)$ له رییل ګڼونو او بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو ترلی یا ناترلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت وي او($\text{Arc sin } f(x)$ همداډول($\text{Arc cos}f(x)$ ټيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري یا تعریف دي

بیلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحلیلي ویناو لپاره دې تعریفدېري پیداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

رادیکاند باید کمیز یا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq 3 \; (x \geq \sqrt{3} \;\; v \;\; x \leq -\sqrt{3})$

نو لرو $D =(-oe , - 3]\cup[3 ,oe]$

ب)($y=lg(x+2)+1/(3+2x-x^2)$ له لمړي زیاتونی کی باید $Numerus > 0$ نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 \Leftrightarrow x > -2$ ،

پس($D1=(-2,oe)$

په دوم زیاتوني کی باید مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځایونه

له $3-2 \;\; x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

د فنکشن تعریفدېری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفدېري وي یعنی د D1 او D2

غوځدېری: $D=D_1 \cap D_2 = (2 ,oe) \backslash \{2; -1\}$

پ) $y = \text{Arc sin } (x-1)/5)$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفدېري په پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$-1\leq(x-1)/5\leq1 \Leftrightarrow -5\leq x-1\leq 5 \Leftrightarrow -4\leq x\leq 6 \Rightarrow D=[-4,6]$

ت $(y = 1 /\sqrt{(x^2 - 4)}$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow x>2$ یا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ – لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y= 2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۳ – لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتوني اینټروالونه په تعریفېدیریو بیل (تجزیه) کړی، یا لو ته کړی.

a) $y=2x-3$ b) $y=-2x+3$ c) $y=x^2$

d) $y=-2x^2$ c) $y=2x^2+1$ f) $y=|x|$

۴ – پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y=x$ b) $y=x+1$ c) $y=x-1$

d) $y=2x^2$ e) $y=2x^2+1$ f) $y=(x-1)^2$

g) $y=x^2/2$ h) $y=x^5$ i) $y=|x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = -x^2-x-2$

d) $y = 2x^2 -12x +18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په ښې فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0,\infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1,\infty)$, $W = [0,\infty)$, d) $y = x^3 /2$, $D = [0,\infty)$, $W = [0,\infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x -1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1 /5)(3x +1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x -3y -7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي. جګوالي کونج α دې پیدا شي، او صفرځایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1 ,1) ,/ (3,7) c) (-1,0) ,/ (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 -4x +3$ b) $y = x^2-8x+16$ c) $y = x^2 -6x +10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 -10x+12$ f) $y = 3x^2 +6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2}+x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x +2$ i) $y = 5x^2 +45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګټل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګټل شي. فنکشنونه دګراف د خلفورم باندې انځور شي

a) $y = f(x) = x^3 -6x +5;$ $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1 /2)x^3 -x^2 -(13 /2)x -5;$ $x_1 = 1 /5$ $x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 +2x + 2x$; $x_1 = -2$ $x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 -x^3 -28x^2 32x +40$; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 -6x^2 +5x +6$; $x_1 = 1,5$ $x_2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه ورکړ شي :

a) $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y = \dfrac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y = \dfrac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y = \dfrac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y = \dfrac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځایونه دې وګنل شي، پول. تشخایونه او د 8 ± <- x لپاره ځان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R , W=(0,œ)   b) $y = 2^x - 1$, D = R , W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R   d) $y = \ln(x-1)$, D =(1,œ), W = R

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشتونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ – ترلي فنکشتونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$$y = f(w) \; , \; w = h(z) \; , \; z = g(x)$$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = \left(e^{x+1}\right)^2$ c) $y = \lg\sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan\sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan\sqrt{x} - 3$ i) $y = \operatorname{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln\sin\dfrac{x}{3}$ l) $y = \sin\ln(x + \dfrac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\dfrac{1}{\sin x}}$ n) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \dfrac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y = \operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ - ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندي او دننه فنکشنونو

$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$

بیل کړی(د تعریف- او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^{x}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arc}\cot(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^{2}$

d) $y = \sqrt{5-\tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^{2}-1\right)+1\right]$ f) $y = \log_{3}\left[\sqrt{2^{x}+1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ - د لاندې ښتنیزویا سیرنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3-x^{2}}$ c) $y = \sqrt{x^{2}-9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^{2}-9}}$ e) $y = \frac{1}{x^{2}+x-6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x-4)$ h) $y = \sqrt{x}+\frac{1}{x}$ i) $y = \ln x+\frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

<u>Bonn (Germany):</u>

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره :

دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره گټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دویمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې گډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درۍ ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرېي شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغږولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرېي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیرېي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library