



شمير پوهنه

(رياضي)

ستر کتاب



Ketabton.com

دويمه برخه

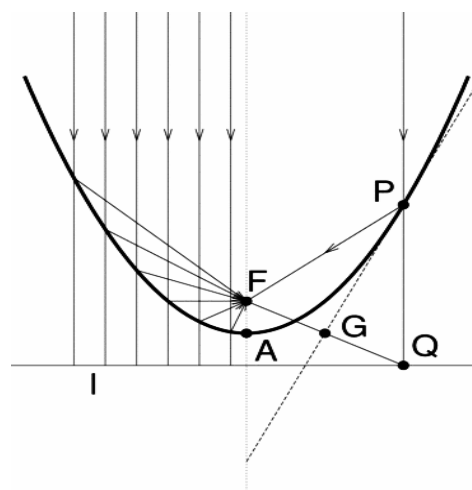
دويم غځېدلی چاپ

ليکونکی: ډاکټر ماخان (مېړی) شينواری

شمير پوهنه

(رياضي)

ستر کتاب



دويم غزېدلی چاپ

ليکونکی: ډاکټر ماخان ميري شينواري

دلوي څښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت -
په ما د پوهنې لپاره د لگښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

makhanshinwari@gmail.com

کتاب پېژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب (دويمه برخه)

ليکونکي: ډاکټر ماخان،، ميری،، شينواری

د خپريدو لړۍ

خپرنډوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

۲۰۱۲

چاپ کال

چاپ چارې

دانش خپرنډويي ټولنې تخنیکي څانګه

makhanshinwari@gmail.com

د چاپ حقوق خپرنډويي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

د خپرنډوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثارو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تر اوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیوادونو ته وړاندې کړي دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګاڼه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلو ګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحادیې له خوا د ډاکټر ماخان شینواري تر اوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتون زده کړې کټه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي گټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندي، مگر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ، د افغانستان کلتوري ودې ټولنه، جرمني، د غرو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوي ټولنې په توگه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملگرو او ملگرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنير ريجان الدين حساس، ښاغلي دپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلي ډاکتر سردار گانه وال، ښاغلي ډاکتر مانوکل گانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي دپلوم انجنير محمد ايوب بيان، همداسې زما د ملگري ارواښاد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي، دپلوم انجنير او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحې او نه اخر زما د لور ډاکتر څانگې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپړۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجر و نه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ زک

نيوليك

نوي سريزه

سريزه

افغاني، يوناني ، لاتين الف ب

شمير پوهنيزې نخښې

لومړۍ برخه

۱	د شمير پوهنې سم اند يا منطق	۰ ۱
۱	پوهنيزه ژبه او پيدايښت يا طبيعي ژبه	۱ ۰ ۱
۳	د شمير پوهنې سم اند بنسټيزه کليمې	۲ ۰ ۱
۳	ثابتي ، اووښتوني يا واريابلي ، ترمونه	۱ ۰ ۳ ۰ ۱
۵	وينا	۲ ۰ ۲ ۰ ۱
۷	د دوه ارزښتوالي اصول يا پرينڅيپ	۳ ۰ ۲ ۰ ۱
۱۳	وينا فورم يا ۰ بڼه او کوانتورونه	۴ ۰ ۱
۲۸	اړيکين او پوره کيدونکي شرطونه	۵ ۰ ۱
۳۱	د شمير کليمه يا د لغاتو	۶ ۰ ۱
۳۳	برابرون او نابرابرون	۷ ۰ ۱
۳۸	تمرينونه	۸ . ۱
۳۹	ډير ۱ پوهنه	۰ ۲
۴۰	د ډير ۱ پوهنې کليمه	۱ ۰ ۲

۴۵	د ډبريو ترمنځ اړيکې	۲ . ۲
۴۶	ربځډبرۍ	
۴۸	د يوې ډبرې توان يا توانډبرۍ (توانست)	
۵۰	په ډبرۍ کې کارونې يا عمليې (۱)	۳ . ۲
۵۲	غوڅډبرۍ يا متقاطعډبرۍ	
۵۷	د يوې ډبرې يا ست کمپلیمنت	
۵۸	څيرونه	۴ . ۲
۶۷	تمرینونه	
۷۰	د رپیل گڼونو سره د شمیرلو بنسټيزې...	۰ . ۳
۷۰	د گڼونو- يا اعدادو سیستم جوړښت	۱ . ۳
۷۰	پيدايښتي يا طبيعي گڼونه	۱ . ۱ . ۳
۷۱	د پيدايښت يا طبيعي گڼونو جوړښت	الف . ۱ . ۳
۷۲	د پيدايښت گڼونو انځورونه او شمیرنه	ب . ۱ . ۳
۷۸	د شمیرنې بنسټيز قوانین	پ . ۱ . ۳
۸۴	ټولگڼونه	۲ . ۱ . ۳
۸۶	الف د ویش تیوري	۲ . ۱ . ۳
۸۸	غټ گډ پرویشونۍ (بزرگترین مقسوم علیه ...)	ب ۲ . ۱ . ۳
۱۰۶	راشنلگڼونه	۳ . ۱ . ۳
۱۰۸	رییلگڼونه	۴ . ۱ . ۳

۱۱۹	ماتشميرنه	۱۰۲۰۳
۱۳۰	تمرينه	۳.۳
۱۴۱	پوتنڅ يا توان ، ريښه يا جذر	۰ ۴
۱۴۱	توان د ټولگنيز په جگ يا اکسپوننت	۱۰ ۴
۱۴۴	ريښه او توان د راشنل اکسپوننت يا جگن سره	۲۰ ۴
۱۵۱	توان د ريپلگن اکسپوننت يا جگن سره	۳۰ ۴
۱۵۲	ټولگه	۴۰ ۴
۱۵۸	لوگاريتم	۰ ۵
۱۵۸	د لوگاريتم کليمه	۱۰ ۵
۱۶۶	ټولگه	۳۰ ۵
۱۶۹	گونومتري	۰ ۶
۱۶۹	بنسټيزه ځمکچپوهنه يا هندسه	۱۰ ۶
۱۶۹	ټکی او کرښه	۱۰۱۰ ۶
۱۷۱	کونج	۲۰۱۰ ۶
۱۷۴	درېگودی	۳۰۱۰ ۶
۱۷۸	کونکروانيڅ او ورته والی	۴۰۱۰ ۴
۱۸۴	ولارکونجيز دريگودی	۵۰۱۶۰
۱۸۸	په ولارکونجيز دريگودی کې د ...	۲۰ ۶
۱۹۰	په يوونگردي کې د کونج بلواک ..	۳۰ ۶

۱۹۵	د ساین او کوساین جملې	۴۰۶
۲۰۵	تریګنومتریګي کټمټوالی	۵۰۶
۲۱۵	تریګنومتریګي یا کونجکچیز فرمولونه	۵۰۶
۲۲۲	کمپلکس ګڼونه	۰۷
۲۳۵	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۰۸
۲۳۵	سیده ښوونه	۱۰۸
۲۳۷	ناسیده ښوونه	۲۰۸
۲۳۹	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۳۰۸
۲۴۳	لاینیز برابرې له یوې اوړیدونې یا ...	۹
۲۴۴	لاینیز برابرې	۱۰۹
۲۶۶	کومبیناتوریک، د بینوم جمله	۱۰
۲۶۶	فاکولتیت یا فاکتوریل	۱۰۱۰
۲۶۷	د بینوم ځله ونه	۲۰۱۰
۲۷۰	د بینوم جمله	۳۰۱۰
۲۷۴	کومبیناتوریک	۴۰۱۰
۲۷۵	پرموتیشن	۱۰۴۰۱۰
۲۸۰	وارییشن	۲۰۴۰۱۰
۲۸۶	کمبینیشن	۳۰۴۰۱۰
۲۹۱	د پرموتیشن، وارییشن او	۴۰۴۰۱۰

۲۹۵	لانیز الجبری برابرونونه	۰ ۱۱
۲۹۶	لانیز برابرون له دوه اوریدونو یا ...	۱ ۰ ۱۱
۳۰۷	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳ ۰ ۱ ۰ ۱۱
۳۱۲	د گاوس الگوریتم	۴ ۰ ۱ ۰ ۱۱
۳۱۶	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۵ ۰ ۱ ۰ ۱۱
۳۱۷	لانیز برابرونونه له درې	۲ ۰ ۱۱
۳۱۷	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۱ ۰ ۲ ۰ ۱۱
۳۱۸	دوه برابرونونه له درې ...	۲ ۰ ۲ ۰ ۱۱
۳۱۹	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳ ۰ ۲ ۰ ۱۱
۳۲۲	د گاوس لگوریتم	۴ . ۲ . ۱۱
۳۲۵	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳ ۰ ۱۱
۳۲۶	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۱ ۰ ۳ ۰ ۱۱
۳۲۸	د گاوس الگوریتم	۲ ۰ ۳ ۰ ۱۱
۳۳۳	تمر نونه	
۳۴۰	الجبری برابرونونه	۱۲
۳۴۰	نالاینیز برابرونونه	۱ ۰ ۱۲
۳۴۳	څلورۍ ئیز یا مربع برابرونونه	۲ ۰ ۱۲
	د دوه په جگ برابرونونه ، د وییټا جمله	۱ . ۲۰ ۱۲
۳۵۰	څلورۍ برابرونونه ، چې په نورمال	۲ ۰ ۲ ۰ ۱۲

۳۵۱	د n-م درجې ځانگړي برابر و...	۳۰۲۰۱۲
۳۵۷	دریمه درجه برابر ونونه	۳۰۱۲
	د ریښې برابر ونونه	۴۰۱۲
۳۷۵	ترانسڅیندنت برابر ونونه	۱۳
۳۷۵	لوگاریتم برابر ونونه	۱۰۱۳
۳۸۰	اکسپوننشل- یا په جگړې برابر ونونه	۲۰۱۳
۳۸۵	گونومتريکي یا کنجکچیز برابر ونونه	۳۰۱۳
۳۹۶	له نابرابرونو او مطلقه ارزښت ..	۱۴
۳۹۶	نابرابرونونه	۱۰۱۴
	بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین	۱۰۱۰۱۴
۳۹۷	اینټروال	الف ۱۰۱۴
۴۰۰	نابرابرونونه له یوې ناپېژندونکې...	۲۰۱۰۱۴
۴۰۹	د نابرابرونو سیستم ...	۳۰۱۰۱۴
۴۱۱	نابرابرونونه له دوه ناپېژندونکو سره	۴۰۱۰۱۴
۴۱۴	برابرونونه او نابرابرونونه	۲۰۱۴
۴۱۴	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۱۰۲۰۱۴
۴۱۵	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۲۰۲۰۱۴
۴۲۰	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۳۰۲۰۱۴
۴۳۰	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۱۵

۱۰۱۵ د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه ۴۳۰

۲۰۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱۶ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶

۱۰۱۶ کرښه ۴۶۶

۲۰۱۶ گردۍ ۴۷۵

۳۰۱۶ ایلیپسې ۴۸۲

۴۰۱۶ هیوپربول ۴۸۷

۵۰۱۶ پارابول ۴۹۲

۶۰۱۶ ټولګه ۴۹۴

۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲

۱۰۱۷ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲

په کارتیزې کواورډینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲

۲۰۱۷ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹

۳۰۱۷ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲

۴۰۱۷ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷

۵۰۱۷ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو

۱۰۵۰۱۷ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱

۲۰۵۰۱۷ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴

۵۲۵	د هواربرابرونو سکالار فورم يا ۰ بڼه	۵۰۱۷
۵۳۳	پرلپسې او پرلپسې لړۍ	۱۸
۵۳۳	پيل	۱۰۱۸
۵۳۴	د گڼون - عددونو پرلپسې کلیمه	۲۰۱۸
۵۴۲	مونو توني پرلپسې	۱۰۲۰۱۸
۵۴۵	ارېتمېتيکي پرلپسې	۲۰۲۰۱۸
۵۴۷	هندسي پرلپسې	۳۰۲۰۱۸
۵۵۰	لړۍ	۲۰۱۸ الف
۵۵۵	هندسي لړۍ	۲۰۱۸ الف ۱۰
۵۵۷	ارېتمېتيکي لړۍ	۲۰۱۸ الف ۲
۵۵۸	د پرلپسې او لړيو د پولې ...	۴۰۱۸
۵۷۸	د فنکشنونو پولې او ناپريکيدنه	۱۹
	بنسټيزې کلیمې	۱۰۱۹
۵۸۶	د پولو يا حدونو خويونه	
۵۹۲	د راشنل، کسري يا نسبتي	
۵۹۶	د مثلثاتي يا درېکودي کچ توابعو پولې	
۶۰۴	ناپريکيدنې	
	په پوله ارزښت او ناپريکيدنې څو جملې	۲۰۱۹
۶۱۰	د ناپريکيدونکو فنکشنونو خويونه	۳۰۱۹

د بنسټيزو فنکشنونو ناپریکېدنه	۴۰۱۹
د څپرکي ټولگه	۶۱۶
دفرنځيالشميرنه	۶۲۶ ۲۰
د تابع تغير منځ ارزښت (منځنی قیمت)	۶۲۶
په يوه ټکي کې د تابع گراف ...	۶۲۸
د لحصوی (سترگورپ) تغير...	۶۳۰
کمبټوېش (تقسيم تفاضل؟)	۶۳۱
دفرنشلوېش يا راييليدنه يا مشتق	۶۳۳
کمبټوېش او مشتق يا راييليدنه	۶۳۶
د x_0 په ځای کې د فنکشن مشتق	۶۴۳
د تانجنت پيژند او خويونه	۶۴۷
د تانجنت او عمود يا ولاړ ټوليز مساوات	۶۵۰
په بېديا کې جگوالی	۶۵۲
الف : د تانجنت يا جگيدني غوره والی	۱۰۱. ۲۰
د فرنځيال يا راييليدني يا مشتق قاعدې	۶۵۶ ۲۰. ۲۰
د درېگوديزو يا مثلثاتي	۶۶۲
د اکسپوننشل يا په جگ توابعو.....	۶۷۰
د مشتق استعمال په طبيعي پوهن کې	۶۷۶
د ايمپليڅيت توابعو مشتق	۶۸۳

۶۸۶	د بنسټيزو رابيليدنو(مشتقونو) جدول	
۶۸۸	ټولګه	
۶۹۱	د يوې تابع د مشتق قابليت	
۶۹۸	د معکوس- - يا په څې توابعو مشتق	
۷۰۱	د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه	۲۰. ۳.
۷۱۰	د رول قضيه	
۷۱۱	د وایر شتراس قضيه	
	افراطي ارزښتونه او اوږونتګی	۲۰. ۰۴.
۷۱۲	د دفرنشل منح ارزښت قضيه	
۷۱۵	يو عريزي توابع	
۷۲۰	حای اړوند افراطي ټکي	
۷۲۴	د انعطاف – يا اوږونتګی	
۷۳۳	د کوي يا منحنې بحث يا خبرې	
۷۴۶	ناتاکلي حدونه يا پولې	
۷۵۰	د برنولي او د لو پیتال	
۷۵۷	د غټو ګټو پرابلم	۲۰. ۰۵.
۷۶۷	تمرینونه	
۷۷۸	په ټوټه کسرونو ټوټه کونه	
۷۸۷	انټیګرال شمیرنه	۲۱

۷۸۷	پیلراورنه	
۷۸۹	انتیگرال شمیرنه	۲۱
۷۹۰	د ریمن(ناټاکلی) انتیگرال	
۷۹۴	بنسټیزه یا لومړنۍ تابع	
۷۹۶	سطحه او لومړنۍ تابع	
۷۹۹	ناټاکلی انتیگرال	
۸۱۲	د ټاکلي انتیگرال شمیرنه	
۸۱۴	تکمیلیدونکي بنسټونه	
۸۱۵	د ټاکلي انتیگرال څخه و ټاکلي ...	
۸۱۷	د انتیگرالونې قاعدې	
۸۱۹	د اکسپوننشل توابعو انتیگرال	
۸۱۹	د لوگاریتمي توابعو انتیگرال	
۸۲۱	بدلون قانون	
۸۲۷	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	
۸۳۲	ټوټه انتیگرالونه	
۸۳۴	د ټوټه انتیگرالونې لار	
۸۳۸	د ټوټه راشنل کسرونو انتیگرال	
۸۴۱	نږدې (مېهم) انتیگرال	
۸۵۲	د ټاکلو انتیگرالونو حل د بدلون له لارې	

د انتیګرالشمیرنې استعمال ۸۶۲

تمرینونه ۸۸۸

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوی لیکنې او ژباړې

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

۱۶ - د سطحې شننیزه (تحلیلي) هندسه

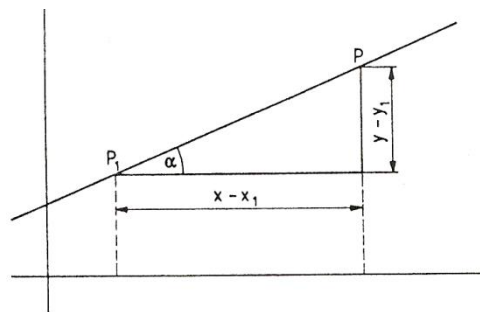
په دې برخه کې یوڅود تحلیلي (شننیزې یا سپرنیزې) ځمکچپو هڼې یا هندسي ټاکلي پرابلمونه څیړل کیږي. د تحلیلي هندسي بنسټیزه تگلار به څرگنده (وېبول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننیزې یا تحلیلي څرگندونو کې د هندسي خویونو جوړښت ښايي.

۱۶. ۱ کرښه

د هندسي ټاکنو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دي، چې یوه کرښه یواځنې کره تعین کړای شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښې راوړونو یا - مساواتو مختلفې ښې شته دي. یوه کرښه د یوه ټکي او د هغه د لور (سمت) له لارې ټاکل کېدای شي. (ټکی او د ټکي میلان معلوم دی).

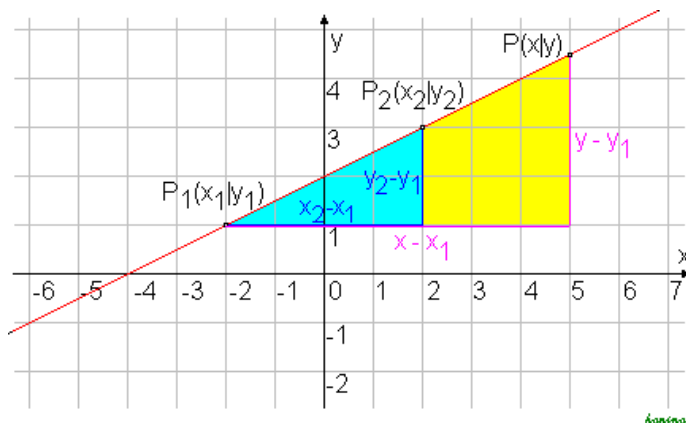
دلته دې $P_1(x_1, y_1)$ ټکي وي. $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$ دې د جگیدو کونج وي، چې د کرښې

لور ټاکي (څ ۱۶. ۱) او $P(x, y)$ په کرښه یو اووښتونی (واریابل) ټکی دی.



نو د کرښې د میلان $\tan \alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

((پورته څیره دې وکتل شي (لاددې څیره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); \dots\dots\dots (16.1)$$

پورته د کرښې ټکی لور برابر و

که د y په محور P_1 وټاکل شي د کواورډیناتو $x_1 = 0, y_1 = b$ سره، نو له (۱۶. ۱) سملاسي په لاس راځي: $(y - b = m(x - 0))$ په همدې ډول ($\Leftrightarrow$)

$$y = mx + b \quad (16.2)$$

دا پورته برابر و د کرښې مساواتونو مال فورم (بڼه) بلل کیږي

یوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دي $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ وي، د $|x_1 - x_2|$ سره، (څیره ش ۱۶. ۲) د جگیدونکي یا تنجنت $\tan \alpha = m$ لپاره داسی دي:

$$m = (y - y_1) / (x - x_1)$$

او

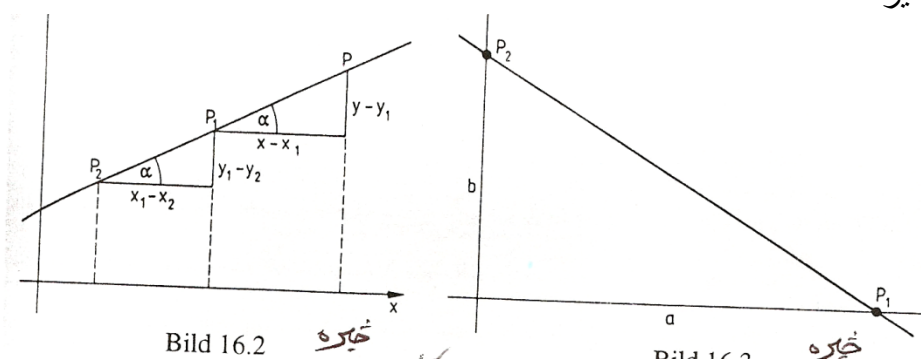
$$m = (y_2 - y_1) / (x_1 - x_2) = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \dots\dots\dots (16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکیز برابر وړون

څیره ده



که د x - محور باندې د P_1 ټکی، د کواورډینات $x_1 = a$, $y_1 = 0$ سره وټاکو او
 ټکی P_2 د y - محور باندې د کواورډینات $x_1 = 0$, $y_2 = b$ سره وټاکو، نو له (۳ . ۱۶) لاس ته راځي:
 $(y - 0) / (x - a) = (b - 0) / (0 - a)$
 او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a + y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅي برابر وړون

څلور پورتنی کرښ مساوات ټول په x او y کی لاینیز دي. د مساوات عمومي فورم (یا
 ټولیزه بڼه) داسی دی:

$$Ax + By + C = 0 \quad (16.5)$$

د کرښ برابر وړونو ټولیزه بڼه (عمومي فورم)

دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري یا په بر کې نیسي

$$y = y_0 \quad (A = 0, B = 0)$$

او ($x = x_0$) چې د x - محور او په همدې ډول د y - محور ته غبرګي کړنې دي، په داسې حال کې چې تراوسه دومه لاندې ده څیرل شوې

بیلګه ۱۶ . ۱:

د کرښې برابرون یا لاینیز برابرون، چې له $P(-2, 3)$ ټکي تیرېږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30^\circ$ یی د $m = \tan \alpha \frac{1}{3} \sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسې لیکل

$$y - 3 = \frac{1}{3} \sqrt{3} (x + 2)$$

او نورمال فورم یې په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3} \sqrt{3} x + (3 + \frac{2}{3} \sqrt{3})$$

بیلګه ۱۶ . ۲:

د لاینیز برابرون یا د کرښو برابرون په ټکو $P_1(3/2, -2)$ او $P_2(1, -4)$ کې د (۱۶ . ۳) سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

$$y+2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}} (x - \frac{3}{2})$$

نو نورمال فورم $y = 4x - 8$ لرو (اته ناسم، په ځای یې شپږ دي)

بیلگه ۱۶. ۳ :

۱۶ - د سطحی شننیزه (تحلیلي) هندسه

۴۷۰

کربنه د $y = -(3/2)x + 1$ برابرون سره د y - محور په $P_1(0, 1)$ ټکي کی غوڅوي او جگوالی یی $2/3$ - دی، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو د y - ارزښت په $2/3$ - تغیریوي، په دې ډول دوم د کربني ټکی لاس ته راځي. د بیلگی په توگه

$$p_2(0+1, 1-(3/2)) = p_2(1, -1/2)$$

(خیره ۱۶. ۴ لاندې کښل شوي)

بیلگه ۱۶. ۴ :

د کربنی د برابر ونونو عمومي فورم $x - 2y - 6 = 0$ څخه دغوځیدو فورم لاس ته راځي

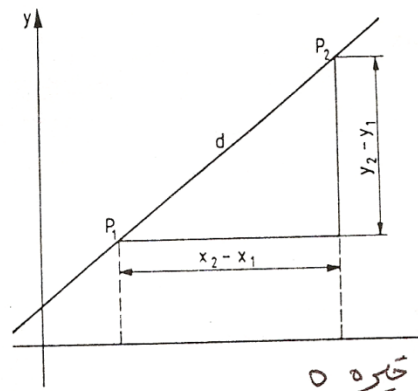
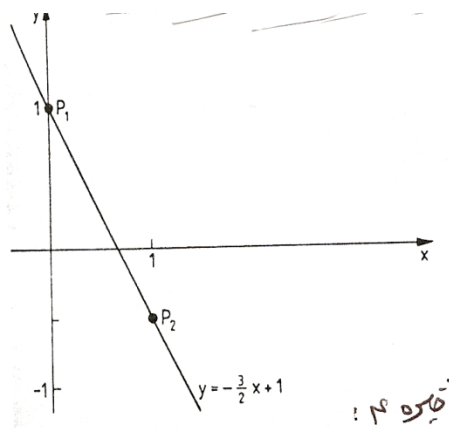
$$x/6 + y/3 = 1$$

کربنه دکو اوړ دینات محورو نه په دې ټکو $P_1(6, 0)$, $P_2(0, -3)$ کې غوڅوي. په یوه کربنه د دوه ټکو $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ترمنځ فاصله (که د کربني واټن $P_1P_2 = d$ وي د پیتاگوراس (فیساغورس) له جملی (خیره ۱۶. ۵) داسی ده

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \dots \dots \dots (16, 6)$$

پورته د ټکو P_1 او P_2 ترمنځ واټن

خیري ۱۶. ۴ او ۵ -



بیلگه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونو اوږدوالی، چی کونجټکي یی دادي $A(3,1), B(-1,1), C(2,5)$ په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کټمتی) چی (یو د بلې سره) غبرګي نه وي ټیک یو غوڅټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی ، نو د دواړو کواور دیناتو برابر ون باید پوره کړي . په دې حالت کي د غوڅټکي کواور دیناتو، د دوه لاینیزو برابر ونونو سره چی دوه اوبستوني یا

نایپژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه ترې لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابر ون سیستم چی د دوه کرښو د برابر ونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي یو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.

که ناپای ډیرې اوبیوني شته وي، نو په دې حالت کی برابر ون همغه یوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي یو بل سره غبرګي ځلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بیلگه ۱۶ . ۶ :

د $g1: y = 3x - 2$ کرښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کرښو

الف) $g2: -2x + y = 1$,

ب) $g3: 3x - y = 5$,

پ) $g4: -x + (1/3)y = -2/3$

سره څیرو

اوبیونه : د $g1$ برابر ونونو څیره داسی بدليري: $3x - y = 2$

الف) د برابر ونونو سیستم $-2x + y = 1, 3x - y = 2$

ټیک یوه اوبیونه لري: $x1 = 3, y1 = 7$

ددې څخه څرګنديري چی ټکی $S(3, 7)$ د کرښو $g1$ او $g2$ غوڅټکی دی .

ب) د برابر ونونو سيستم

$$3x - y = 2$$

$$3x - y = 1$$

اوبی نه لري: برابر ونونه یو بل ردوي په نه زغمي. د g_1 او g_2 کرښی یو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابر ونونو سيستم $3x - y = 2$

$$-x + (1/3)y = -2/3$$

نښای ډیرې اوبیوني یا حلونه لري. برابر ونونه یو بل سره برابر یا یو بل ته ورته دي.

که په ۳ ضرب شي یو همغه پورته برابر ون ترې لاس ته راځي.

g_1 او g_2 دوه کټ مټ برابر ونونه دي.

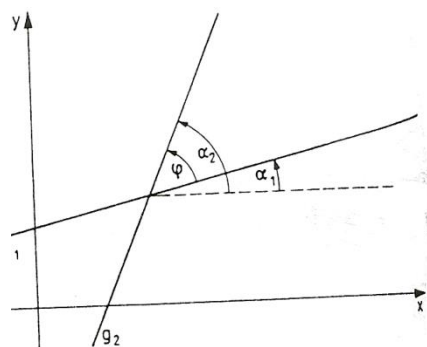
که د دوه کرښو

$$g_1: y = m_1x + b_1$$

$$g_2: y = m_2x + b_2$$

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو جګید کونجونو α_1 او α_2 کمون (کمښت یا

توپیر) جوړوو (خ ۱۶. ۶)



څیره ۱۶. ۶

د کرښی له برابر ونونو پوهیږو $\tan \alpha_1 = m_1$ او $\tan \alpha_2 = m_2$

د زیاتون تیورم (بنسټیزه جمله) (برخه ۵. ۶) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله

برخه ۵. ۴) باوري ده

$$\tan \phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) / (1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2)$$

د کوم څخه چې $\tan \alpha_1 = m_1 \wedge \tan \alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}; \dots\dots\dots (16, 7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج ديږ.

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته څپرې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلگه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو $g_1: y = x - 1$ او $g_2: y = (7/4)x + 1$ غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan \phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1 \cdot \frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15, 255^\circ$$

د g_1 او g_2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180 - \phi = 164, 745^\circ$

د دوه کرښو یو بل ته ځانگړي حالتونه:

۱ - کرښی یو بل سره غبرگی ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180^\circ \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan \phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = 0$$

گورو چې د $m_2 - m_1 = 0$ لپاره باور لري، نو $m_2 = m_1$

(دلته باور لري : $m_1 \cdot m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښی یو په بل (نیغی) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90^\circ \Rightarrow \tan \phi = (m - m) / (1 + m \cdot m) = \infty$$

دا حالت د $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$ لپاره منځ ته راځي،

یعنی د $m_2 = -1/m_1$ لپاره $(m_1 \neq 0, m_2 \neq 0)$

په کرښه $(m_1 = 0)$ $y = y_0$ باندې کرښه $(m_2 = \infty)$ $x = x_0$ نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

$$m_2 = m_1 \quad (16, 8)$$

د اورتوګونالیتی Orthogonalität (یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m_2 = -1 / m_1 \quad (16, 9)$$

بیلګه ۱۶. ۸: د کرښی g_2 برابرې دې وټاکل شي چې له ټکي $P(2, -1)$ تیرېږي، او له کرښی $g_1: y = -2x + 1$ سره الف (غبرګه او ب) اورتوګونال (نیغه) ځغلي اوبونه:

الف) د g_2 کرښی میلان (جګوالی $m_2 = m_1 = -2$) دی. پام (۱۶. ۱) ته دکرښي g_2 برابرې لپاره باور لري: $y + 1 = -2(x - 2)$ همداسی $y = -2x + 3$
 ب) د g_2 کرښي میلان یا جګیدنه ده $m_2 = -1/m_1 = 1/2$ د (۱۶. ۱) سره سم د g_2 کرښي برابرې دی: $y + 1 = (1/2)(x - 2) \Leftrightarrow y = (1/2)x - 2$

بیلګه ۱۶. ۹:

د کرښی برابرې ټاکل کيږي چې د $P_1(1/3, -1/6)$ ټکی تیرېږي او په کرښه چې له ټکو $P_2(-1, 1)$ او $P_3(-2, -1)$ تیرېږي، ولاړه وي.
 ځواب: کرښه چې له P_2, P_3 ټکو تیرېږي، و (۱۶. ۳) ته په پام لاندې برابرې لري $(y - 1)/(x + 1) = (-1 - 1)/(-2 + 1) = 2 \Leftrightarrow y = 2x + 3$

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تیریدونکی کرښي برابرې د m_2 میلان سره د (۱۶. ۱) له مخی دي:

$$y + (1/6) = -(1/2)(x - 173) \Leftrightarrow y = -(1/2)x$$

بيلگه ۱۶ . ۱۰ :

د $g_1: 2x - y - 1 = 0$ او $g_2: 3x + 2y = 5$ کرښو د غوڅتکي S واټن له ټکي $P(6, 13)$ څومره دی او د کرښې برابرې څنګه دی چې د کواوردينات له سرچینې تیريږي او د S او P څخه تیریدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوڅتکي کواوردينات د لاندې برابرېونو سیستم څخه لاس ته راځي

$$2x - y = 1$$

$$3x + 2y = 5$$

یعنې: $xS = 1, yS = 1$

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

$$d = \sqrt{(1-6)^2 + (1-13)^2} = 13$$

د (۱۶ . ۳) له مخې د کرښې برابرېونونه چې له S او P تیريږي دي

$$(y-1)/(x-1) = (13-1)/(6-1) \Leftrightarrow y = (12/5)x - 7/5$$

(جگوالی: $m = 12/5$)

له S او P ټکو تیریدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښې میلان

$$m_2 = -1/m = -5/12$$

د $P(0, 0)$ څخه تیریدونکی کرښه د m_2 میلان سره د (۱۶ . ۱) له مخې لاندې

برابرېون لري

$$y - 0 = -(5/12)(x - 0) \Leftrightarrow y = -(5/12)x$$

۱۶ . ۲ گردۍ (دایره)

دایره (گردۍ) د ټولو هغو ټکو ډیری (سټ) ده، چې د یوه کره ځای په ځای ټکي، داسې په نامه منځنۍ څخه، همغه واټن ولري. واټن ته یې وړانګه وایو او په r یې په نڅېنه کوو.

فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې دایره (گردۍ) k د د سطحې

(هوارې) E د ټولو ټکو ډیری (سټ) ده، د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \{X \in E \mid |\overline{MX}| = r\}$$

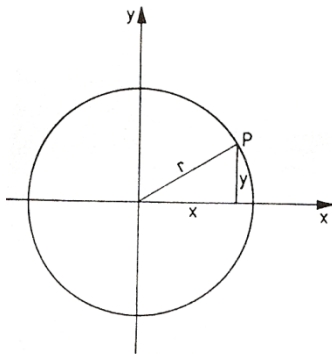
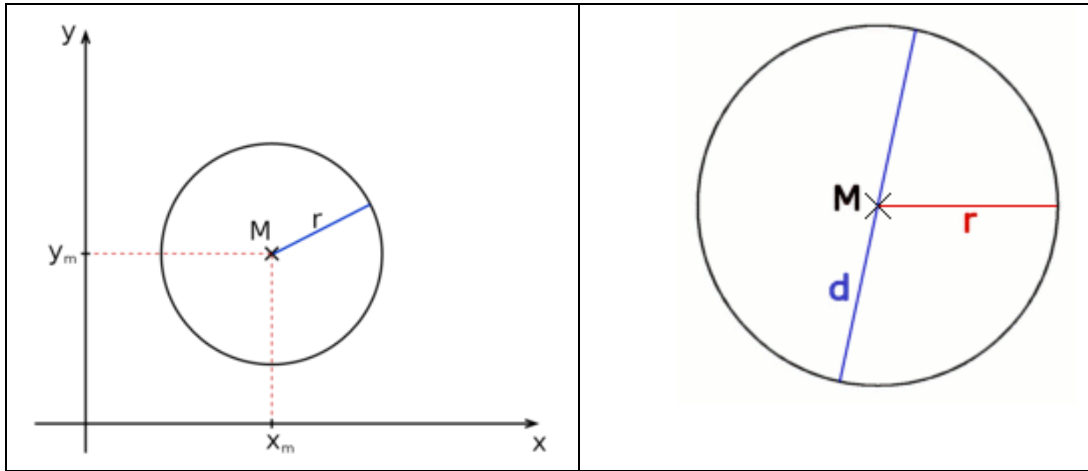


Bild 16.7 ښکاره

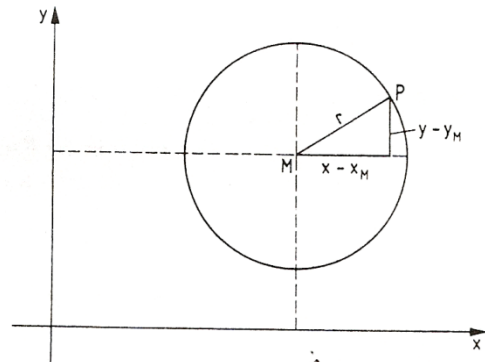


Bild 16.8 ښکاره

په شننیزه هندسه کې کیدی شي، چې گردۍ د منځنۍ $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره ګۍ) د لاندې برابرې له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د گردۍ ټولیز برابرې

دا برابرې د پيژند او پيټاګوراس له جملې سملاسي ورکوي د يوې گردۍ ځانګړې حالت او د کواورديناټس سيستم سره، چې منځنۍ يې د کواورديناټ په سرچینه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

که د گردۍ منح ټکي د کواورديناټسيستم (څيره ۱۶ . ۷) په سرچينه پروت وي، نو د (پيوټاگوراس د جملې له مخې) د گردې په خوښه ټکي $P(x,y)$ لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16.10)$$

د گردۍ منځني برابرېون چې د گردې منځنۍ $M(0,0)$ او وړانګه r ده.

که د گردې منځنۍ M کواورديناټ (x_M, y_M) ولري (څيره ۱۶ . ۸) نو د گردۍ د خوښې ټکي $P(x)$ لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د گردې د منځني برابرېون وي د منځنۍ $M(x_M, y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بينوم مربع وې شمېرو او برابرېون په $A=0$ فاکتور ځلوو (بی له دې چې د گردې برابرېون تغیر ومومي) ، پس پیژندل کېږي چې د گردې برابرېون د څلورۍ یا مربع غږي په x او y کې په فاکتور A لاینیز برابرېون په x او y او ثابت غږي (چې یوه غږي په څیري سره یوځای شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټولیز (عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad A \neq 0 \quad (16.12)$$

د گردې برابرېونونو (مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه •
که د گردې برابرېون په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړ شوي او که منځنۍ او وړانګه یې څرګنده کوو یا معلومو نو د گردې برابرېون د منځنۍ فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د څلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه څیري پورته وګورۍ

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :

د گردۍ برابرېون دې په ټولیزه - یا عمومي توګه وي:

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وويشل شي $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

$$(د \text{ څلورۍ پوره کونه يا مربع تکميلونه}) \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 3 + 4 + 9$$

دبېنوم د مربع له لاري انځورونه $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ گردۍ منځتکۍ $M(-2, 3)$ او وړانګه $r=4$ لري.

بېلګه ۱۶ . ۱۲ :

د گردۍ برابرې وړانګې چې منځتکۍ یې $M(2;0)$ وي او په کوم چي ټکۍ $P(6,4-3)$ روت دی؟

اوبیونه : د $M(2,0)$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دی

$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$

$$P \text{ د } (6-2)^2 + (4-3)^2 = r^2 \text{ کوي پوره کوي}$$

له دې څخه د گردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د گردۍ برابرې:

$$(x-2)^2 + y^2 = 64$$

گردۍ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لروډی شي

۱ - کرښه گردۍ غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده (سیکانتي)

۲ - کرښه گردۍ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)

۳ - کرښه ټوله له گردۍ دباندې پرته ده (له گردۍ تیریدونکی، لنډ : تیریدوني)

د غوڅتکي (د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د گردۍ او کرښې برابرې پوره کړي
سړی د کرښې برابرې د گردۍ په برابرې ونونو کی ږدي (y یا x پسې حل یا اوبی شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (څلورۍ برابرې) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چي په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیوني یا ځوابونه لري، یو ریل ډبل اوبی او یا هڅ ریل اوبی کیدی شي ولري، کوم چي له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بېلګه ۱۶ . ۱۳ :

کوم پروت ځایونه گردۍ k چي راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ لاندې کرښې و یو بل ته لري؟

$$g_1: 2x+y=4, g_2: 2x+y=12, g_3: -x+y/2=3$$

اوبی: $g_1: y=-2x+4$ که د گردۍ برابرېون کی ځای کړو نو دا برابرېون لاس ته راځي

$$(x-2)^2+(-2x+4-3)^2=5 \Leftrightarrow 5x-8x=0$$

ددې ځوابونو $x=0, y=4$ او $x=8/5, y=4/5$ سره به g_1 د گردې غوڅوونی یا (Sekant سکانت) وي .

که $g_2: y=-2x+12$ د گردې مساواتو کی ځای کړو نو لاندې لاس ته راځي

$$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 \Leftrightarrow x^2-8x+16=0$$

د ډبل اوبونې $x_{1,2} = 4, y_{1,2} = 4$ سره g_2 یو تانجنت دی .

که $g_3: y=2x+6$ د گردۍ مساوات کی ځای کړو، نو لاندې لاس ته راځي:

$$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 \Leftrightarrow 5x^2+x+8=0$$

دا څلورۍ برابرېون یا مربع مساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرېنه g_3 له گردۍ k دباندې پرته ده، یعنې دباندنۍ یا دباندونۍ ده.

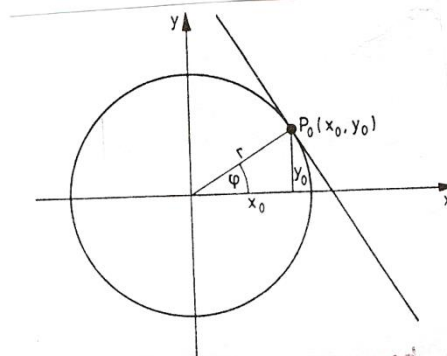


Bild 16.9

په گردې $x^2+y^2=r^2$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرېون په ټکی $P_0(x_0, y_0)$ د مساوات $x_0^2+y_0^2=r^2 > 0$ سره غوښتل کېږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دی

د مماس وړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan \phi = \frac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخې د تنجنت

$$m = 1/\tan \phi = -x_0/y_0; \dots \dots \dots (16,13)$$

د تنجنت یا جګې برابرېون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

$$y - y_0 = -(x_0/y_0)(x - x_0) \Leftrightarrow xx_0 + yy_0 = x_0^2 + y_0^2 = r^2$$

$$xx_0 + yy_0 = r^2 \quad (16.14)$$

د گردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ په گردۍ

$$x^2 + y^2 = r^2$$

حالتونه $P_0(0, \pm r)$ او $P_0(\pm r, 0)$ په (۱۶. ۱۴) کی ځای (دننه) دي.
(څېره. ۱۶. ۱۰)

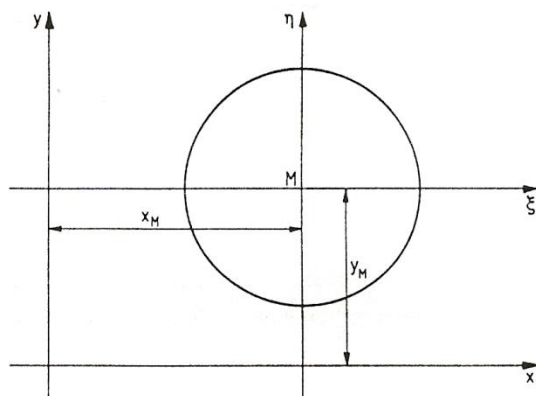


Bild 16.10 څېره

يادونه : که له دې مخ ته يا وروسته x_0, y_0 يا x_M, y_M او x_0, y_0 يا x_M, y_M گورو نو کټمټ دي

بيلگه ۱۶. ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرې له ټکي $P_1(-12, 4)$ په گردۍ $x^2 + y^2 = r^2$ په څه ډول دي؟
او بيو نه : لمړۍ د دواړو تنجنتو د مماس ټکي پيدا کوو. دا بايد د گردۍ برابرې پوره کړي.
ټکي P_1 بايد په تنجنت پروت وي يعنې د تنجنت برابرې (۱۶. ۱۴) بايد پوره کړي.
نو باور لري

$$x_0 + 4y_0 = 16 \quad 12- \text{ او } x_0^2 + y_0^2 = 16$$

که دا لاینیز برابرېون د y_0 په لور حل شي، نو په x_0 کې یو څلورۍ برابرېون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2 + (3x_0 + 4)^2 = 16$$

همداسې $5x_0^2 + 12x_0 = 0$ د اوبیونو $x_0 = -12/5$ ، $x_0 = 0$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_0 = 4, y_0 = -16/5$$

د تنجنت مساوات په گردې، په ټکو $P_0(0, 4)$ او $P_2(-12/5, 16/5)$ د (۱۶ . ۱۴) له مخې په لاندې ډول دي

$$0.x + 4y = 16 \Leftrightarrow y = 4$$

او

$$(-12/5)x - (16/5)y = 16 \Leftrightarrow y = (-3/4)x - 5.$$

د گردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځنۍ $M(x_M, y_M)$ سره د η, ζ -کواردینات سیستم کې، چی سرچینه یې په M کې پرته ده (؟ څیره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري.

$$\zeta^2 + \eta^2 = r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0, \eta_0)$ کې داسې دي

$$\zeta\zeta_0 + \eta\eta_0 = r^2; \dots\dots\dots (16,15)$$

د η, ζ -کواردینات سیستم د y, x - کواردینات سیستم یو غبرگ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواردینات سیستم کې لاندې اړیکې پرته دي .

$$\zeta = x - x_M, \eta = y - y_M; \dots\dots\dots (16,16)$$

که برابرېون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو (۱۵ . ۱۶) کې ځای په ځای شي، نو سړی بیا دا y, x -کواردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي (کشوي یا راکاږي) :

$$(x - x_M)(x_0 - x_M) + (y - y_M)(y_0 - y_M) = r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې د گردۍ تنجنت برابرېو په گردۍ

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

بیلگه ۱۶ . ۱۵:

په گردۍ چی برابرن $x^2 + y^2 + 16x + 4y + 43 = 0$ لري، د x - محور باندې، په ټکو

$$x_1 = x_2 = -5$$

سره تنجنت وکارو (کیردو). برابران یی څنگه دي؟

اوبیونه : د گردۍ برابران د منځتکي فورم (۱۶ . ۱۱) باندې بدلیري:

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 - 4y + 4 = -43 + 64 + 4$$

$$(x+8)^2 + (y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8, y_M = 2, r = 5$$

د گردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو گردۍ ټکو په گردیبرابران کی ځایوو:

$$(-5+8)^2 + (y-2)^2 = 25$$

له دې داسی لاس ته راغلي دي لپاره څلوری برابران یا مربع مساواتو د دواړو او ردیناتو

مماس ټکي لاس ته راځي : $y_1 = 6, y_2 = -2$

د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8) + (y-2)(6-2) = 25 \Leftrightarrow 3x + 4y = 9$$

او

$$(x+8)(-5+8) + (y-2)(-2-2) = 25 \Leftrightarrow 3x - 4y = -7$$

۱۶ . ۳ بیضوي (هگۍ) یا ایلپسی Die Ellipse

بیضوي یا ایلپسی د ټولو هغو ټکو P ډیری ده، د کومو واټن چی له دوه ټینګ په ځایټکو،

داسی په نامه د ایلپسی د سوزونټکویا محراق F1 او F2 څخه ثابت وي. دا سوزونټکی د

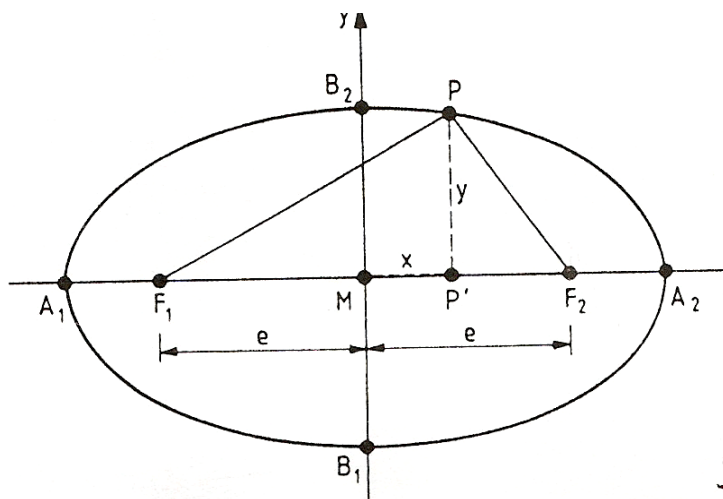
څیرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د y - محور سره سیومتريک د x - محور باندې ځایوو یا ږدو او

د ثابت واټنزیاتون لیکو:

$$\underline{PF1} + \underline{PF2} = 2a \quad (16. 18)$$

د سوزونټکو واټن دي وي:

$$\underline{F1F2} = 2e;$$



څېره ۱۶ . ۱۱

دا e لایني اکسټنټریټی (Exzentrizität) دا یوناني کلیمه ده چی په الیپسی هوپربول او پارابول کی د همدغه تعریف لپاره ټاکل شوې) بلل کیږي .
د پیتاگوراس له جملی لاس ته راځي:

$$PF_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

او

$$PF_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له (۱۶ . ۱۸)

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

(څلوری یا مربع ته جگړي)

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} \quad (\text{رېښه را بیلېږي})$$

(څلوری یا مربع کوو)

$$e^2 x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$$

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - e^2) \quad \text{ترتیب اوړون}$$

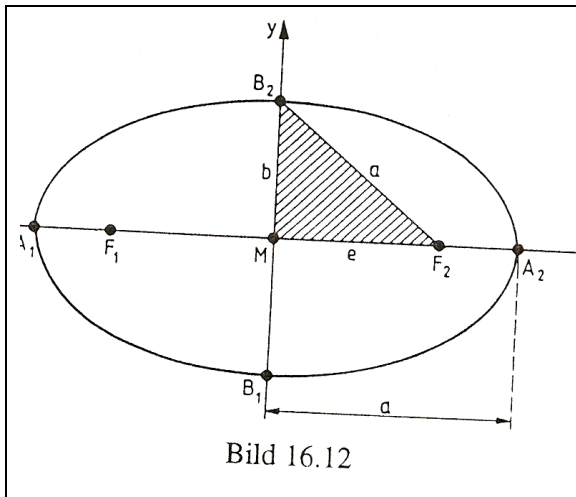
په ځای کوو

$$a^2 - e^2 = b^2 \quad (16.19)$$

او لاس ته راوړو

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad <=>$$

$$(x^2/a^2) + y^2/b^2 = 1 \quad (16,20)$$

د منځتکي $M(0,0)$ سره د ایلیپسی منځتکي مساواتد $y=0$ لپاره دی $x=\pm a$ ، د $x=0$ لپاره دی $y=\pm b$. (څیره ۱۶، ۱۱)د x -محور په ټکو $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ او د y -محور په ټکو $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ کې پرې کوي، a او b د دواړو نیم‌محورونو اوږدوالی دی

لکه د ایلیپسی د هر ټکي لپاره، همداسی د B لپاره هم اړیکې (۱۶، ۱۸) باور لري:

$$\underline{F_1 B_2} + \underline{F_2 B_2} = 2a$$

د $\underline{F_1 B_2} = \underline{F_2 B_2}$ له امله لهدې لاس ته راځي $\underline{F_2 B_2} = a$

(څیره ۱۶، ۱۲)

له دې سره په دریځوډي $MF_2 B_2$ کې د اړیکو (۱۶، ۱۹) هندسي ارزښت پیژندل کېږي.

که منځتکي M کووړدینات M_x ; M_y ولري او د ایلیپسی محورونه د کووړدیناتو سره غبرگ وځلي، نو د ایلیپسی د یوه خوښې ټکي $P(x,y)$ لپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2 + (y-y_M)^2/b^2 = 1 \quad (16, 21)$$

د ایلیپسی د منځتکي مساوات د منځتکي $M(x_M, y_M)$ سره

د پورته فرمول ځلولو وروسته د ايليپسي ټوليز (عمومي) جوړښت پېژندل کيږي.

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (16, 22)$$

د ايليپسي مساواتو ټوليزه بڼه يا - فورم

د گردې برابرې سره په توپير (پرتله يا مقايسه ۱۶ . ۱۲) د x^2 او y^2 ځله وونی يا ضريبونه يو له بل توپير لري، مگر همغه منځښته لري ($A.B > 0$)

بيلگه ۱۶ . ۱۶ :

د د ايليپسي منځتکي، نيممحور، او سوزونتي لټول کيږي، که دا برابرې

$$9x^2 + 25y^2 - 54x + 100y - 719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبونه : د ايليپسي برابرې د منځتکي بڼه يا فورم (۱۶ . ۱۲) باندې اړول کيږي:

$$9(x^2 - 6x) + 25(y^2 + 4y) = 719$$

ځلورۍ پوره کونه يا مربعنکميلونه

$$9(x^2 - 6x + 9) + 25(y^2 + 4y + 4) = 719 + 9 \cdot 9 + 25 \cdot 4$$

$$9(x-3)^2 + 25(y+2)^2 = 900$$

(په ۹۰۰ ویش)

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځتکي او ردینات

$$x_M = 3, y_M = -2$$

لوستلکيږي او د نيممحور لپاره $a=10$, $a^2=100$ او $b=6$, $b^2=36$ لوستل کيږي.

د (۱۶ . ۱۹) سره سم لاس ته راځي:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

او له دې سره منځتکي (پرتله څيره ۱۶، ۱۱)

$$F_1(x_M - e, y_M) = F_1(-5, -2), F_2(x_M + e, y_M) = F_2(11, -2)$$

بیلگه ۱۶ . ۱۷ :

د ایلیپسي برابرېون د منځتکي $M(-1,3)$ سره لټول کيږي، په کوم چي ټکي $P_1(-3,3)$ او $P_2(0, 3 + \frac{3}{2}\sqrt{3})$ پراته وي.

اوبونه : د $(۱۶, ۲۱)$ سره سم د منځتکي $M(-1,3)$ سره د ایلیپسي برابرېون داسي دي

$$(x-1)^2 / a^2 + (y-3)^2 / b^2 = 1$$

ټيکي P_1 او P_2 بايد د ایلیپسي برابرېون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2} + \frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2} = 1, \frac{(0+1)^2}{a^2} + \frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$$

د دې برابرېونونو له لومړۍ څخه لاس ته راځي $4/a^2 + 0 = 1$ همداسي $(< = >)$
 $a = 2$ او له دې سره د دويم برابرېون څخه همداسي $< = >$

$$\frac{(0+1)^2}{4} + \frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{4} \cdot \frac{3}{b^2} = 3/4 \Leftrightarrow b = 3$$

د ایلیپسي لټونکي برابرېون داسي دي:

$$(x+1)^2/4 + (y-3)^2/9=1$$

بیلگه ۱۶ . ۱۸ :

د کرښو

$$y = x + 2 \quad (\text{الف})$$

$$y = x - 2 \quad (\text{او ب})$$

غوڅټکي د ایلیپسي $9x^2+y^2+54x+72=0$ سره لټول کيږي.

اوبیونه : که الف) $y=x+2$ د ایلیسی برابرنونو کی خوندي شي، نو لاس ته راځي

$$9x^2+(x+2)^2+54x+72=0 \Leftrightarrow 10x^2+58x+76=0$$

د څلورۍ - یامربع برابرنونو اوبی :

$$x_1 = -2, x_2 = -3,8$$

د غوڅتکي اېسځیز یا پروتمحور دی. په دې پورې اوردینات یا ولاړ محور

$$y_1 = 0, y_2 = -1,8$$

اړه لري.

ب) y د رامنځ ته شوي څلورۍ (مربع) برابرنون

$$9x^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$$

رییل اوبیونه نه لري. کرښه $y = x-2$ د ایلیسی څخه دباندې پرته ده

۱۶ . ۴ : هوپربول Die Hyperbel

پېژند:

هوپربول یا هیوپربل د ټولو هغو ټکو ډیری ده، د کومو لپاره چې د کمون یا کمېنت مطلقه ارزښت واټن، د دوه کره په ځای ټکو F_1 او F_2 ، دا په نامه د هوپربول سوزونټکو

یامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټکي، لکه په ایلیسی کی دلته هم مور کره ټاکو

(څیره ۱۶ . ۱۳).

د ثابت واټنکمون یا واټنکمېنت $|PF_1-PF_2|=2a$ او (څیره ۱۶ . ۱۳)

د سوزونټکواټن $F_1F_2 = 2e$ (څیره ۱۶ . ۱۳)

$$e^2 - a^2 = b^2 \quad (16.23)$$

په پورته کې یا بل چیرې، چې کوم څه لاندې کرښیز شوي وي، دا په زیاتو ادبیاتو کې پورته کرښیز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې کرښیز شوي وي او که پورته، توپیر نه لري یا همغه څه دي.

یو ایلیسی برابرنون ته ورته تلنه (برخه ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لارښودوي:

$$(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1 \quad (16.24)$$

د هوپربول منځتکي برابرنون د منځتکي $M(0,0)$ سره

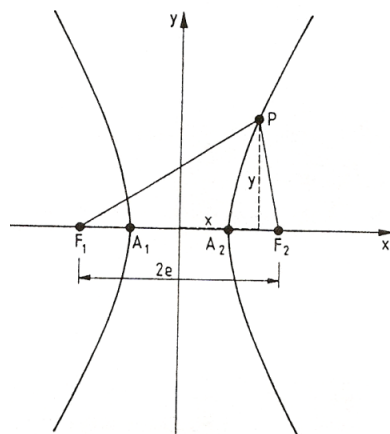


Bild 16.13

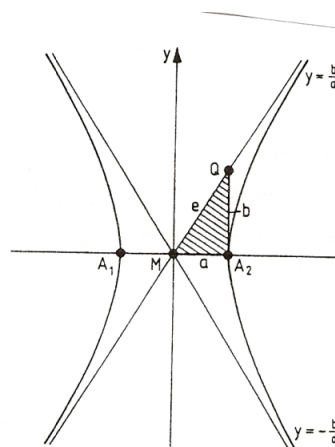


Bild 16.14

د $y=0$ لپاره $x=\pm a$ دی، دا په دې مانا چې هوپربول د x - محور په ټکي

$A_1(-a,0)$ او $A_2(a,0)$ کی غوڅوي. دا ټکی ککړی ټکی بلل کېږي. گورو چې دا دککړی ټکی دی. (د ناپای سره ځاننوی په هکله: که $(16, 24)$ د y په لور حل شي، نولاس ته راځي:

$$y = \pm b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm \frac{b}{a} \cdot x \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

د $x \rightarrow \pm \infty$ لپاره $a^2/x^2 \rightarrow 0$ له منځه ځي. پس هوپربول ځان کرښی $y = \pm(b/a) \cdot x$ ته نژدې کوي (څیره ۱۶. ۱۴)

له دې امله لاندې برابرې

$$y = \pm(b/a)x \quad (16,25)$$

د هوپربول اسیمپتوتی بلل کړي.

د $(16, 23)$ له امله $MQ = e$ دی.

که منځکی M کواوردینات x_M, y_M ولري او سیومتریځ غبرگ د کوردیناتو محور ته ځغلي، نو د یوه په خوښه هوپربول ټکي $P(x,y)$ لپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2 - (y-y_M)^2/b^2 = 1 \quad (16,26)$$

د هوپربول منځتکي برابرېون $M(xM, yM)$ سره.

د پورته مساوات د څلولو وروسته، په لاندې ډول د هوپربول مساوات ټوليز جوړښت جوتيري.

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (16,27)$$

دهوپربول برابرېون ټوليزه بڼه يا فورم

دلته د ايلپسي سره په مخامخ (همدا برعکس دی) يا په څټ ډول د x^2 او y^2

ځله ووني بدله مخنښه لري

($A \cdot B < 0$) ټوليز برابرېون هم کولی شي چې موږ لاندې منځتکي برابرېون ته لارښود کړي،

$$(y - yM)^2 / b^2 - (x - xM)^2 / a^2 = 1 \quad (16,26')$$

د کومو څيره چې يو پورته لور او کښته لور ته واز هوپربول دی.

بيلگه ۱۶ . ۱۹:

د لاندې هوپربول منځتکي او سوزونټکي لټول کيږي

$$-25x^2 - 150x + 144y^2 - 188y + 144 = 0$$

اوبيوڼه: د ورکړشوي هوپربول مساوات بڼه په منځ ټکي (۱۶ . ۲۶) اوږي يعني فورم يی بدليږي:

$$-25(x^2 + 6x) + 144(y^2 + 2y) = -144$$

(د څلورۍ پوره کونه)

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 = -144 - 225 + 144$$

$$1)^2 = -225$$

(په 225 - ویشنه)

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 =$$

$$-225 + (x+3)^2 / 9 - (y-1)^2 / (25/16) = 1$$

د لاس ته راغلو مساواتو څخه لاندې لوستل کيږي:

$$xM = -3, yM = 1, a^2 = 9, a = 3,$$

$$b^2 = 25/16, b = 5/4$$

او د دې سره سم د (۱۶ . ۲۳) له امله لرو:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144/16 + 25/14} = 13/4$$

د هوپربول منځتکی (-3,1) دى ، سوزوننکي یی
 $F_1(xM-e, yM) = F_1(-25/4, 1)$ او $F_2(xM+e, yM) = F_2(1/4, 1)$ دي.

بیلگه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول $9x^2 - 4y^2 = 36$ اسیمپتوتی یو له بل سره کوم کونجونه تری یعنی جوړوي یا
 اسیمپتوتی په کومو کونجونو کی یو بل پریکوي؟
 اوبیونه : هوپربول د منځتکي بڼه (فورم) له (۱۶ . ۲۴) سره سم په لاندې ډول ده
 $x^2/4 - y^2/9 = 1$ یا د $a=2, b=3$ سره
 له دې سره سم دواړه اسیمپتوتی د (۱۶ . ۲۵) له مخی $y = (3/2)x$ او $y = -(3/2)x$ دي.

د لومړی اسیمپتوتی او x - محور ترمنځ کونج φ د $\tan \varphi = 3/2, \varphi = 56,31^\circ$ څخه
 لاس ته راځي.

له دې امله د اسیمپتوتو ترمنځ کونج ψ باور لري $\psi = 2\varphi = 112,62^\circ$
 ډاکونج کیدی شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

بیلگه ۱۶ . ۲۱ :

د ایلپسی $x^2/64 + y^2/16 = 1$ غوڅتکي د هوپربول سره لتول کیري چی منځ تکی یی په
 سرچینه او ککرتگی یی د ایلپسی په سوزوننکو پراته وي او همغه ارزښت b لکه ایلپسی
 ولري.

اوبیونه : د ایلپسی نیممحور په a_1 او b_1 سره او لاینیزه اکسختیتریکیتی یی په
 e_1 سره ښایو.

نو باور لري: $a_1 = 8, b_1 = 4$ او د (۱۶ . ۱۹) سره سم دی.

$$e_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

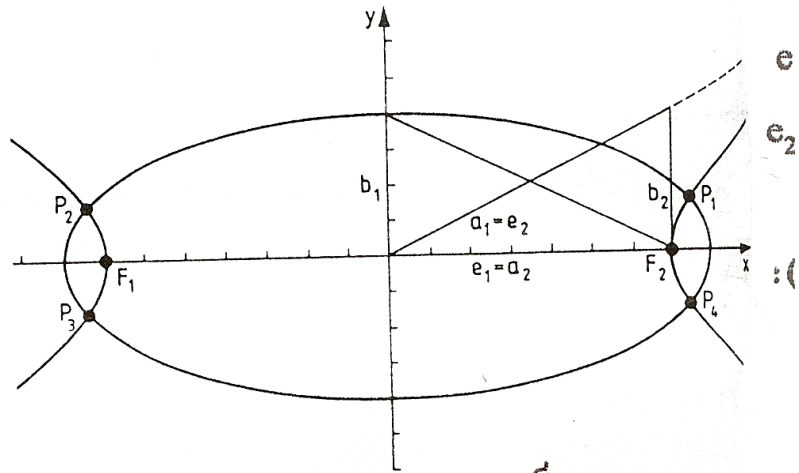


Bild 16.15

د هوپربول لپاره نخبنی e_2, a_2, b_2 استعمالوو:

باورلري (پرتله څيره ۱۶ . ۱۵) :

$$b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$$

او د (۲۳ . ۱۶) سره سم دی

$$e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$$

د هوپربول ابرون داسی دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوڅټکو کواوردینات د ایلیسی- او هوپربول مساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زیات شي نو لاس ته راځي

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{48}\right)x^2 = 2, x^2 = 348/7, x_{1,2} = \pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ایلیسی او هوپربول ابرونو څخه لاس ته راځي

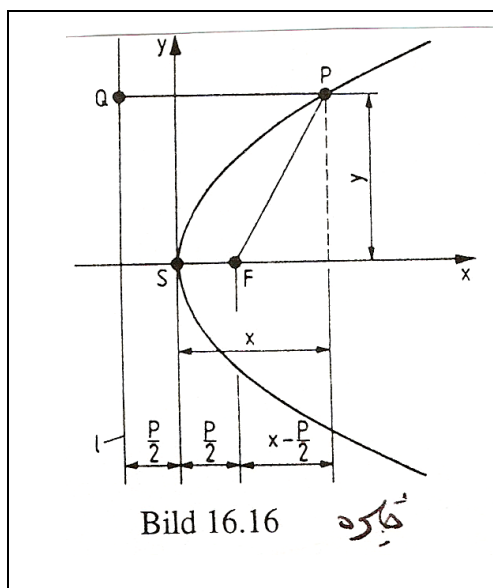
$$y^2 = 16(1 - x^2/64) = 16/7 \Leftrightarrow y^2 = 16(x^2/48 - 1) = 16/7 \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1/7}$$

او د دې سره سم د دواړو کبرو غوڅتکي دي:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{6/7}, 4\sqrt{1/7}), P_3(-8\sqrt{6/7}, -4\sqrt{1/7}), P_4(8\sqrt{6/7}, -4\sqrt{1/7})$$

۱۶ . ۵ پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو P ډیری ده، چې واټن یی له یوه کله په ځای ټکی، د پارابول سوزون ټکی F ، او یوې کله په ځای کرښی، د پارابول تر مخکښی l (دایه څیره کی جوته ده چې دا کومه کرښه ده) سره مساوي دي (څیره ۱۶ . ۱۶) د سوزونټکی او مخکښی ترمنځ واټن نیم پارامتر p بلل کیږي، S ککری ټکی دی، کرښه چې له S او F تیريږي د پارابول محور دی.



له پېژند - يا تعريف برابر وننو $PF = PQ$ څخه لاس ته راځي

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

او له دې څخه د مربع کولو او د ټولگی څخه لاس ته راځي

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2,$$

$$x^2 - px + p^2/4 + y^2 = x^2 + px + p^2/4$$

پس لرو

$$y^2 = 2px \quad (16,28)$$

د پارابول ککری برابر ون د ککری ټکي $S(0,0)$ سره، پورته لور ته واز ($x > 0$)

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \quad (16, 29)$$

هغه وکین لور ته واز پارابول دی د واریابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$x^2 = 2py \quad (16, 30)$$

د پارابول ککړ مساوات د ککړتکي $S(0,0)$ سره، پورته واز پارابول $(y > 0)$ په همدې توګه:

$$x^2 = -2py \quad (Y < 0) \quad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دی.

که ککړتکي S کواوردینات x_S, y_S ولري او د پارابول محور د x - محور ته غبرګ ځغلی په همدې ډول د y - محور ته هم غبرګ ځغلی، نو د یوې په خوبښه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(y - y_S)^2 = 2p(x - x_S) \quad (16, 32)$$

د پارابول ککړیرون د ککړی ټکی (x_S, y_S) سره، چی ښی لور ته وازوي $(x > x_S)$

$$(x - x_S)^2 = 2p(y - y_S) \quad (16.33)$$

د پارابول ککړیرون د ککړتکي (x_S, y_S) سره، چی پورته لور ته وازوي $(y > y_S)$

په همدې ډول:

$$(y - y_S)^2 = -2p(x - x_S) \quad (x < x_S) \quad (16.34)$$

$$(x - x_S)^2 = -2p(y - y_S) \quad (y < y_S) \quad (16.35)$$

هغه کښ لور او همداسی کوزي یا لاندي لور ته واز پارابولونه دي د فرمول $(16, 32)$ همداسی $(16, 33)$ ځله ونو څخه وروسته د پارابول تولید (عمومي) جوړښت پیژندل کیږي:

$$Ay^2 + Bx + Cy + D = 0, \quad B \neq 0 \quad ((16, 36))$$

همداسی $(< = >)$

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0, \quad C \neq 0, \quad (16, 37)$$

د پارابول مساوات تولید (عمومي) ښه (فورم)

بیلګه ۱۶ . ۲۲ :

د پارابول برابرېون دې له ککريټکي ، له نیمپارامتر او وازلوري څخه پيداشي:

الف $(S(0,0), P = 6)$ کين، ب $(S(2,1); P = 0,5)$ پورته

پ $(S(-3,-5), P = 4)$ لاندې ت $(S(4,-2), P = 2/3)$ بنی

اوبیونه یا حل:

$$\text{الف) } y^2 = -12x \quad \text{ب) } (x-2)^2 = y-1$$

$$\text{پ) } (x+3)^2 = -8(y+5) \quad \text{ت) } (y+2)^2 = (4/3)(x-4)$$

بیلگه ۱۶ . ۲۳ :

د پارابول د لاندې مساوات سره دې د پارابول د ککريټکي کواوردينات ، نیمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي $y^2 - 18x + 12y - 36 = 0$ ، $a) (x^2 + 4y + 20x + 10 = 0)$.

اوبیونه : د پارامترتوليزه بڼه (فورم) دې په ککريبراېرون $(16, 32)$ همداسی (16) ، (33) همداسی $(16, 34)$ همداسی $(16, 35)$ کی وازمايل شي (څلوری پوره کيدنه یا مربع تکميليدنه) . د ککريبراېرون څخه ککريټکي ، نیم پارامتر او وازلور

لوستور دي.

$$a) \quad x^2 + 20x + 100 = -4y - 100 + 100$$

$$(x+10)^2 = -4y \quad S(-10, 0), P = 2$$

پارابول لاندې لور ته واز دی

$$b) \quad y^2 + 12y + 36 = 18x + 36 + 36$$

$$(y+6)^2 = 18(x+4)$$

$$S(-4,-6), P = 9$$

پارابول بنی لور ته واز دی

۱۶ . ۶ ټولگه:

داله ۱۶ . ۱ نیولی تر ۱۶ . ۵ پوري څيرل شوي دهواري کږي (کږی په هواري یا سطحه کی)

-کربنه

-گردی

-ایلیپسی چی د کواور دینات محور سره غبرگ خُغلي، ټول د لاندې مساوات

-هوېربول

-پارابول

په څیر انځور یږي:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (16, 38)$$

فاکتورونه، ضریبونه یا ځله ووني A او B د کبری د توکو لپاره پرېکنده دي.برابرون $(16, 38)$ لاندې روښانويد $A.B > 0, A \neq B$ لپاره ایلیپسی،د $A = B$ لپاره گردید $A.B < 0$ لپاره هوېربول، که $A > 0, B < 0$ وي، نو کین لور ته واز،که $A < 0, B > 0$ وي، نو پورته او لاندې لور ته وازد $A.B = 0, A = 0, B \neq 0$ لپاره یو پارابول، چی محور یی د x - محور سرهغبرگ دی د $A \neq 0, B = 0$ یو پارابول، چی محور یی د y - محور سره غبرگ دید $A = B = 0$ لپاره یوه کربنه که په $(16, 38)$ یو بل گډوله (یو د بل سره گډ شوی)

څلوری توکي رامنځ ته شي، نو دا د کبری یو څلوری برابرون یا مربع مساوات

ښکاروي (توضیخ کوي)، د کومو محورونه چی نور د کواور دیناتو محورونو سره

غبرگ نه دي.

بیلگه ۱۶ . ۲۴ :

له لاندې مساواتو سره کومی کبری انځوریدلی شي ؟

$$a) x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \quad b) 3x^2 + 24x + 15y + 138 = 0$$

$$c) 16x^2 + y^2 - 96x = 0, d) 2x^2 - 2y^2 + 16x + 10y - 105/2 = 0 ?$$

اوبیونه : (یادونه : لکه د نورو ځایونو په څیر دلته هم الف د a په ځای لیکم ، ځکه چی د

پښتو لپاره کربنه په لاتین حروفو له بني لور نه شي پیل کیدی)

الف یا a) که $A = B = 1$ وي ، نو گردیب یا b) که $B = 0$ پارابول چی محور یی د y - محور سره غبرگ ويپ c) که $A \neq B, A.B > 0$ نو ایلیپسیت d) که $A.B < 0$ ، نو هوېربول

۱۶. ۷ تمرینونه

۱ - د هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیرېږي او د x -محور سره کونج جوړوي

- a) $P_1(2, -3)$, $= 30^\circ$, b) $P_1(-3, 2)$ $= 45^\circ$
 c) $P_1(-1, -4)$, $= 120^\circ$, d) $P_1(4, 4)$, $= 0^\circ$
 e) $P_1(0, 0)$, $= 150^\circ$, f) $P_1(1, -1)$, $= 90^\circ$

۲ - ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیرېږي

- a) $P_1(0, 0)$, $P_2(3, 3)$, b) $P_1(-3, 3)$, $P_2(0, 0)$,
 c) $P_1(1, 4)$, $P_2(-3, -4)$, d) $P_1(1, 2)$, $P_2(-1, 1)$,
 e) $P_1(0, 1, -1)$, $P_2(-0, 1, -3)$, f) $P_1(1, -1)$, $P_2(4, -2)$!

۳ - د محورونو غوڅي (لنډ: محور غوڅي) a, b د کرښې مساوات په نورمال فورم وټاکئ او همداسې د غوڅتکو واټن d د محور غوڅتکو سره چې یو له بل یې لري وټاکئ.

- a) $a = 5$, $b = 2$, b) $a = -1$, $b = 3$, c) $a = 2$, $b = -3$, d) $a = -3$, $b = -3$

۴ - یو دریګودی دا لاندې ګوډټکی لري $A(-4, -1)$, $B(2, -2)$, $C(1, 3)$. د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګودیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګودی اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ - د لاندې کرښو مساواتو نورمال فورم او برختوب پلټنه یا فورم څنګه دی؟

- a) $3x - 5y + 15 = 0$, b) $4x - 3y - 18 = 0$
 c) $-4x + 2y - 10 = 0$, d) $-3x - 4y + 15 = 0$?

۶ - د کرښې $y = -(12/5)x + 2$ پروتخاي د کرښو

- a) $y + 2, 4x - 6 = 0$, b) $28x + 10y = 0$, c) $8x + 5y = 2$,
 d) $5y + 12x - 10 = 0$. e) $y + (12/5)x = 3$, f) $6x + 2, 5y = 5$

سره وڅیړئ.

۷- د لاندې کړنډ غوڅتکو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ:

a) $2x + 3y = 7$

b) $y = (1/2)x + 1$

c) $y - x = 7$

$3x - y = 5,$

$y = -2x + 6,$

$y = 7,$

d) $x/3 - y/2 = 1$

e) $6x - 2y + 10 = 0$

f) $y = 4x - 1$

$-x/2 + y/3 = 1,$

$y = 3x + 6,$

$y = -3x + 5!$

۸- کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوڅتکي $P(0,5)$ څخه تیرېږي؟

۹- د لاندې ګڼو ^{نکته} $A(-4,-1)$, $B(2,-2)$, $C(1,3)$ سره د دریګوډي دننه کونجونه څومره لوی دي؟ (پیلونه: دریګونجی وکارئ) یا (دریګوډی)

۱۰- د ولاړپړیوټی کرښې یا زوړندې مساوات له ټکي $P(2,0)$ څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دي؟

۱۱- د ولاړکرښې مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي $P(-1,-2)$ څنګه د

۱۲- د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګلي کرښې مساوات چې له ټکي $P(-1,-3)$ تیرېږي، څنګه دي؟

۱۳- د لاندې مساواتو سره ګردیمنځتکی او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 9y = 0,$

d) $4x^2 + 4y^2 + 32x - 8y + 67 = 0$

e) $36x^2 + 36y^2 - 36x + 24y - 23 = 0,$

f) $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 16!$

۱۴- د لاندې ګردیو مساوات وڅیړئ

(الف) چی منځ ټکی $M(-2,-1)$ لری او له سرچینی تیرېږي

ب) هغه چي دري ټکي $P_1(3,0)$, $P_2(5, 5-3)$, $P_3(-5+3,-1)$ يی د غاړو ته
 پ) چي وړانګه $r=6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11)$, $P_2(5,5)$ څخه تيريري.
 ت) له ټکي $P_1(3,4)$ تيريري او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ) چي منځ ټکي $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ لمسوي.
 ث) چي د هغې منځټکي په کرښه $y = 3x - 19$ پروت دی او له ټکي $P_1(7,-2)$ او همدا سې له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تيريري.

۱۵ - کوم پروتخايونه گردی k چي فرمول لري $x^2 + y^2 - 8x = 0$ او لاندې کرښې يو له بل سره لري:

- a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,
 d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ - کوم پروتخاي کرښه $3x + 4y = 25$ گردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ - د تنجنت مساوات څنګه دی

الف) په ټکي $P_0(5, y_0)$ چي په گردی $x^2 + y^2 = 169$ پروت دی،

ب) په ټکي $P_0(x_0, -2)$ چي په گردی $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ - د هغو گردیو منځټکي پيدا کړي چي وړانګه يې $r=5$ وي، کومې چي کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکي $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!

۱۹ - په گردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکي، کوم چي د

کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ خغلي؟

۲۰ - د ايليپسي مساوات وټاکي، له

a) $M(0,0)$, $a=11$, $c=8$, B) $M(0,0)$, $b=4$, $c=6$,

c) $M(-3,7)$, $c=4$, $b=5$, d) $M(4, -5)$, $e=7$, $a=10$!

۲۱ - د لاندې ايليپس مساواتو څخه د نیم محورونو او سوزونته کو منځتکی او اوږدوالی راپیدا کړی:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x^2 / 100 + y^2 / 64 = 1 & \text{b) } (x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1 \\ \text{c) } 3x^2 + 4y^2 - 24x \geq 0, & \text{d) } 5x^2 + 9y^2 - 10x + -90y + 50 = 0, \\ \text{e) } 4x^2 - 13y^2 - 208 = 0, & \text{f) } 4x^2 + 9y^2 + 54y - 227 = 0 \end{array}$$

۲۲ - د هغو ايليپسو مساوات راپیدا کړی، کومې چې
 الف) چې منځتکی $M(0,0)$ او لایني ایکسختريخيتي $e = 6$ لري،
 ب) له منځتکی $M(1,1)$ او لایني ایکسختريخيتي $e = 4$ لري او له
 ټکو څخه تیرېږي،

پ) د نیم محور اوږدوالی $a = 9, b = 6$ لري او له ټکو $P_1(2,8), P_2(2,-4)$ څخه تیرېږي!

ت) د نیم محور اوږدوالی $a = 2, b = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,-4), P_2(-5,-4)$ څخه تیرېږي!

۲۳ - د لاندې ايليپسو او کرښو ترمنځ غوڅتکي پیدا کړی

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x^2 + 4y^2 - 20 = 0, & x + 2y - 6 = 0, \\ \text{b) } 3x^2 + 4y^2 - 24x =, & y = 3x, \\ \text{c) } (x-3)^2 / 9 + (y-1)^2 / 4 = 1, & y = x + 1, \\ \text{d) } x^2 + 4y^2 + 16y + 12 = 0, & y = x - 2 \end{array}$$

۲۴ - د هوپربول مساوات له

الف) $M(0,0), a = 4, e = 5, b = 4$ (ب) $M(-3,2), b = 4, e = 6$

پ) $M(1,1)$ او هوپربول ټکو $P_1(-3,1), P_2(6, 7/4)$

ت) $a = 3, b = 2, x = -1$ او د هوپربول ټکي $P(-4,-2)$ وټاکي!

۲۵ - د هوربولونو

$$a) x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1, \quad b) 9x^2 - 64y^2 = 576$$

○ نیممحورونو اوږدوالی او اسیمپټوټي راپیدا کړی!

۲۶ - د لاندې هوربولونو منځنۍ او د نیممحور اوږدوالی پیدا کړی.

$$a) 9x^2 - 64y^2 - 36x - 540 = 0, \quad b) x^2 - 9y^2 + 54y - 90 = 0,$$

$$c) x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 16 = 0, \quad d) x^2 - y^2 - 2x + 10y - 28 = 0 !$$

۲۷ - د لاندې مساواتو سره د کړيو غوڅنکي وټاکي:

$$\begin{array}{ll} a) \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1, & y = \frac{1}{5}x, \\ b) 4x^2 - 9y^2 = 144, & x^2 - 24y = -28, \\ c) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1, & y = -\frac{2}{3}x - 5, \\ d) 4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 68 = 0, & 9y^2 - 36y - 72x + 8 = 0, \\ e) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1, & x^2 - y^2 = 16 ! \end{array}$$

۲۸ - د لاندې پارابولونو ککرتکو او سوزونټکو کواوردینات وټاکي:

$$a) 5y^2 + 4x = 0, \quad b) 2y - (1/2)x^2 = 0 \quad c) 4y + (1/3)x = 0,$$

$$d) 2y^2 - 12x = 0, \quad e) y^2 - 2y - 10x - 9 = 0, \quad f) x^2 - 7x - y + 12 = 0$$

$$g) y^2 - 6y + 6x - 3 = 0. \quad h) x^2 + 4x + 12y - 52 = 0$$

۲۹ - د پارابول مساوات له لاندې ککرتکو او سوزونټکو وټاکي:

$$S(0,0), F(0,1), \quad b) S(0,0), F(-1,0), \quad c) S(1,1), F(2,1),$$

$$S(-1,-1), F(-2,-1), \quad e) S(2,-3), F(2,-2), \quad f) S(-2,3), F(-2,2)$$

۳۰ - یو پارابول د ککړي پروت ارزښت $x_8 = 3$ لري، کښه $y = 8$ د محور په څېر ټکي $P(7,4)$ تیريږي. ددې مساوات څنگه دي؟

۳۱ - يو پارابول د ککرکو او ردینات $y_s = -3$ لري، کرښه $x = 2$ د محور په څیر او

له ټکي $P(4, -4)$ تیریري. د هغې مساوات څنگه دي؟

۳۲ - کوم پروتځاي اړیکې د

الف (پارابول $y^2 = -4x$ او کرښی $y = x - 1$)

ب (پارابول $x^2 = 5y$ او کرښی $y = x - 4$)

پ (پارابول $x^2 = -3y$ او کرښی $y = x + 5/12$)

ت (پارابول $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$ او کرښی $y = x$)

ټ (پارابول $y^2 = 7x$ او کرښی $9x + 12y + 28 = 0$)

ترمنځ پرتی دي؟

که موجود وي ، نو غوڅنکی همدا سي لمستکی يې ورکړی!

۱۷ وکتور شمیرنه او په حُمکچ کی د هغه په کارونه

۱۷. ۱ د وکتور پیژندنه ،

په کارتیزې کواورډینات سیستم کی د وکتور انځورونه

په پیدایښتي پوهنو یا طبیعي علومو او تخنیک کی موږ لویې پیژنو چی د رییل ارزښتونو په ورکولو سره یواځنی ټاکلي دي، لکه وخت، گرمي، توان ، وزن . داډول لویو ته سکالار لویې وایو . نورې لویې لکه زور ، چټکتیا (سرعت)، بیړه (تعجیل)، د برقي او مقناطیسي چاپیریالزور برسیره په ارزښت (مطلقه ارزښت) د لور ورکونه هم غواړي، په کومه چی تاسیر اچوي. موږ دې لویو ته وکتورونه وایو. د وکتور له لارې کیدی شي چی د هندسي شیانو ځان نیونه هم تشریح کړای شو. په فضا هوا کی یو ټکی کیدی شي چی د هوا کواورډینات سیستم کی د سرچینی څخه د دې ټکي په لور لوریز شوي کرښه (په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري) تشریح کړی شي یعنی له سرچینی څخه یی په دې ټکي برید وي یا دا ټکی په نڅښه کړای شي یا یې د غشي څوکه د دې ټکي په لور لوریزه وي.

یادونه : ما وکتورونه a, b بنسټولي، ښه به یې $\vec{a}, \vec{b}; \dots$ وای، ډیرو کتابونو کی پند $a, b, \dots$ لیکل شوي، خو ما د وکتور سره تل د وکتور کلمه یاده کړې، چی د ناتیکیو هڅو څخه مو ژ غوري.

پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه a چی د یوه مطلقه ارزښت $|a|$ چی داوردوالي کچګڼ یی هم (بولو) او یوې لورې له مخی ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي.

(لنډ: یوه لویه چی لور ولري، وکتور دی. موږ کړی شو چی دې لویی ته غشی هم وواږو. زه یی همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کي د یوه لور لرونکی کرښی (غشي) په څیر انځور کیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخی ټول مساوي اوږده او په یوه لور لوری، لوریزې- یا لورونی کرښي همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدتکي باندې تړل یی په نظر کي نه دي نیول شوي . سړی ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کی په خوښه غبرګ (موازی) وخوځول شي یا راکښل شي، موږ په راتلونکي کی د داسی ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوي لویی، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوټو هم اړه لري. د بیلګي په توګه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیر لیکي یا بهتره برید لیکي په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي (په غبرګ یا موازی راکښون یی تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندې غږیږو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردینات سیستم په سرچیني (د برید - یا حملی ټکی) پورې تړلی. داسی وکتورونه ځای وکتورونه (په ځای تړلي -) بلل کیږي . ځنی په لاندې کی د فرمول بندي شوي شمیرقاعدي له مخي کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :

دوه وکتورونه a او b برابر بلل کیږي $a = b$

که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور یو په بل سر وخوري یا پریوځي.



Bild 17.1

کاکه

ټولې برابرې اوږدې او برابرې - یا همغه لوریزې کرښی، لکه چی ویل شو همغه وکتور ښایی.

پیژند ۱۷ . ۳ :

یو وکتور $\mathbf{a}$ د مطلقه ارزښت $|\mathbf{a}|=0$ سره 0 یا صفر وکتور بلل کیږي. صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور $\mathbf{ea}$ چی د $\mathbf{a}$ لور او مطلقه ارزښت $|\mathbf{e}|=1$ لري، نو په وکتور $\mathbf{a}$ پورې اړوند یوونو وکتور (۱) بلل کیږي.

Einheitsvektor, unit vector (1) یوونو وکتور یانې ارزښت یې یو یوون دی یا واحد وکتور (؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوگونال (Orthogonal) بلل کیږي، که دوي یو په بل نیغ ولاړ (عمود) ولاړ وي، کولینار (kollinear) بلل کیږي، که دواړه د همغی یوې کرښې سره غبرگ وي، کومپلنار (komplanar) بلل کیږي، که د همغی یوې هواړې سره غبرگ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبي سیستم ته اړتیا حس کیږي، دلته هوايي یا فضايي کارتیزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د کواوردینات سیستم انځورونولپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د وکتور ځله ونه یا ضرب د یوه ریيل گڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}, \lambda \in R$$

یو وکتور دی چی د $|\lambda|$ - ځله ده مطلقه ارزښت لري او د $\lambda > 0$ لپاره همغه لور لري لکه $\mathbf{a}$ ، په څټ یا برعکس که $\lambda < 0$ وي نو د $\mathbf{a}$ مخامخ لور یا په څټ لور لري

جمله ۱۷ . ۱ :

د ریيل گڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدي کوموتاتیف قاعده، اسوخیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda; \dots \text{Kommutativ}$$

$$\lambda(\mu \cdot \vec{a}) = \eta(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \mu \cdot \vec{a}; \dots \text{Ass.}$$

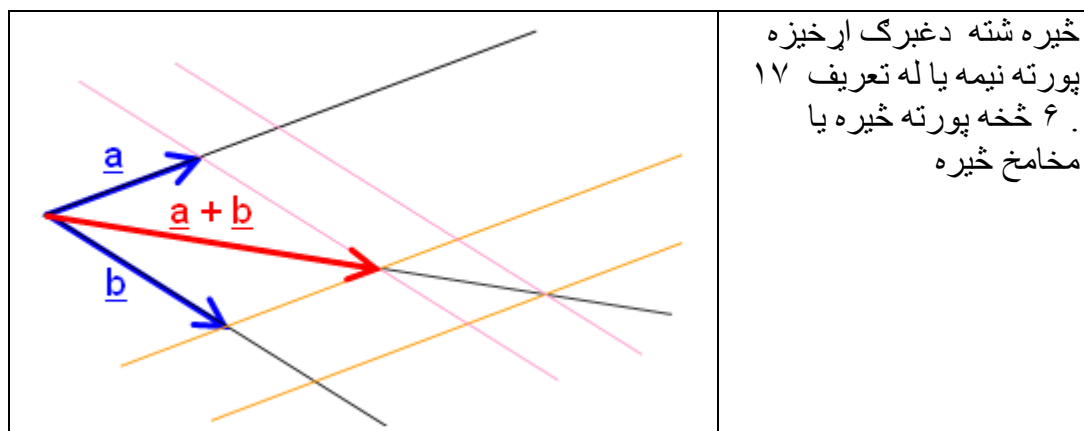
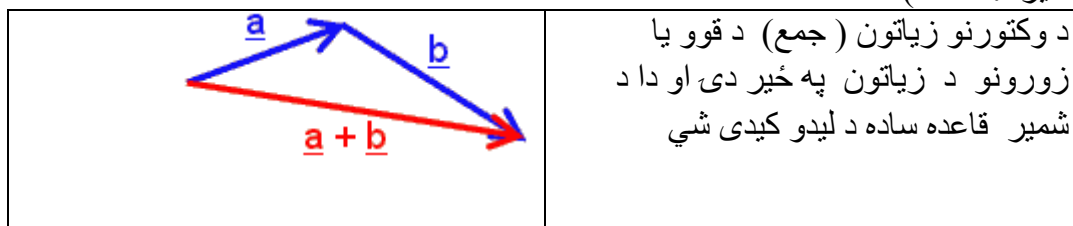
$$|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|, 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}, \vec{0} = 0$$

ددې ځل یا ضرب د پیژند سره ممکن کیږي چې هر وکتور a د یوه ریښل گڼ (ددې وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پوری تنظیم یا ترتیب شوی یوونوکتور د ځل په څیر انځور کړو: $a = |a|e_a$

پیژند ۱۷ . ۶ :

(د وکتورونو زیاتون)

د دوه وکتورونو a, b زیاتون (جمع) $a+b$ د دواړو وکتورونو a او b څخه غزیدلی غبرگ اړخیزې (موازي الاضلاع) لوریز دوه کونجترې (قطر) ده. څیره . ۱۷ (۲)



جمله ۱۷ . ۲ :

(د وکتورونو د جمع لپاره د شمیر قاعدې)

$$a+b=b+a$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

(کوموتایف قانون)

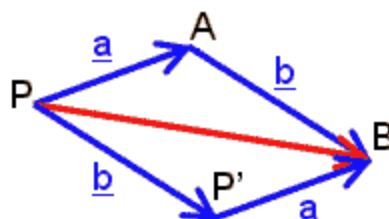
(اسوسیایف قانون)

دیسټریبوتیو او وربسي په لاندې نظم اړیکي

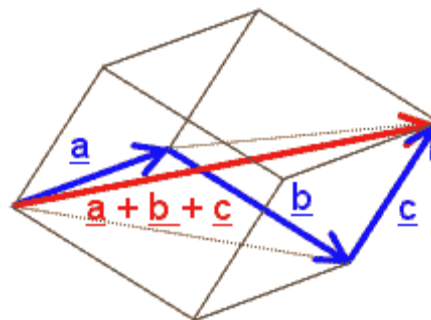
$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}; \dots \dots \dots \text{Distrib.}$$

$$\mu(\vec{a} + \vec{b}) = \mu \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}; \dots \dots \dots \text{Distr.}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$



د زیاتون دې قانونو سره موږ ته ممکن کیږي چې هر وکتور، د بیلگې په توګه د وکتورونو د کواورډینات محور په لور ښودونکو وکتورونو د زیاتون په څیر انځور کړای شو یا ولیکو. په دې ډول بریالي کیږو چې دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره یا هدفمنده شمیرنه په کواورډینات سیستم کې انځور کړو



پورته څیره کې د درې وکتورونو زیاتون

پیژند ۱۷ . ۷ :

په کواورډینات سیستم کې د وکتور a انځورونې لاندې

$$a = (a_1, a_2, a_3) \quad (17.1)$$

موږ په یوه ولاړکونجیز

$$-x_1, x_2, x_3$$

کواورډینات سیستم کې د وکتور انځوره ونه پوهیږو، د نخښې یا مخ نخښې په نظر کې

نیولوسره او د a_i پرویکشن یا پریوسټون له لارې په هر x_i - محور ($i = 1, 2, 3$)

پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په څیره ۱۷ . ۳ کی) داسی a_i د a وکتور i - م کواوردینات بلل کیږي

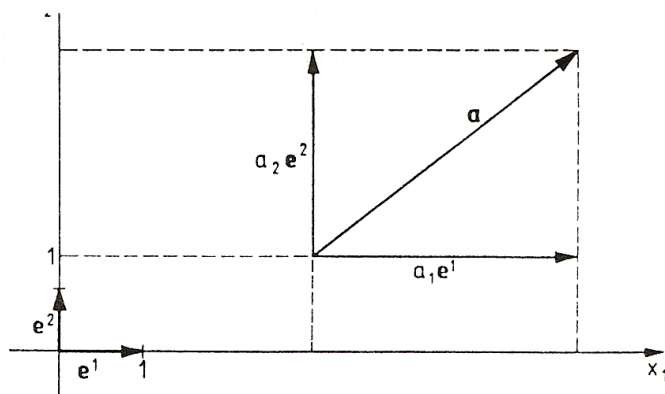


Bild 17.3

یادونه:

موږ دلته که د وکتورونو پورته څه لیکو نو هغه د وکتور پوټنڅ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور بنایي چی په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لوري پوره جوت دی. د x_i - محورو په لور په کواوردینات شکل د یوونو وکتورونو څرگندونه په لاندې ډول ده

$$e^1 = (1, 0, 0)$$

$$e^2 = (0, 1, 0) \quad (17.2)$$

$$e^3 = (0, 0, 1)$$

د وکتور a انځورونه د کواوردیناتو $a^i; i = 1, 2, 3$ او د یوونو وکتورونو (۱۷ . ۲) د استعمال له لاري، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لاري یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لاري د وکتور a انځورونه) لرو:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}^1 + a_2 \vec{e}^2 + a_3 \vec{e}^3; \dots (17,3)$$

د دوه پراخیدوني یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزین انځورونه. (څیره ۱۷ . ۳) دلته، $a^i e^i$ چی $i=1,2,3$ وي، د a وکتور i - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیري د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشی:

جمله ۱۷ . ۴:

د رییل گڼ سره د یوه کتور ځله ونه او یا د وکتورونو زیاتون کواوردینات ډوله یا په څیر صورت نیسي، دا په دې مانا چې لاندې باوري کيږي:

$$a = (a_1, a_2, a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\mu a = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) \quad (17.4)$$

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \dots (17,5)$$

بیلگه ۱۷ . ۱:

د $a = (-2, 3, -5)$, $b = (1, -6, 4)$ لپاره لرو

$$2a + 3b = (2(-2), 2(3), 2(-5)) + 3(1, -6, 4) = (-1, -12, 2).$$

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زیاتون په څیر (تعریف ۱۷ . ۶) صورت نیسي یا ځان نیسي

پیژند ۱۷ . ۸:

د $a - b$ کمون یا کمښت د وکتور a او وکتور b ته مخامخ - یا په څټ وکتور یعنې $-b$ زیاتون دی: $a - b = a + (-b)$ (څېره ۱۷ . ۴)

له تعریف ۱۷ . ۸ لاس ته راځي: وکتور a ، کوم چې له x_1 ټکي x_2 ټکي ښايي (د دوه اړخونو یا بعدونو انځورونې لپاره ش ۱۷ . ۵) داسې دی (پای ټکی ترې کم پیل ټکی یانې د پایټکي او پیلټکي کمښت): $a = x_2 - x_1$

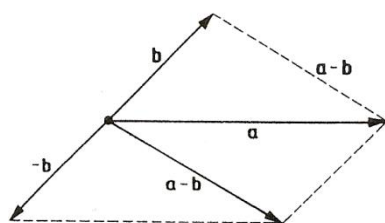


Bild 17.4 څېره

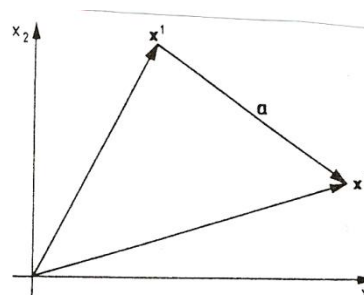


Bild 17.5 څېره

بیلگه ۱۷ . ۲:

هغه وکتور چی له $x^1 = (-1, -3, 1)$ ټکي څخه $x^2 = (2, -1, 5)$ ټکی بنایي (په گوته کوی یه گوتهوونی کوي) داسی دی :

$$a = x^2 - x^1 = (2, -1, 5) - (-1, -3, 1) = (3, 2, 4).$$

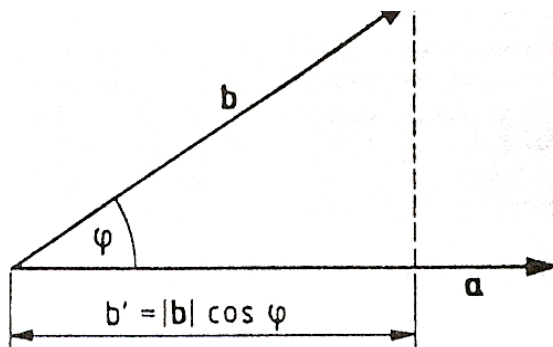
۱۷. ۲ د دوه وکتورنو سکالار ځله ونه یا ضربونه

پیژند ۱۷. ۹ :

د دوه وکتورونو a, b سکالار ځل $a \cdot b$ د دواړو وکتورونو د مطلقه ارزښت او له دې دواړو وکتورونو منځ ته راغلی کونج کوساین ځل یا ضرب دی، یانې

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi; \dots\dots\dots (17, 7)$$

د سکالار ځل یا ضرب نتیجه سکالار ده
په (۱۷. ۷) کی فاکتور $\vec{b}' = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ په هندسی مانا د (مخ) نڅېني ساتلو سره د کوساین د پیژند له مخی (په وکتور a دوکتور b پرویکشن یا پریونل یا پریستل دي) څیره
(۱۷. ۶)



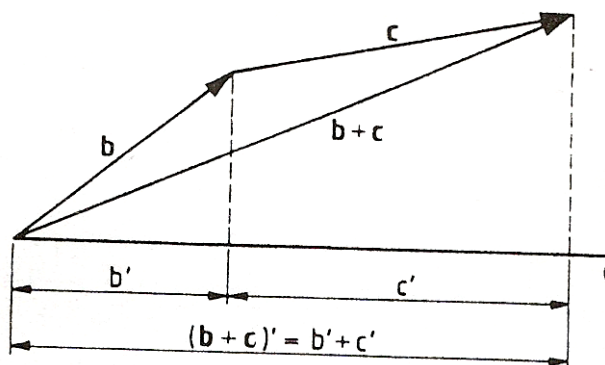
په فزیک کی د سکالار ځل یا- ضرب بیلگه :
که a هغه لار وي چی د هغی په اوږدوالی د b زور تاثیر اچوي، پس $A = a \cdot b$ له دې زور له لارې کړ شوی کار بنایي (د لار اوږدوالی چي د لار په لور د زور د پرویکشن سره ځل دی) .

جمله ۱۷ . ۵ : (د سکالار ځل شمیرقاعدي)
 $a.b = b.a$ (کوموتایو قانون)

(دیستریبوتیو قانون) $a(b+c) = a.b + a.c$
 $a.b = 0$ که a او b یو په بل اور توگونال یا عمود وي (۱۷ ، ۸)
 $a.a = |a|^2$ (۱۷ . ۹)

د پورته شمیرقاعده جوتونه: کوموتایو قانون د (۱۷ . ۷) پسې تړلی لاس ته راځي.
 دیستریبوتیو قانون په (۱۷ . ۷) څیره (۱۷ . ۷) کی لیدل کیږي.

د اور توگونال وکتورونو لپاره باور لري: که $a.b = 0$ نو $\cos \alpha = 0$ او (۱۷ . ۸)
 له (۱۷ . ۷) څخه لاس ته راځي .
 همداول (۱۷ . ۹) له (۱۷ . ۷) او داچې $\alpha = 0^\circ$ د a او a ترمنځ دی، نو لاس ته
 راځي $\cos \alpha = 1$



پورته څیره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :
 د دوه وکتورونو سکالار ځل کو اور دینا تېوله صورت نیسي یعنی د
 $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$
 د ځله ونی یا ضرب څخه لاس ته راځي :
 $a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ (۱۷ . ۱۰)

اوبیونه : دیوونو وکتورونو (۱۷ . ۲) لپاره لاندې باور لري

د (۹ . ۱۷) سره سمر د $i = j$ لپاره $e^i \cdot e^j = 1$ د (۹، ۱۷) سره سم د $j = i$ لپاره $e^i \cdot e^j = 0$ له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 e^1 + a_2 e^2 + a_3 e^3)(b_1 e^1 + b_2 e^2 + b_3 e^3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

یادونه : دلته د وکتورونو په توانډول چی څه لیکل کیږي د توان مانا نه لري په یوونو وکتورونو کی ددې لارې بشوول کیږي چې دا دکوم کواو دینات یوون وکتور دی او د نورو وکتورونو لپاره دا مانا لري چې کوم یو وکتور مو مطلب دی او نه چی په کوم توان دی ته د مخه هم گوته نیول شوې ده.

بیلگه ۱۷ . ۳ :

وکتور (۱، ۲، ۳) $a = (2, -3, 1)$ دې له لاندې وکتورونو سره ځل شي

$$a) \quad b_1 = (3, 1, 4), b) \quad b^2 = (3, 2, -2), c) \quad b^3 = (3, 3, 3)$$

اوبونه یا حل: بیا یا اینیتریت

$$a) \quad a \cdot b_1 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7$$

$$b) \quad a \cdot b^2 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = -2$$

$$c) \quad a \cdot b^3 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 0$$

دلته c) په دې مانا ده چی وکتورونه a او b^3 اورتوگونال یا عمود دي ددې لپاره لیکو:

$$a \perp b^3$$

جمله ۱۷ . ۷ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \dots \dots \dots (17, 11)$$

اوبیونه : له (۱۷ . ۱۰) لرو : $a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

بیلگه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو (۳، ۰، ۴) $b = (3, 0, -4)$, $a = (2, -3, 1)$ مطلقه ارزښت (اوږدوالی) دی

$$|\vec{b}| = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو a او b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کیږي

$$\cos \phi = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}; \dots \dots \dots (17, 12)$$

اوبیونه یا حل : $(۱۲, ۱۷)$ له $(۷, ۱۷)$ ، $(۱۰, ۱۷)$ او $(۱۱, ۱۷)$ څخه لاس ته راځي

بیلگه ۱۷ . ۵ :

په بیلگه ۱۷ . ۳ کې د $\vec{a} \wedge b^1, b^2, b^3$ تر منځ کونجونه د شمیرلو دي. اوبیونه:

$$\phi_1 = \angle(\vec{a}, \vec{b}^1) = \frac{2.3 - 3.1 + 1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0.3669; \phi_1 = 68.48^\circ$$

$$\phi_2 = \angle(\vec{a}, \vec{b}^2) = \cos \phi_2 = \frac{2.3 - 3.2 + 1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0.1296, \phi_2 = 97.45^\circ$$

$$\phi_3 = \angle(\vec{a}, \vec{b}^3) = \frac{2.3 - 3.3 + 1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} = 0, \phi_3 = 90^\circ$$

۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري حلونه یا حل

پیژند ۱۷ . ۱۰ :

د دوه وکتورونو a, b وکتور $\vec{c}$ یا وکتوریز حل یو وکتور c دی د کوم لپاره چې لیکو $a \times b = c$ او لاندې خویونه لري:

۱ - د c مطلقه ارزښت دی

$$|c| = |a||b| \cdot \sin \phi; \dots \dots \dots (17, 13)$$

دا د هندسي له مخې د a او b وکتورونو لخوا غزیدلي غبرگ اړخیز منځه‌واري په مانا دی. (څ. ۱۷ . ۸)

۲- د c وکتور a او b باندې نیغ ولاړ یا اور توگونال دی.

۳- دلته c, b, a یو بني سیستم جوړوي، دا په د مانا چې که د بني لاس غټه گوته او د بنوولو گوته د a او b لور وښايي نو کونج جوړونکي د منځ گوته دوکتور c - لور وښايي (څیره ۱۷ . ۹)

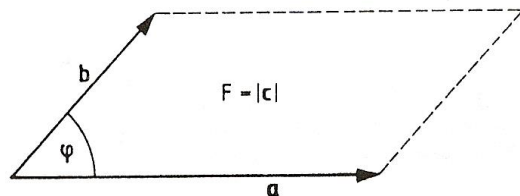


Bild 17.8

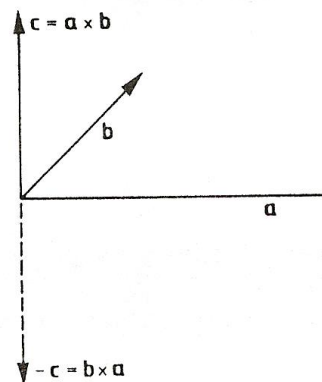


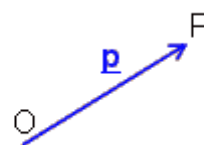
Bild 17.9

دا لاندې څیړي د فرمولونو سره موږ ته ټکی، کرښه او هواره را په گوته کوي او د یوه وکتور مطلقه ارزښت.

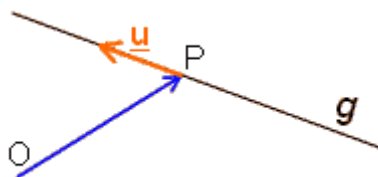
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی $P(p_1|p_2|p_3)$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

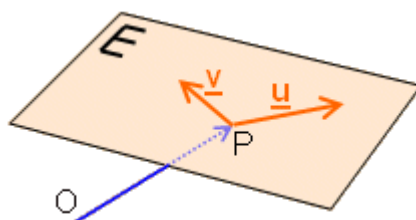


کرښه g



$$g: \underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$$

هواره E



$$E: \underline{x} = \underline{p} + r \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$$

وکتورخله ونه یا وکتور خُل یواځي د درې اړخیزې هوايا فضا لپاره تعریف دی.

د وکتور خُل بیلگه په فزیک کی :

که F قوه یا زور وي چي په یوه کله څرخیدونکي بدن (جسم) د Q په ټکي د r په مړوند چي د r سره کونج جوړوي، برید یا حمله کوي او هغه د P په ټکي څرخوي (څیره ش. ۱۷ . ۱۰) نو څرخون مومنت Drehmoment منځ ته راځي $M = r \times F$

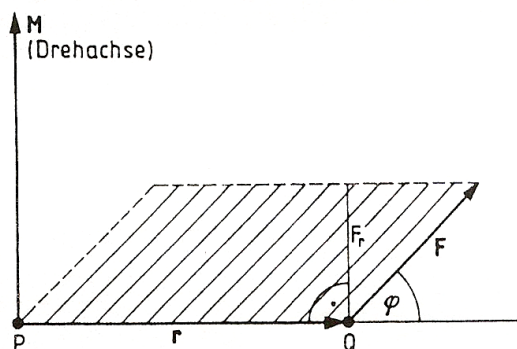


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخی د څرخونمومنت د اوږدوالی $|r|$ د اړم مټ او مطلقه ارزښت

$$F_1 = |F| \sin \phi$$

چی د اړم په مټ (نیغ) ولاړ د قدرت یا قوت زور کپوننت (جوړونکی) دی:

$$M = |r| |F| \sin \phi$$

جمله ۱۷ . ۹: (د وکتور ضرب لپاره د شمیر قاعدې)

$$a \times b = -b \times a \quad (17.14)$$

دیسټریبوتیو قانون)

$$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c) \quad (17.15)$$

$$a \times b = 0 \quad \text{د کولینیار وکتورونو لپاره} \quad (16.17)$$

د پورته شمیر قاعدو بڼه څرگندونه یا توضیح: (۱۷ . ۱۴) د غوښتونکي بڼې سیستم له

مخې (پیژند ۱۷ . ۱۰، ۱۷ . ۹)

د کولینیار وکتورونو لپاره $\phi = 0$ پس لرو: $\sin \phi = 0$ له دې سره د (۱۷ . ۱۳) له مخې)

(۱۷ . ۱۵) لاس ته راځي. په دیسټریبوتیو قانون په لیدنوالي (پیچي دی) دلته صرف نظر

کیري، لیدور والی یی نه څرگندوو. د وکتور ځل شمیرلو لپاره د وکتور کواوردیناتونه

ښودنی سره د یوون وکتورونو e^1, e^2, e^3 وکتور ځل ته اړیو. (۱۷ . ۱۵) شمیر قانون

له یوې خوا او له بلې خوا د وکتور ځل پیژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته

راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰ (د یوون وکتورونو وکتور ځل)

$$e^i \times e^i = 0, i=1,2,3; \dots \dots \dots (17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2; \dots \dots \dots (17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2; \dots \dots \dots (17,17)$$

د دریمې درجې دیترمینانت کلیمې لاندې (پیژند ۱۱ . ۲) او که څوک یوون وکتورونه

د دیترمینانت د توکو په څیر ومنلی شي، کیدی شي چې د وکتور ځل $a \times b$, b

کواوردیناتو په څیر انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱: د وکتورونو

$$b = (b_1, b_2, b_3), a = (a_1, a_2, a_3)$$

وکتوریز ځل یا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتریکس په توګه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix}; \dots \dots \dots (17,18)$$

$$\text{اوبیونه یا حل : د وکتور } a = (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3) \text{ خُل د وکتور } b = (b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3)$$

د توکوډوله (توګي په توګي) وکتوري خُل د جملې ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي

$$a \times b = e^1(a_2b_3 - a_3b_2) + e^2(a_1b_3 - a_3b_1) + e^3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

دا ضرب ارزښه په دا لاس ته راوړنه یا نتیجه د دیترمینانت (۱۸ . ۱۷) د شمیرلو او د پېژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بیلګه ۱۷ . ۶:

$a \times b$ دې وشمیرل شي، که وي

$$\text{(الف) } a = (-2, 1/2, -1), b = (1/2, -2, 1)$$

(ب)

$$a = e^1 - 3e^2 + e^3, b = -e^1 - 2e^2 + 3e^3$$

اوبیونه یا حل (الف) (ب) د دې بیلګې اوبیونه دې ګان لستونکي او مینه وال په غاړه واخلی، دا له مخه تیري جملې له مخې پوره روښانه دی.

وکتوري خُل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهمیت په بنسټ د وکتورونو a , b څخه خورې شوي منځه واري F_p غیرګ اړخیزه همدابول د a او b څخه خور شوي یا غزیډلي دریګوډی منځه واري F_D شمیرلو لپاره خورا مساعد دی . باور لري

$$F_p = |a \times b|; F_D = \frac{1}{2} |a \times b|; \dots \dots \dots (17, 19)$$

بیلګه ۱۷ . ۷ :

د وکتورونو $a = (1, 1, 0)$, $b = (2, 0, 1)$ څخه خورې شوي هوارې منځ یا دننه په لاندې ډول ده

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 110 \\ 201 \end{vmatrix} = (1, -1, -2), F_p = |a \times b| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

بیلګه ۱۷ . ۸ :

د دریګودی ABC منځهواره (د هوارې دننه) دې وشمیرل شي چی کونجټکي یې وي :

$$A=(2,1,1) , B=(4,0,0) , C=(1,-1,2)$$

ابیوني :

دریګودی له لاندې وکتورونو څخه غزیږي

$$a=B-C=(3,-1,-2),$$

$$b=A-C=(1,2,-1) \text{ او}$$

د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دی

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 31-2 \\ 12-1 \end{vmatrix} = 3e^1 + e^2 + 5e^3 = (3,1,5)$$

د دریګودی ABC د هوارې دننه یا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D = \frac{1}{2} |a \times b| = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 1 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{35}$$

۱۷ . ۴ شپات ضرب (غبرګهواریز ځل موزی سطحیز ضرب)

یادونه : دا یو شپږ خوايیز تن دی چی مخامخ هوارې یی سره غبرګی او یو په بل ضرور نیغ ولار نه وي . لاندې شکل ۱۷ ۱۱ . یی بیلګه او د مسئلې دحل انځورونه ده

پیژند ۱۷ . ۱۱ :

د درې وکتورونو غبرګهواریز ځل یا شپاتځل [a , b , c] لاندې ځل یا ضرب دی

$$[a,b,c]=(a \times b) \quad (17 . 20)$$

دلته وکتورونه a او b وکتوریز ځل کیږي او نتیجه یې بیا د c سره سکالار ځل کیږي، یعنی لاس ته راوړنه یا نتیجه یې سکالار ده.

غبرکهوریزخل ځمکچیز هندسي لیدونکی اهمیت لري. د سکالارځل (پیژند ۱۷ . ۹) سره سم باور لري

$$[a, b, c] = (a \times b) \cdot c = |a \times b| \cdot c = |a \times b| \cdot |c| \cdot \cos \alpha$$

دلته الفا د وکتورونو $a \times b$ او c څخه رابند شوی کونج دی. (څیره ۱۷ . ۱۱)

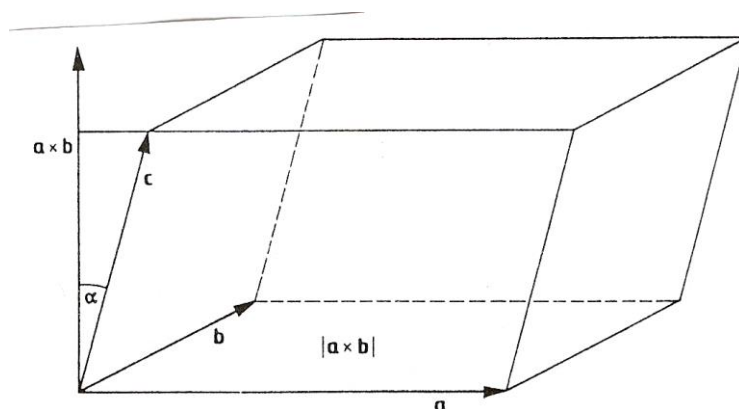


Bild 17.11

دلته د وکتورځل تعریف سره سم (پیژند ۱۷ . ۱۰) د $|a \times b|$ او b غزیدلي غبرگ اړخیز دی. برسیره پر دې $|c| \cdot \cos \alpha$ پرتله برخه ۱۷ . ۲ (په وکتور $a \times b$ باندې د وکتور c پروجکشن یا پریوستون په مانا دی. یعنې د a, b او c څخه غزیدلی غبرگهوری یا

شپات جگوالی بنایي. پس $[a, b, c]$ هندسي د وکتورونو a, b, c څخه غزیدلي غبرگهوریزې ډکي (حجم) په مانا دی.

دغبرگهوریز په مطلقه ارزښت (د غبرگهوریز ډکي یا-حجم) کی تغیر نه راځي که چیرې د وکتورونو پرلپسې ترتیب بدل شي. د غبرگهوریزې ډکي زیاتیز یا مثبت دی، که ورکړ شوي ترتیب یو بنی-سیستم جوړ کړی.

جمله ۱۷ . ۱۲۰:

$$[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b] = -[a, c, b] = -[c, b, a] = -[b, a, c] \quad (17.21)$$

که وکتورنه په یوه هواره کی پراته وي (کومپلنار وي) نو یو شپات د صفر جگوالی سره لاس ته راځي. نو بیا لاندې جمله باور لري

جمله ۱۷ . ۱۳:

$$[a, b, c] = 0 \text{ د کومپلاناړ وکتورونو لپاره باور لري (22 . 17)}$$

د غبرگهواریز یا شپات ځل شمیرلو لپاره د وکتورونو په کواور دیناتتوگه انځورونه بیرته دیترمینانت انځورونه په کار اچول کيږي

جمله ۱۷ . ۱۴:

د وکتورونو

$$a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3)$$

غبرگهواریز ځل په لاندې ډول دی

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}; \dots\dots\dots (17, 23)$$

اوبیونه : وکتور ځل $a \times b$ د جملې ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري

$$a.b = (a_2b_3 - a_3b_2)e^1 - (a_1b_3 - a_3b_1)e^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e^3$$

د $a \times b$ سکالار ځل د c سره کواور دیناتتوله په لاندې توگه صورت نیسي.

$$(a \times b).c = [a_2b_3 - a_3b_2, -(a_1b_2 - a_2b_1), a_1b_2 - a_2b_1].(c_1, c_2, c_3) \\ = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - \\ a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

دا نتیجه د دیترمینانت (۱۷ . ۲۳) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلگه ۱۷ . ۹:

$$a = (0, 1, 2), b = (2, 0, 1), c = (1, 1, 0) \text{ د وکتورونو}$$

غبرگهواریز - یا شپاتځل $[a, b, c]$ په لاندې ډول دی:

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0(0 - 1.1) - 1(0 - 1.1) + 2(2.1 - 0) = 5$$

بیلگه ۱۷ . ۱۰ :

وکتورونه $a=(1,2,3)$, $b=(3,6,1)$, $c=(0,0,1)$ کومپلنار دي او شپاتځل يې په لاندې ډول دی (دا اوبیونه دي گران لوستونکي او مینه وال په غاړه واخلي)

بیلگه ۱۷ . ۱۱ :

د تیترايد (دریگودي اړخیزه ، لاندې شکل دی) ډکی (حجم) دي وشمیرل شي (خیره. ۱۷ . ۱۲)

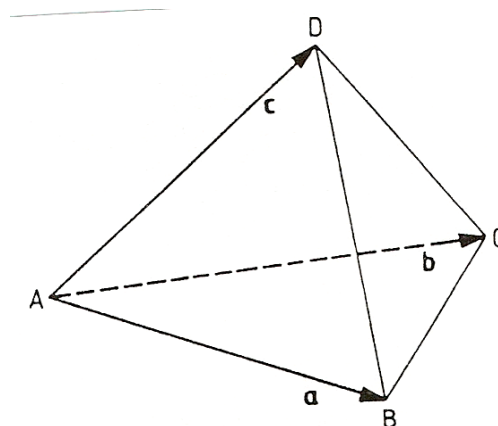


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو یا گودټکو سره

$$A=(1,1,0), B=(2,0,1)$$

$$C=(3,-1,2), D=(1,0,3)$$

یادونه : دا پورته په خټه کې ککرتکي دي، ځکه چې دا څیره څلور ککری لري اوبیونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو څخه خور تیترايد $6/1$ برخه ده

$$a=B-A=(1,2,0), b=C-A=(2,1,0), c=D-A=(0,1,2)$$

دا تیترايد يو اهرام دی چې ډکی یا حجم يې $3/1$ ځل بنسټيزهواره ځل جگوالی د تیترايد جگوالی د شپات جگوالي سره مساوي دی او د دریگودیهواره يې د شپات نیم د وکتورونو a, b, c کمیز یا منفي دی

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} 110 \\ 201 \\ 012 \end{vmatrix} = -5$$

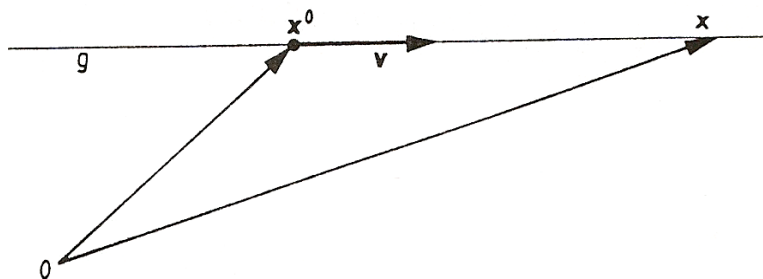
د کچګن لپاره مطلقه ارزښت نیول کیږي: $V = (1/6) \cdot |[a, b, c]| = 5/6$

۱۷. ۵ په شننیزه (تحلیلي) ځمکچ کی د وکتورونو کارونه

په دې برخه کی ځمور هدف دی چی وګورو چی د تحلیلي هندسی پرابلمونه او بیا په ځانګړي ډول تحلیلي هندسي په هوا کی وکتوري مطالعه (د ۱۶ - برخي سره په توپیر) څنګه کیږي.

۱۷. ۵. ۱ د یوې کرښې وکتوریزه انځورونه

په فضا یا هوا کې د یوې کرښې ځای د یوه ټکي او لور له لاری یواځنی ټاکلی دی. په کرښه g دې نښتې ټکي د ځای وکتور x_0 په مرسته (چی د کواور دینات سیستم د O څخه دا ټکی ښایي)، لور یې په وکتور V (څیرې ۱۷. ۱۳



څیره ۱۷. ۱۳

که λ یو پارامتر وي چی د رییلګنونو ډیری کی ځغلي، نو د کرښې g یو په زړه پور ټکی x د وکتور زیاتون یا - جمع له لاری په لاندې فورم (ښه) ښوول کیږي

$$x = x_0 + \lambda \cdot V, -\infty < \lambda < \infty; \dots \dots \dots (17, 24)$$

د وکتور V په لور په ټکي x_0 کی د کرښې g برابر و (پارامتر فورم) که پارامتر λ په ریل ګنونو کی وځغلي نو x د کرښې ټولو ټکو کی یا د ټکو ترمنځ

خُغلي. د هر ټکي $x \in g$ لپاره یواځني یوه $\lambda \in R$ شته یا موجود ده وکتور مساوات

(۱۷ ، ۲۴) لاندې درې سکالار برابر ونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v; \dots (17, 25)$$

که کرښه g په دوه ټکو x_0, x^1 ورکړ شوي وي، نو د لور وکتور یی دی $v = x^1 - x^0$ او په

دې ډول یی د کرښې برابر ونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0); \dots (17, 26)$$

بیلگه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندې ټکو $x_0 = (1, 2, 3)$, $x^1 = (1, 3, 2)$ ورکړ شوې کرښه د $v = x^1 - x^0 = (0, 1, -1)$

له امله په لاندې توگه لیکل کیږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, -1)$$

دا لاس ته راوړنه یا نتیجه موږ ته لاندې درې سکالار برابر ونونه په گوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

د کرښې برابر ونونو (۱۷ . ۲۴) پارامتر فورم په هواره کی د کرښې ځانگړی حالت

خوندي لري: x, x_0 او v وکتورونه دي، هر یو د دوه کومپوننتو سره.

بیلگه ۱۷ . ۱۳ :

په یوې هوارې کې د یوې کرښې د مساواتو فورم:

$$x = (1, 2) + \lambda(1, -1) \quad x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda \quad \text{په گوته کوي.}$$

له دې څخه سړی کولی شي چی پارامتر λ له منځه یوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د x_1 په ځای x او د x_2 په ځای y ولیکو نو لاس ته راځي $y = -x + 3$ د

کرښې د برابر ونونو نور مال فورم (۱۶ . ۲) . که غواړو چی معلومه کړو چی ایا ټکی

x^1 په کرښه g پروت دی، نو باید وڅیړو چې کواوردینات یی برابر ون (۱۷ . ۲۵)

پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چی ایا دده لپاره یو د λ - ارزښت موجود دی .

بیلگه ۱۷ . ۱۴ :

لاندې ټکي $x^1 = (-1, 4, 3), x^2 = (2, -2, 1)$ په کرښه $g : x = (1, 0, 1) + \lambda(-1, 2, 1)$ پراته دي که نه ؟

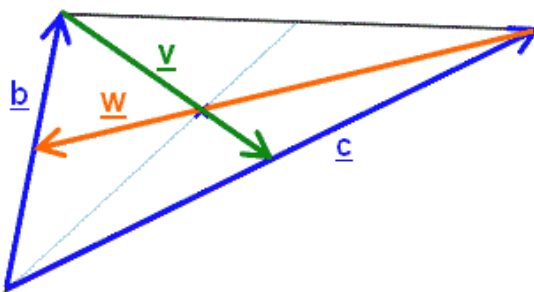
اوبیونه (۱) د دې درې برابر ونونو $-1 = 1 - \lambda, 4 = 0 + 2\lambda, 3 = 1 + \lambda$ له جملې د دوهم څخه لاس ته راځي $\lambda = 2$ او دا ارزښت لومړۍ او هم دریم مساوات ډکوي پوره کوي $-1 = 1 - 2, 3 = 1 + 2$ له دې امله ټکی x^1 په کرښه g پروت دی.

(۲) د دې درې برابر ونونو $2 = 1 - \lambda, -2 = 0 + 2\lambda, 1 = 1 + \lambda$ له دویم لرو $\lambda = -1$ دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مگر دریم مساوات نه: پس x^2 په کرښه g نه دی پروت.

که دوه کرښو $g_1 : x = x^1 + \lambda v; g_2 : x = x^2 + \mu w$ غوڅټکی x_S ، موجود وي باید د دواړه کرښو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې باید باوري شي:

$$x_S = x^1 + \lambda v = x^2 + \mu w$$

دا وکتور برابر ون درې سکالار برابر ونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه سړی پارامتره $\lambda \wedge \mu$ شمیرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دریم مساوات پوره کړي، نو یو پریټکی مخ ته شته، که ناپای زیات حلونه مخ ته پراته وي ، نو دواړه کرښی یو په بل پرتی دي.



بیلگه ۱۷ . ۱۵ : د لاندې کرښو

غوڅټکی دې پیدا شي :

$$g_1 : x = (1, 1, 0) + \lambda(1, 3, -2), g_2 : x = (1, 2, 2) + \mu(-1, -2, 4)$$

حل یا اوبیونه : غوڅتکي باید دواړه برابر ونونه پوره کړي:

$$1 + \lambda = 1 - \mu, 1 + 3\lambda = 2 - 2\mu, -2\lambda = 2 + 4\mu$$

د درې سکالار برابر ونونو له لومړي مساوت څخه لرو $\mu = \lambda$ ددې له مخې او له دوهم

برابرون څخه لاس ته راځي : $\mu = -1$ نو لرو $\lambda = 1$. په دې ډول دریم برابر ون هم

پوره کيږي د غوڅتکي کواوردینات سیستم د کرښې g_1 د $\lambda = 1$ سره لاس ته راځي:

$$xs = (1, 1, 0) + 1 \cdot (1, 3, -2) = (2, 4, -2).$$

۱۷ . ۵ . ۲ د هواړې یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هواړې E ځای په هوا کی په یوه ټکي x_0 او دوه نا غبرگو وکتورونو v او w یواځنی ټاکلی دی. د وکتورونو v او w پیلټکي کیدی شي په x_0 پراته ونیول شي یا پراته فرض شي) ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴ (.

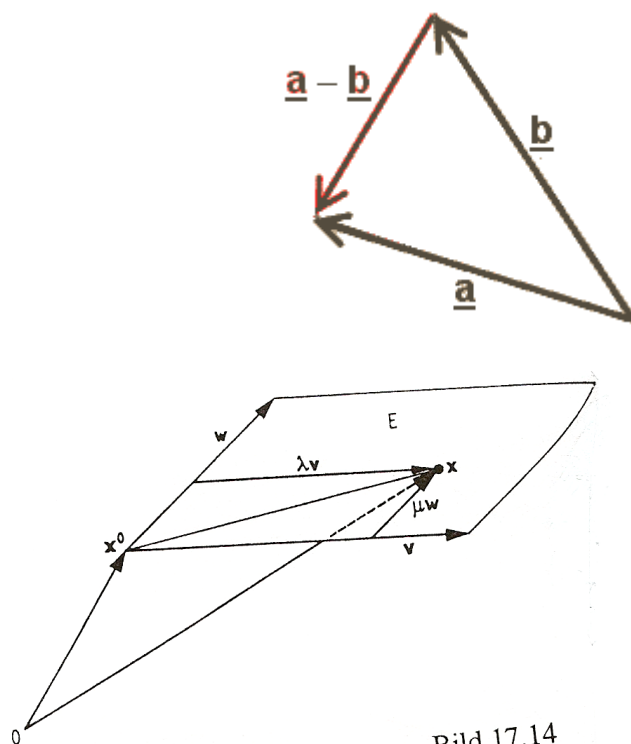


Bild 17.14

په هواره E کې دې x یو په خوښه ټکی وي. نو دا له x_0 و x ته بریدي وکتور $x - x_0$ هم په دې هواره کې پروت دی او وکتورونه n او $x - x_0$ یو په بل نیغ ولاړ دي.

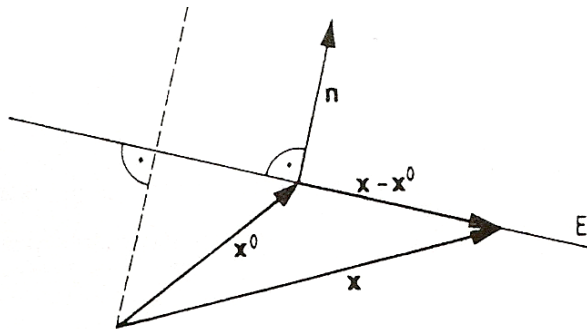


Bild 17.15

په یو بل نیغولارو (اورتوگونال) وکتورونوڅخه جوړ شوي سکالارځل صفر دی څیره
(څ. ۱۷ . ۸ دې برتله شي) دا په دې مانا چی باوري کيږي :

$$n(x-x_0)=0, nx=nx_0=c \quad (17.30)$$

دهواري برابر ونونو سکالار فورم ، n - عمود وکتور ، د هواري x_0 په ټکی.

بیلگه ۱۷ . ۱۷ :

د هواري برابر ون چی ټکی $x_0 = (2, -1, 5)$ په پروت دی او په هغه وکتور $n = (2, -2, 1)$
(نیغ) ولار دی

د $c = nx_0 = (2, -2, 1) \cdot (2, -1, 5) = 4 + 2 + 5 = 11$ له مخې په لاندې ډول دی:

$$(2, -2, 1) \cdot x = 11 \Leftrightarrow 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 11.$$

د هواري مساواتو پارامتر فورم (۱۷ . ۲۷) په یوه سکالار فورم اړول بدلول (۱۷ .
۳۰) د پارامتر د له منځه وړلو له لارې لاس ته راځي.

بیلگه ۱۷ . ۱۸ :

د هواري مساوات دې په پارامتر فورم وي:

$$x = (1, -2, 4) + \lambda(0, 1, -1) + \mu(1, -1, 2)$$

دا وکتور برابر ون لاندې درې سکالار برابر ونونه خوندي لري یا په برکي لري یا

ځایوي:

$$x_1 = 1 + \mu, x_2 = -2 + \lambda - \mu, x_3 = 4 - \lambda + 2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي: $\mu = x_1 - 1$

له دې سره دا نور دوه برابر ونونه داسې دي

$$x_2 = -2 + \lambda - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1 + \lambda \wedge$$

$$x_3 = 4 - \lambda + 2x_1 - 2 \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 2 - \lambda \Leftrightarrow$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

د هوارې برابر ونونو سکالار فورم: $(-1, 1, 1)x = 1$

که غواړو چې څرگنده کړو چې ایا یو ټکی x_1 په هواره E پروت دی چې برابر ون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چې ددې کواور دینات (۱۷ . ۲۸) برابر ون پوره کوي که نه (بیلگه ۱۷ ، ۱۵ : د کرښې مساواتونه ورته) . او یا سړی پارامتر فورم په سکالار فورم بدلوي او څیړي چې د ټکي کواور دینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلگه ۱۷ . ۱۹ :

ایا ټکی $x^1 = (2, -2, 5)$ په هواره $E : x = (1, -2, 4) + \lambda(0, 1, -1) + \mu(1, -1, 2)$

پروت دی ؟

اوبیونه : د لومړي دوه برابر ونونو $2\mu, 5 = 4 - \lambda + 2\mu, -2 = -2 + \lambda - \mu, 2 = 1 + 0\lambda + \mu$

څخه لاس ته راځي $\mu = 1 \wedge \lambda = 1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابر ون پوره کوي: $5 = 4 - 1 + 2 \cdot 1$ ، دا په دې مانا چې x_1 په

هواره E پروت دی. که د هوارې برابر ون په سکالر فورم وپلورل شي: -)

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ بیلگه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي (، نو د ټکي x^1 کواور دینات دې یواځي د

x_1, x_2, x_3 لپاره ځای په ځای شي ، چې معلوم کړو چې x^1 په هواره E پروت دی : -

$$2 + (-2) + 5 = 1$$

د یوې هوارې: $n \cdot x = c : E$ او د یوې کرښې $g : x = x^0 + \lambda v$ ترمنځ غوڅتکی x (که

شته وي) (نو هم په E پروت دی او هم په g له دې امله د هوارې په برابر ونونو کې د x

لپاره $x^0 + \lambda v$ ځای په ځای کوو (ږدو) او په دې ډول یو برابر ون د λ لپاره لاس ته

راځي. که دا برابر ون یواځنی یو اوبی ولري نو غوڅتکی موجود دی ، که اوبی شته

نه وي یا موجود نه وي نو کرښه g د هوارې E سره غبرګه ځغلي، که ناپايي ډیر ي

اوبیوني شته وي نو کرښه g په هواره E پرته ده.

بیلگه ۱۷ . ۲۰ :

د کرښو $g: x = (1, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 1)$ پروت ځای یا موقعیت دې لاندې هوارو ته وټاکل شي:

$$a) \dots x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, b) \dots 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, c) \dots 2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

اوبیونه : دا چی لتونکی غوڅتکی xs د کرښې برابرې پوره کوي نو باوري دي:

$$x_1 = 1 - \lambda, x_2 = \lambda, x_3 = 1 + \lambda$$

$$a) x_1 + 2x_2 + 3x_3 = (1 - \lambda) + 2\lambda + 3(1 + \lambda) = 4\lambda + 4 = -4, \lambda = -2$$

$$x_s = (1 + 2, -2, 1 - 2) = (3, -2, -1)$$

$$b) 2x_1 + x_2 + x_3 = 2(1 - \lambda) + \lambda + (1 + \lambda) = 0. \lambda + 3 = 3$$

لندا λ په خوبښه، g په E پرته ده

$$c) 2x_1 + x_2 + x_3 = 2(1 - \lambda) + \lambda + (1 + \lambda) = 0. \lambda + 3 = 4$$

حل نه شته ، نوکرښه gd سطحې E سره غبرگه ځغلي.

د دوه سطح

$$n^1 \cdot x = c1 : E1$$

او $E2$ هوارې: $n^2 \cdot x = c2$ غوڅکرښه دواړه برابرې ونونه پوره کوي (دا دوه برابرې ونونه دي، هر یو د درې نامعلومو x_1, x_2, x_3 سره). دوه امکانات شته دي چی کرښه g (که شته وي) را پیدا کړی شو.

۱ - سری یوه واریابل یا اووښتونې په خوبښه وټاکي: $x_1 = \lambda$ (ازاد پارامتر)، نور

دواړه $i \neq j, x_j \neq 0$ له دواړو هوار مساواتو څخه په λ کې د کرښیزو افادو یا وینو په څیر راپیدا کوي. او په دې ډول کرښیز مساوات لاس ته راځي.

۲ - سړي د کرښې دوه مختلف ځانگړي ټکي x^0 او x^1 راپیدا کوي او په دې ډول د

$$g \text{ کرښې مساوات لاس ته راوړي: } (x^1 - x^0) \cdot x = x^0 \cdot x$$

بیلگه ۱۷ . ۲۱ :

د دوه هوارو E_1 او E_2 پرېکرښه g غواړو پیدا کړو. هوارې دې وي :

$$E_1: x_1 - x_2 + x_3 = 3, \quad E_2: 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

حل ۱) : $x_1 = \lambda$ په خوبښه

$$E_1: -x_2 + x_3 = 3 - \lambda, \quad E_2: -x_2 - 3x_3 = -2\lambda.$$

کمون یا تفریق : $4x_3 = 3 + \lambda$,

په E_1 کی دې ځاي په ځاي شي : $-x_2 + 3/4 + \lambda/4 = 3 - \lambda$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$ -

نو لاس ته راځي $x_1 =$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$, $x_3 = (1/4)\lambda + 3/4$

په وکتور لیکدود : $x = (0, -9/4, 3/4) + \lambda(1, 5/4, 1/4)$

همداسې ($\Leftrightarrow$) له $\lambda = (1/4)$ سره لرو

$$x = (0, -9/4, 3/4) + \lambda(4, 5, 1)$$

حل (اوبی) ۲ : په E_1 او E_2 ځاي په ځاي کوو : $x_3 = 0$, پس لاس ته

راځي $x_1 - x_2 = 3$, $2x_1 - x_2 = 0$ د لاندې حل سره $x_1 = -3$, $x_2 = -6$,

پس $x^0 = (-3, -6, 0)$ په هوار کې ځانگړی ټکی دی، که ولیکو $x_2 = 0$ پس

له $x_1 + x_2 = 3$, $2x_2 - 3x_3 = 0$ د لاندې حل لرو : $x_1 = 9/5$, $x_3 = 6/5$ او په دې ډول د ه

کرنې g دوم ټکی : $x^1 = (9/5, 0, 6/5)$

په ټکو x^1 , x^0 د کرنې g مساوات (مقایسه ۱۷ . ۲۶) داسې دي

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) = (-3, -6, 0) + \lambda(24/5, 6, 6/5)$$

$\Leftrightarrow$ د $\lambda = (6/5)$ سره :

$$x = (-3, 6, 0) + \lambda(4, 5, 1)$$

دا په حل (اوبی) ۱ کی پیدا شوې کرنې g یو بل ډول انځوردي، ځکه چې د لورو

وکتورونه یو بل ته ورته دي. : $v = (4, 5, 1)$ او د $\lambda = -3/4$ لپاره په حل ۱ کې د

کرنې ټکی د حل ۲ x^0 دا ټکی لاس ته راځي

$$x = (0, -9/4, 3/4) - (3/4)(4, 5, 1) = (-3, -6, 0)$$

تمرینونه؛

۱ - وکتورونه $a = (1, 0, -2)$, $b = (-3, -5, 0)$, $c = (4, -1, 7)$ ورکړ شوي دي.

جوړکړی :

$$-a, a+b, a-c, 2a-b+3c!$$

۲ - وکتور a چې له ټکي $x^1 = (3, -5, 7)$ څخه د ټکي $x^2 = (-2, 4, -1)$ لور ته لارښودوي، څنگه دی؟

۳ - وکتور $a = (3, 21)$ دې پیلټکي $x^1 = (1, 2, 3)$ ولري. وختیږی چې پایټکي x^2 یې کوم کواوردینات لري؟

۴ - لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟

$$a = (4, -3, 12), \quad b = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}), \quad c = (3, 3, 3)?$$

۵ - وکتورونو $a = (2, -1, 3)$, $b = (7, 0, 0)$ پورې اړوند یا مربوط یوونو وکتورونه کوم کواوردینات لري؟

۶ - د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اور توگونالیتي دي وېشول شي؟

$$a = (1, 2, 3), \quad b = (3, 0, -1)!$$

۷ - دلته دې a_1, b_1 او c_1 څومره لوي وي، چې وکتورونه

$$a = (a_1, 3, 2), \quad b = (-4, b_1, 2), \quad c = (3, -2, c_1)$$

په وکتور $d = (2, 1, -3)$ (نیغ) ولاړ وي؟

۸ - د

$$a) \quad a = (-2/3, 1/2, 5/4), \quad b = (3/4, -1/3, 2/3),$$

$$b) \quad a = e^1 - e^2 + e^3, \quad b = 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$$

لپاره دې $a \cdot b$ وشمیرل شي!

۹ - وکتورونه $a = (3, -4, 12)$ او $b = (-6, 8, 0)$ یو له بل سره کوم کونج جوړوي!

۱۰ - د گود-یا کونجټکو

$$A = (-2, 0, 3), \quad B = (-6, 4, -1), \quad C = (4, -1, 2)$$

سره، د دریگودي کونجونه څومره لوي دي؟

۱۱ - وښايي چې وکتورونه $a = (2, 4, -6)$ او $b = (-1, -2, 3)$ یو بل ته کولایني دي!

۱۲ - د

$$a) \quad a = (-4, -1, 3), \quad b = (5, -2, 7)$$

$$b) \quad a = e - e^2 + 2e^3, \quad b = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$$

لپاره $a \times b$ وشمیری!

۱۳ - د دریګو ډی هواره څومره لویه ده، چې کونجونه یې په لاندې توګه راکړ شوي وي

$$A = (-2, 0, 3), \quad B = (-6, 4, -1), \quad C = (4, -1, 2) \quad ?$$

۱۴ - د هغه غبرګ اړخیز هواره څومره لویه ده چې له وکتورونو

$$a = (-3, 2, 1), \quad b = (5, -3, 2)$$

څخه غزیدلي وي ؟

۱۵ - د وکتورونو

$$a = (-2, 1, -3), \quad b = (1, -3, 6), \quad c = (1, 2, -3)$$

څخه غزول شوې غبرګ هوارې کوم ډکۍ یا حجم لري؟

دا نتیجه هندسي روښانه کړی!

۱۶ - څلورګوډي د لاندې ګوډونو (بېټو): څلور اړخۍ [د ادا هوار شکل ده]

$$P_1(2, 1, 4), \quad P_2(0, -1, 2), \quad P_3(-3, 6, 4), \quad P_4(2, 2, 2)$$

سره کوم ډکۍ یا حجم لري؟

۲۳ - د لاندې هوارو

الف (E_1) چې له ټکي $x^0 = (0, 1, 2)$ تیریری او د لاندې وکتورونو

$$v = (0, 2, 1), \quad w = (2, 3, -5)$$

ب (E_2) چې له ټکو $x^0 = (0, 1, 2)$, $x^1 = (2, -3, 4)$ او

ټکي $x^2 = (7, -9, -3)$ څخه تیریری.

پ (E_3 چې د نورمال وکتور $n = (0, 2, 1)$ سره
له ټکي $x^0 = (0, 1, 2)$ تیریری، مساوات څنگه دي؟

۲۴ - له تمرینو ۲۳ الف او ب څخه د هوارې مساواتو سکالارینه څنگه ده؟

۲۵ - ودی خپل شي چی ایا ټکي $x^1 = (1, 3, -6)$ همداسی $x^2 = (5, -5, 4)$ په هواره

a) $E_1: x = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0),$

b) $E_2: 2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ - د کرښو

a) $g_1: x = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1),$

b) $g_2: x = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1),$

c) $g_3: x = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتنخي د هوارې $E: 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$ سره وټاکي!

۲۷ - د هوارو

الف ($E_1: 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$ او $E_2: -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$

ب ($E_1 - 5x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 4$ او $E_2: x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$

غوڅکرښه دي راپیدا شي!

۱۸ پرلپسی او لړۍ پرلپسی (لنډ: لړۍ) (sequences and series)

یا ترادف او د ترادف سلسله

۱۸. ۱ پیل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه یوه یوناني جنگسالار (نوم یی راڅخه هیر شوی، ددې بڅیننه غواړم) د خپلو عسکرو څخه وپوښتل چی ، «دا د ده له مخه کیشپ چی سل متره یی ترمنځ واټن دی، کله نیولی شي، که دی له دې کیشپ سل ځله تیز ولاړ شي؟» دې ته طبعاً د لوستونکو فکر شته چی وخت باید په نظر کي نه وي نیولشوی . ځوابولو ته دې گران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

موږ د دې برخی څیرنی سره لورې شمیرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، ځکه چی موږ د رییل اعدادو یا - گڼونو تعریف سره سم چی هلته مو د اینتروالبنډولو باندې خبرې کړي او په دې توگه مو عدد تعریف کړی دی، د شمیرپوهني لوړه څیره وه. همدا ډول د لاینیزو برابررونو یا - مساواتو شمیرل او داسی نورې پوره دلوړې شمیرپوهني بیلگي لرو، خو دلته دا په گوته کوو چی له دې ځایه د شمیرپوهنی هغه ځای پیل کیري چی شمیرپوهنیز فکر مو په پراخه توگه په کار اچولو ته راهڅوي او له دې امله مو د وړاند نیونه(لنډ: نیونه) یا فرضیه اړینه وه چی دا برخه د لوړو شمیرپوهنو پیل په څیر وښایو یا وبولو.

له دې ځایه هغه اعداد چې موږ ورسره مخ کېږو، ځمور لپاره د څیړنې کيږي چې هغوي یوې پولې (حد Limit) ته هڅه کوي. دا قوانین هم پوره څیړل کيږي چې وروسته بیا په دیفرنځیال شمیرنه کې کار اخستلو لپاره ترې تیریدنه ناشونی ده.

په راتلونکې برخه کې لاندې کنځیپتونه (خیال، چې یو څه څنګه وشي) ځمور لپاره د هڅې وړ ګرځي

- ۱ - د کلیمې لیدوړه یا په خیال کې لږدونکې پیلونه
 - ۲ - د لیدوړوالي یا فکر کې راوړیدونکې د ټولو په غوره شننه (تحلیل)
 - ۳ - د شمیرپوهنیزو پیژندو یا تعریفونو ټیکوالی،
 - ۴ - هغو وړاندنیونو یا فرضیو ته پاملرنه چې د شمیرپوهنې قوانینو د باوریتوب (اعتبار) لپاره وي،
 - ۵ - د پرلپسې شننه، چې پوله ارزښت یې په پام کې ونه نیول شي،
 - ۶ - د ګڼو دندو حل، په ځانګړي توګه د دیفرنځیالولو او اینتګرالولو
 - ۷ - بالاخره د پرلپسې لړۍ چې په لنډه توګه یې لړۍ بولو څیړنه.
- دلته هم د دې موضوع د پوره څیړلو ستونځې په کتاب کې د ځای کموالي له امله شته. داچې دا برخه یوه بنسټیزه برخه ده، نو پیل یې د یوې ساده او پوهوړې بیلګې له لارې کوو چې ماته خورا په زړه پورې هم ښکارېږي.

۱۸. ۲ دګڼونو پرلپسی (لنډ: پرلپسی) یا د اعدادو ترادف کلمه

پیلېلګه :

پای جمعه یا - زیاتون $s = 3+7+11+...+395+399$ څنګه ټاکل کیدی شي؟ کیدی شي چې دا د پوره ستونځو سره د یوګونو ګڼونو یو د بل سره جمعي یا یو په بل زیاتون له لارې وشمیرل شي ترڅو چې د دې اعدادو د ترادف (ګڼونپرلپسی) قانونیت پیدا شوی وي:

هر دوه ګاونډي توکي یوله بله په ۴ + توپیر کيږي یعنې کمون یا کمښت یې ۴ + دی. کیدی شي چې دا کارونه (استعمال) په یوه شکلی او سپماوړ لاره هم مخ ته لاړه شي او دا په لاندې ډول :

که لومړی (۳) او اخر (۳۹۹)، دویم (۷) او له اخر دویم (۳۹۵) دریم (۱۱) او له اخر دریم (۳۹۱) د جمعي اجزا یا زیاتوني او داسې نور سره زیات شي. دا په

دې ټولو حالتونو کې همغه زیاتون ارزښت یا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي یعنې ۴۰۲ .

اوس دې د یوگونو د جمعي اعزاوو د جمعي ارزښت (زیاتوونو زیاتون ارزښت) راپيداشي:

دویم غړی له لومړی غړي داسی لاس ته راځي چی لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او همداسی ورپسې تر n غړي پورې چی دلته و $(n-1)$ ته 4 ور زیاتیږي ، یعنې:

$$n = (n-1) + 4:$$

که له دې لاس ته راوړنی لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنې $399 - 3 = 396$ ، نو ددې کمون سره د $(n-1)$ دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچی $396:4 = 99$ دي، نو باید n او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید 100 گڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توگه 2 زیاتووني یا د جمعي اجزاوي سره زیات شي، نو باید له دې سره $100:2 = 50$ یعنې 50 -ځله زیات 402 ترې لاس ته راشي» له دې امله د ټولو رامنځ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی:

$$20100 = 402 \cdot 50$$

دا لوستونکو ته په روځنی ژوند کې هم څرگنده ده لکه د یو ټولگي د زدکونکو په گڼه (نمره) ترتیب، یا په یوه سیالی یا مسابقه کې د بریالیو ترتیب او داسی نور موجود دي، موږ کوښښ کوو چی دا مسئلې د شمیرپوهنې له لارې وڅیړو او وگورو چی په شمیرپوهنه کې ترادف یا پرلپسی څه شی دي.

یادونه: موږ له دې وروسته د رادف په ځا یواځي ترادف لیکو.

موږ طبعي اعداد یا - گڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، لرو (دلته ټکي ټکي دا مانا لري چی دا پرلپسی ناپای اوږدیږي)

که چیرې دا هر پیدایښتي یا طبعي گڼ په یواځنی یو ریيل گڼ ترتیب شي یا یواځنی

ترتیب ریيل گڼ وښايي یعنې $a_1, a_2, a_3, \dots$ ، نو دلته د طبعي اعدادو او حقيقي

اعدادو تر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچی دلته هر طبعي عدد n په یواځنی حقيقي

عدد a_n ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چی د فنکشن پیژندېږی (تعریفیږی یا تعریفست) دطبعي اعدادو ډیری N ده او ارزښتدیږی یی د حقيقي اعدادو ډیری R ده.

دلته د پرلپسی هر توکی a_n د ځای گڼي (نمرې) n په بنسټ یواځنی ټاکلی، چی n ته په مسلکي نړیواله پیژندل شوې ژبه ایندکس Index (زیات یي Indices)، چې مانا یي : پیژند نڅېنه ده ، وایي. (Index پیژند دڅېنه)

پیژند تعریف: ۱۸. ۱ الف :

د پرلپسی غړو $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ د یو ترتیب قانونیت یا قانونمندی $a_n = a(n)$ لاس ته راځي، که د n لپاره پرلپسی طبعي اعداد 1, 2, 3, ..., k ځای په ځای شي.

پرلپسی کې a_1 د پرلپسی پیل غړی بلل کیږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بیلگی

(دا ورپسې مخ کې بیلگې نورې هم روښانه دي)

$$I-; \dots a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4; \dots; a_{10} = 100, \dots; a_k = k^2; \dots$$

$$| \quad a_n \quad D=N; W=\{ \text{مربع} \} \text{ گڼ دی} \quad \}$$

$$2 - \{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2}; \dots a_{10} = \frac{1}{10}; \dots \{a_k\} = \left\{\frac{1}{k}\right\}$$

$$3 - \{a_n\} = \{(-1)^n\} \Rightarrow a_n = (-1)^n; a_1 = -1; a_2 = 1;$$

$$a_3 = -1, \dots a_{17} = -1; \dots a_{22} = 1$$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدلیدونکی Alternating بلل کیږي

$$4 - \{a_n\} = \left\{3 + \frac{1}{n}\right\}; 4, 3 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{3}, 3 + \frac{1}{4}, \dots a_k = 3 + \frac{1}{k}, \dots, a_n = 3 + \frac{1}{n}$$

د ترتیب – یا نظمقاعدي څخه مختلفې ګڼونپرلپسی یا د اعدادو پرلپسی منځ ته راځي ۰ دا مو په لنډه توګه پرلپسی ونومولی. چی پیژند یی یو ځل بیا دلته په بل ډول رالندوو.

پیژند (تعریف) ۱۸. ۱ :

که هر یو طبیعي گڼه $n=1,2,3,4,5, \dots$ په یوه یو یواځني ریيل گڼ باندې ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب گڼونه $a_1, a_2, a_3, \dots$ یوه د گڼونو پرلپسی جوړوي، چې لنډ پرلپسی یې نوموو او ددې لپاره سړی داسی لیکي: $\{a_n\}$. دې a_n ته د پرلپسی $\{a_n\}$ -م غړی ویل کیږي.

سړی کړی شي چې د ریيلگڼونو یا اعدادو د نمره کولو یا گڼې لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعنې:

$$a_0, a_1, a_2, \dots \text{ یا } a_2, a_3, a_4, \dots \text{ یا } a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$$

گورو چې د پرلپسی لیکلو لپاره ځانگړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا بسیا کوي چې د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لومړي څو غړي ولیکل شي

بیلگه ۱۸. ۱: د بیلگي په توگه لیکو:

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, \dots$$

او د طبیعي اعدادو پرلپسی موخه یا مطلب دی، د جوړولو قانون $a_n = n$ سره، نو

$$\{a_n\} = \{n\}$$

$$\{a_n\}: 1, 4, 9, 16, 25, \dots \Rightarrow \{a_n\} = \{n^2\}$$

دا په دې معنا چې ($\Rightarrow$)

$$\{a_n\}: 2, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5, \dots \Rightarrow$$

$$\{a_n\} = \{(n+1)/n\} \text{ یا په دې مانا چې}$$

$$\{a_n\}: 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \dots \Rightarrow$$

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right\} \text{ په دې مانا چې}$$

$$\{a_n\}: 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots \Rightarrow$$

$$\{a_n\} = \{(n+1)/n\} \text{ یانې په دې مانا}$$

پیل بیلگه:

د شمیر پوهنې یوه ښوونکې لپاره په ښوونځي کې یو ځای تش یا خالي دی. ددې ځای لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کانديد کړي. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چې اوبی یا حل یی کړي:

پنځه گڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور گڼونه باید داسې ور واچوی چې دا گڼون پرلپسې موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخوډیزه شي.

دواړه کانديدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي *

کانديد الف داسې فکر کوي کانديد ب داسې فکر کوي

لومړی گڼ ۱ لومړی گڼ له ۲ څخه په ۱ کوچنی دی: ۱ - 2

دویم گڼ لاس ته راځي، که د لومړي دوم گڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دی :

عدد دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : $2^2 - 1 = 4 - 1$

$$2.1 + 1 = 3$$

دریم گڼ لاس ته راځي که د دوم دریم گڼ له ۸ په ۱ کوچنی دی:

گڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي $2^3 - 1 = 8 - 1$

$$2.3 + 1 = 7$$

۶- ام گڼ لاس ته راځي که د پنځم ۶- ام گڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دی :

گڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو : $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$

$$2.31 + 1 = 63$$

اوم گڼ دی اوم گڼ دی: $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

$$2.63 + 1 = 127$$

گڼ ۸ دی گڼ ۸ دی

$$2.127 - 1 = 255 \quad 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255 \quad \dots\dots\dots)$$

د شمیر پوهنې له مخې دا پنځه له مخه ورکړ شوي گڼونه د یوې پرلپسې لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,$

سره ښایو.

اوس زموږ په دې بیلگه کې داسې لرو: $a_1=1, a_2=3, a_3=7, a_4=15, a_5=31$ که وغوښتل شي چې د دې پرلپسې نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوې قاعده یا لاس ته راوړې قاعده به ورکړي، لکه څنگه چې یو په بل پسې راتلونکي توکي د پخواني او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکي په لاس راځي. ددې تثبیت یا ازمویني وظیفې شمیر پوهنیزه فرمولبندي په لاندې ډول ده:

د گڼو پرلپسی یا د اعدادو ترادف دې د $a_1=1, a_2=3, a_3=7, a_4=15, a_5=31$ سره ورکړ شوي وي. یو جوړښت قانون یا قانونمندی او توکي a_6, a_7, a_8 وټاکي. د دواړو کاندیدانو د اوبیوني یا حللارې کیدی شي چی په لاندې توگه انځور شي:

الف	ب
$a_1 = 1$	$a_1 = 2 - 1$
$= 2.1 + 1 = 3a_2$	$a_2 = 4 - 1 = 2^{2-1} = 3$
$a_3 = 2.3 + 1 = 7$	$a_3 = 8 - 1 = 2^3 - 1 = 7$
.	..
.	$a_6 = 2^6 - 1 = 63$
$a_6 = 2.31 + 1 = 63$	

په ټولیزه (عمومی) توگه لاس ته راځي

$(k \in N)$ م-غری $(k \in N \wedge k \geq 2)$ م-غری

په کوم کی چی په کوم کی چی
د $(k-1)$ - م غري دوه برابره ته 1 زیات شي له $a_k = 2^k$ کم شي

$$a_k = 2^k - 1 \quad a_k = 2.a_{k-1} + 1$$

دواړو کاندیدانو پر ابل سم حل یا اوبی کړ. کله چی د پرلپسی ۲۰ - م غري پوښتنه وشوه ، نو کاندید ب په گټه کی دی . ولی؟

دواړه کاندیدان کولی شي چی د پرلپسی هر په خوښه توکی پیدا کړي، له دې امله دوي دا پرلپسی یواځنی وټاکله. کاندید الف دا پرلپسی داسی حل کوي چی تل باید له مخه غري

څخه ورپسی توکی لاس ته راوړي، یعنی $a_k = 2.a_{k-1} + 1$

دا باید هر د پرلپسی د مخه توکی وپیژني. دې ډول شمیرلو ته د پرلپسی رګورزیو (recursive لاتین، له recure په څې ځغاسته) انځورونه وایی. مګر ب کاندید دا خورا ساده او زر شمیرلی شي، دی چې کوم توکي غواړي پیدا کړي، هغه سملاسي لاس ته راوړی شي يعني $a_k = 2^k - 1$ دې ډول بنوونلار ته ایکسپلیځیت explizite (لاتین خورول، روښانول) یعنی روښانه انځورونه وایی. د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کار وي: د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشمیری، رګورسیو او ایکسپلیځیت. یانی د الف او ب په څیر.

بیلګه:

یوه پرلپسی د $a_1 = 5$ او $a_{k+1} = a_k^2 + 1$ سره ورکړ شوې. ددې پرلپسی لومړنی پنځه توکي وشمیری. حل:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$

$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$

$$a_4 = a_3^2 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلګه :

یوه پرلپسی د $a_1 = 1$ او $a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$ سره ورکړ شوې ده. ددې پرلپسی لومړني پنځه غړي وشمیری. اوبونه:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = a_2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_5 = a_4 \cdot a_3 = 4 \cdot 2 = 8$$

پوښتنې:

د هرې لاندنۍ پرلپسۍ لمرنې ۱۰ غړي وشمیرئ پرلپسې رکورزیو ورکړ شوي

a) $a_1 = 2, a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$

b) $a_1 = 0, a_{k+1} = a_k^2 + 1$

c) $a_1 = 2, a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + 1$

d) $a_1 = 1, a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + 1$

e) $a_1 = 2, a_{k+1} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{2}{a_k} \right)$

f) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$

g) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{k+2} = a_{k+1}^2 \cdot a_k$

h) $a_1 = 1, a_2 = -2, a_{k+2} = a_k : a_{k+1}$

بیلگه:

یوه پرلپسۍ د $ak = k^2/(k+1)$ سره ورکړ شوې ده. د دې پرلپسۍ لومړني پنځه توکي

و شمیرئ

اوبی:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

بیلگه:

پرلپسۍ د $a_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$ سره ورکړ شوې ده. د دې پرلپسۍ ۳-م، ۸-م، ۱۵-م او

۲۰-م توکي و شمیرئ

اوبی یا حل:

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 1}{3} = 0$$

$$a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = 0$$

$$a_{20} = \frac{(-1)^{20} + 1}{20} = \frac{1}{10}$$

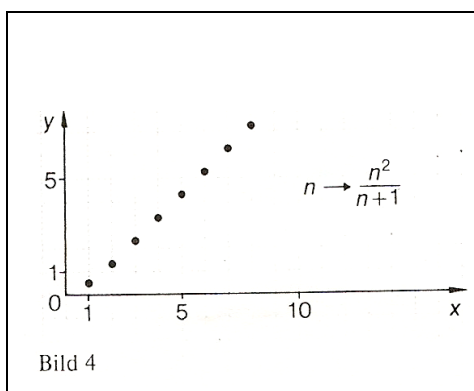
پوښتنی:

د لاندې پرلپسیو لومړني پنځه توکي، ۲۰-م او ۴۵-م توکي وشمیری

$$a) a_k = 2k + 1; b) a_k = k^2 + k; c) a_k = \frac{k^2 + 1}{k + 1};$$

$$d) a_k = \frac{k^2 - 1}{k + 1}; e) a_k = \left(-\frac{1}{10}\right)^{k-1}; f) a_k = 1 - (1/2)^k;$$

$$g) a_k = 1 + (-1/2)^k; h) a_k = 1.2.3...k$$



په کارتيزي کواورديناتسيستم کې د
يوې پرلپسې د گراف انځورونه لاس ته
راوړو، که هر توکی د x -کواوردينات
باندې د پرلپسې هر توکی د توکي نمرې
 k سره کيښودل شي او د y -کواوردينات
باندې هر غړی د غړي د نمرې ak سره
و کښل شي

پوښتنی:

د لاندې پرلپسیو گراف په کارتيزي کواورديناتسيستم کې وکارئ.

له دې ځايه وروسته بيا پيل دی

$$a) a_k = \frac{5k}{k+2}$$

$$b) a_k = 3k + 2$$

$$c) a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{12}{k}$$

$$d) a_k = \sin \frac{k\pi}{2}$$

$$e) a_1 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = 1 - 2a_k$$

$$f) a_1 = 1, a_2 = 1, a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$$

۱۸. ۲. ۱ یو غریزي يا مونوتونی پرلپسی

بیلگه: د غړو $a_k = 2k - 1$

(ما کله کله توکی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسې کې یو غړی د پرلپسې
غړی دی، او د یوې ډیرې یو د هغې ډیرې توکی دی، دې ته به د گرابو لوستونکو پام
وي)

سره پرلپسې هر توکی د مخته تیرشوي توکي لوي دی. دا باور لري:

$a_{k+1} > a_k$ د ټولو $k \in N$ لپاره

حل یا ثبوت :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 1 \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2^k + (2^k - 1) \\ &= 2^k + a_k \\ &> a_k \end{aligned}$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف :

یوه پرلپسی (strictly monotonic increasing) په کلکه – یا کره مونوټون جگیدونکی ده یا کره مونوټون جگيري، که دا لاندې باور ولري :

د ټولو $k \in N$ لپاره $a_{k+1} > a_k$ که د یوې پرلپسی لپاره باوري وي

د ټولو $k \in N^*$ لپاره $a_{k+1} \geq a_k$

نو دلته د مونوټون جگیدونکی monotonic increasing پرلپسی څخه غږیږو

بیلگه :

د پرلپسی د توکو

$$a_k = 10 - 4k$$

سره هر غږی د مخ ته تیر غږي څخه کوچنی دی.

لرو:

$a_{k+1} < a_k$ د ټولو $k \in N^*$ لپاره

اوبونه::

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 10 - 4(k+1) \\ &= 10 - 4k - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (10-4k)-4 \\
 &= ak - 4 \\
 &< ak
 \end{aligned}$$

پیژند (تعریف) ۱۸. ۳ :

یوه پرلپسی په کلکه مونوټونیتېټي ډونکی یا - لویډونکی strictlymonotonic decreasing ده، که لاندې باور ولري:

$$ak < ak+1 \text{ لپاره } k \in N$$

که په یوه پرلپسی کې باور ولري (په پورته کې او همداسې که ورپسې داسې څه راشي کا د ان توکی دی)

$$a1 \leq ak+1 \text{ لپاره } k \in N$$

نو دلته د یو غبریز یا موتون لویډونکی- یا مونوټون ټیټي ډونکی monotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:

د یوې پرلپسې دوه گاونډیو غړو توپیر یا کمون یا کمښت $ak+1 - ak$ ، کوم شرطونه باید پوره کړي، چې دا لاندې صدق ولري

الف (کلکه مونوټون جگیدونکی وي

ب (کلکه مونوټون ټیټي ډونکي یا -لویډونکي وي

پ) مونوټون جگيري

ت (مونوټون لویري؟

ددې دندې د اوبیوني په مرسته کیدی شي، چې د توکي $aK=(k+1)/(k+2)$ سره د پرلپسی مونوټونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$\begin{aligned}
 a_{k+1} - a_k &= \frac{(k+1)+1}{(k+1)+2} - \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+2}{k+3} - \frac{k+1}{k+2} \\
 &= \frac{(k+2)^2 - (k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)} = \frac{(k^2+4k+4) - (k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)} \\
 &= \frac{1}{(k+3)(k+2)} > 0 \quad k \in N^*
 \end{aligned}$$

له $ak+1-ak > 0$ همداسې $(ak+1) > ak$ ($\leq$)

د ټولو $k \in N^*$ لپاره لاس ته راځي، چې ورکړ شوي پرلپسی په کلکه مونوټون جگيري.

۱۸ . ۲ . ۲ اريتميتيکي پرلپسی

د پرلپسی 14;11;8;5;2 هر غړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دی.

ددې پرلپسی لپاره ورکړی

الف) يوه رکورزيډ انځورونه

ب) (يوه اکسپليڅيت انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډيري پاملرني ارزښت لري، په دې ډول چې د دوه په خوښه گاونډيو غړو a_k او a_{k+1} ترمنځ يو ثابت (تل همغه) بلواک يا تابع موجود دی غواړو چې دداسی دوه مهمو پرلپسی ټيپونه (ډولونه ، رقمونه) په ځانگړې توگه څرگند راوباسو يا بهتره تر څيرنی لاندې ونيسو:

پيژند (تعريف) ۱۸ . ۴ :

په يوه اريتميتيکي- يا گڼونشميرنيزي پرلپسي يالند: شميرنيزي پرلپسی کي د درې توکو منځنی توکی د دواړو دباندنيو توکو اريتميتيکي منځ دی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په يوې ځمکچيزي لپسی(ټاکونی يا پيژند وروسته راځي) کې د درې يو په بل پسې توکو منځ غړی د دوو نورو دباندنيو غړو ځمکچيز يا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

لومړی اريتميتيکي يا شميرنيزه پرلپسی څيرو:

غوښتنه(ثبوت): يوه پرلپسی ورکړی، چې لومړی توکی يي ۵ او هر ورپسې راتلونکی توکی يي له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي

الف) ددې پرلپسی لومړي پنځه توکي وشميری

ب) د پرلپسی رکورزيډ انځورونه ورکړی

پ) د پرلپسی اکسپليڅيت انځورونه وکړی

ت) د پرلپسی ۲۰ م- (۲۵ ، ۳۵،۵۰ ، ۱۰۰) توکي وشميری.

پېژند يا تعريف ۱۸ . ۵ :

يوه پرلپسی a_n اريتميتيکي پرلپسی بلل کيږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون ياکمښت

$$a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d \quad \text{نل ثابت يا همغه وي:}$$

بيلگي:

۱ - لاندنۍ پرلپسي $2; 5; 8; 11; 14; \dots; 29; 32; 35; \dots$

يوه اريتميتيکي Arithmetic پرلپسی ده چی لومړی توکی یی $a_1 = 2$ او ثابت يا همغه کمون يا کمښت يا فرق یی $d = 3$ دی.

۲ - دا پرلپسی $10; -1, -12, -23, -34; \dots$ یی $a_1 = 10$ دی او $d = -11$ ده توکی

که په هر پل (قدم) کی فنکشن $a_n; n \in \mathbb{N}$ په همغی زیاته ووني d زیاتيږي يا همداسی کميږي $d=0$ (لپاره ثابت دی) نو بايد اريتميتيکي پرلپسی يو لاینيز فنکشن (لاینيز بلواک) وي ($D = \mathbb{N}$) د d په جگوالي . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه يا فکر لاس ته اوړنه ده:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d = a_1 + d \cdot n - d$$

$$f(n) = d \cdot n + (a_1 - d)$$

د لاینيز فنکشن جگوالی d دی او ثابت يا همغه توکی $a_1 - d$ نوميږي (ياديږي يا بلل کيږي)

دلته $a_n = 2n + 1$ د لاینيز فنکشن په څير دی، د $d = 2$ په جگیدو او y - محور غوڅی

$$a_1 - d = 1$$

پوښتنه : د

(الف) د ۱ می یا لومړی ورځی

(ب) د ۱۵ - می ورځی

(پ) د ۲۰ - می ورځی

معاش څومره کيږي. اندازه گڼ(عدد) که په ډالرو وشميرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:

0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,.....

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره

(الف) رکورزيف انځورونه

(ب) اکسپليڅيت انځورونه ورکړی

پيژند ۱۸ . ۷:

(ځمکچيزي يا هندسی پرلپسی) یوه پرلپسی a_n هندسي بلل کيږي، که د دوه یو بل پسی غړو ویش ثابت ((تل) همغه) q وي:یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چی لومړی غړی $a_1 \neq 0$ وي او د همغه گڼ یعنی ثابت گڼ q سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمکچيزه يا هندسي پرلپسی بلل کيږي.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q; a_{n+1} = a_n \cdot q \quad n \in N; q \in \{R\} \setminus \{0\}$$

د ټولو لپاره

یو ځل بیا یوځای

+d	+d	+d	+d				
	a1	a2	a3	a4	a5...	پرلپسی	اريتميتيکي
	a1	a2	a3	a4	a5		هندسي پرله پسی
				.q	.q	.q	.q

د هندسي پرلپسی دوهم غړی د لومړي غړي سره د q ځل يا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غړو لپاره باوري دي. له دې امله هندسي پرلپسي $n \rightarrow$ an اکسپونینشل فنکشن يا د جگړې بلواک بنایي چې q د بنسټ په توګه لري:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$f(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کې n -م توکی د لاندې قاعدې له مخې شمیرل کېږي

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

بیلګی:

$$1 - a_1=3, q=2, n=15 \Rightarrow a_{15} = 3 \cdot 2^{14} = 29152$$

$$2 - a_1=19, q=1.01, n=100 ; \\ = 50,8826363919.1, 01^{99} a_{100} =$$

جمله :

یوه ځمکچیزه پرلپسی د زیاتیز یا مثبت پیلټوکی سره د $q > 1$ لپاره کله مونتون جګیدونکی ده د $0 < q < 1$ لپاره کله مونتون لویدونکی ده

غوبښتنه :

د لاندې پرلپسیو ۱۰ لومړني غړي وشمیرئ

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } a_k = \frac{k-2}{k+2} & \text{b) } a_k = \sin \frac{k \cdot \pi}{6} & \text{c) } a_k = \frac{1}{2} [1 + (-1)^k] \\
 \text{d) } a_k = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^k & \text{e) } a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k & \text{f) } a_k = \cos \frac{k \cdot \pi}{2} \\
 \text{g) } a_k = k^k & \text{h) } a_k = (-1)^{k-1} \cdot k^2 & \\
 \text{i) } a_1 = 3; \quad a_{k+1} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{4}{a_k}\right) & \text{k) } a_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1} \cdot a_k} & \\
 \text{l) } a_1 = 3; \quad a_{2n} = a_{2n-1} - 3; \quad a_{2n+1} = a_{2n} + 4 \quad (n \in \mathbb{N}^*) & & \\
 \text{m) } a_k = 2k - 1 + \frac{1 + (-1)^k}{2} + (-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}} & \text{n) } a_k = 3 - \frac{1}{2^{k-2}} &
 \end{array}$$

غوبښتنه :

پرلپسی د مونوټون خویونو له پلوه وڅیړئ

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } a_k = \frac{k-2}{k} & \text{b) } a_k = \frac{k+4}{k} & \text{c) } a_k = \frac{3k}{2k-1} \\
 \text{d) } a_k = \frac{1-k^2}{k} & \text{e) } a_k = 2^k & \text{f) } a_k = 1 - \sin \frac{\pi}{k+1}
 \end{array}$$

۱۸. ۲ الف لری

د هغه کارپلټونکی زدکړي وړاندیز ته بیرته پام راگرځوو، چي د لمری ورځي 0,05 اجوره د دویمي ورځي 0,1 د دریمي ورځي 0,2، د څلورمې ورځي اجوره یی 0,4 ډالره وه او داسی نور.

په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوي:

k - می ورځي لپاره زدکړی څومره اجوره اخلي؟

دا مویوي ځمکچیزې لری ته لارښودوي د $a_k = 0,05 \cdot 2^{k-1}$ سره.

د هغې k - م توکی د k - می ورځي اندازه گڼي یا د اجورې معیار دی.

دا په دې مانا چي زدکړی د k - می ورځي لپاره $0,05 \cdot 2^{k-1}$ ډالره اجوره یا معاش اخلي.

که غواړو چې وښايو چې زدکړی په لومړيو پنځو ورځو کې څومره اجوره اخلي ، نو بايد د لومړيو ورځو اجورې ځککچيزه پرلپسۍ، د $a_k = 0,05 \cdot 2^{k-1}$ سره، يو بل سره زياته کړو

$$0,05+0,1+0,2+0,4+0,8 = 1,55$$

دا زدکړی د لومړيو پنځو ورځولپاره 1,55 ډالره معاش اخلي که د لومړيو n ورځو اجوره په Sn سره وښايو ، نو يوه لړۍ د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = 0,05 \cdot 2^0 = 0,05$$

$$s_2 = s_1 + 0,05 \cdot 2 = 0,05+0,1 = 0,15$$

$$s_3 = s_2 + 0,05 \cdot 2^2 = 0,15+0,20 = 0,35$$

$$s_4 = s_3 + 0,05 \cdot 2^3 = 0,35+0,40 = 0,75$$

$$s_5 = s_4 + 0,05 \cdot 2^4 = 0,75 + 0,80 = 1,55$$

$$s_6 = s_5 + 0,05 \cdot 2^5 = 1,55+0,160 = 3,15$$

غوښتنه:

پرلپسۍ ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړی (مخ وديزه کړی) ، که د ورکړ شوي پرلپسۍ ، چې توکي يې $a_1, a_2, a_3, \dots$ دي، دتوکو يو په بل پسې جمعه يا زياتون جوړ شي

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 & &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 & &= s_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 & &= s_2 + a_3 \\ &\vdots & & \\ s_{20} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{19}) + a_{20} & &= s_{19} + a_{20} \\ &\vdots & & \\ s_{n-1} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + a_{n-1} & &= s_{n-2} + a_{n-1} \\ s_n &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n & &= s_{n-1} + a_n \\ s_{n+1} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1} & &= s_n + a_{n+1} \\ &\vdots & & \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

نو یوه پرلپسی... $S_1, S_2, S_3, \dots$ لاس ته راځي.

پيژند يا تعريف ۱۸. ۸:

د یوې پرلپسې $a_1; a_2; a_3; \dots$ څخه جوړه شوې پرلپسې $S_1; S_2; S_3; \dots$

د رکورزيف انځورونې $s_1 = a_1; s_n = s_{n-1} + a_n$

سره پرلپسې لری (د پرلپسيو لری) يا لنډ: لری بلل کيږي.

بيلگه:

د $ak = 2k$ سره جوړې شوې پرلپسې څخه جوړه شوې لری په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$s_2 = s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6$$

$$s_3 = s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$

$$s_4 = s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

$$\vdots$$

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$

$$\vdots$$

$$i$$

$$\vdots$$

$$j$$

بيلگه:

د $ak = (2+3k)/(k+1)$ سره جوړه پرلپسې څخه جوړه شوې لری، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \frac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}$$

$$s_3 = s_2 + \frac{11}{4} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} = \frac{95}{12}$$

$$s_4 = s_3 + \frac{14}{5} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} = \frac{643}{60}$$

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \dots + \frac{2+3n}{n+1}$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوې لړۍ توکي S_n ورکړی

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a_k = 2 \cdot 5^{k-1} & \text{b) } a_k = -3 \cdot 2^{k-1} \\ \text{c) } a_k = 5 \cdot 0,2^{k-1} & \text{d) } a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1} \end{array}$$

پيژند ۱۸. ۹:

د اريتميتيکي پرلپسی توکو یو له بل سره زیاتون یا جمعه په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اريتميتيکي لری پرلپسی (لنډ: لری) بولو:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

موږ دلته بیا پیل بیلگه را اخلو، چی د اريتميتيکي لری (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لری پرلپسی یی غواړو ونومو او په لنډه توگه یی له دي وروسته «لری» و بولو) زیاتون او په تولیزه توگه لری زیاتون وشمیرو. ټاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغي پسی زیات کړی شو یا یی زیاتون ونیولی شو:

$$s_{100} = 3+7+11+\dots$$

$$+395 + 399$$

$$s_{100} = 399+ 395+\dots$$

$$+ 11 + 7 + 3$$

$$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

$$+ a_{n-1} + a_n$$

$$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \dots$$

$$+ a_2 + a_1$$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\dots+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+d+a_{n-1}) + \dots$$

$$+ (a_1 + (n-1).d + a_1)$$

$$2s_{100} = 402 + 402 + 402 + \dots + 402 + 402$$

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)$$

$$2s_{100} = 100 \cdot 402$$

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$s_{100} = 50 \cdot 402$$

$$s_{100} = 20100$$

$$s_n = n(a_1 + a_n)/2$$

د پورته شمیرني سره سم د اریتمیتیکی لری زیاتون دی: $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

که دلته د $an = a_1 + (n-1)d$ ځای په ځای شي او د اسانتیا لپاره کموناتیو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چې $n/2$ ښي خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2} = n \cdot a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بیلگې:

$$a_a = 3; d = 7; n = 50 \Rightarrow s_{50} = (2 \cdot 3 + 49 \cdot 7)50/2 = 8725$$

کنترول: $a_{50} = +49.7 = 346$ او له دې

$$s_{50} = \frac{(3 + 346)50}{2} = 8725$$

دویم- یو میراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ویشل کیږي چی هر یو مشر د ورپسې مشر ورور څخه 470 افغانی زیاتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسیږي. معلوم کړی چی میراث څومره دی او هر یو ورور څومره میراث اخلي؟

$$a_1 = 17000; d = 4700, s_6 = 6/2(2 \cdot 17000 + 5 \cdot 4700) = 172500$$

افغانی

ورونه په لاندې ډول پیسې اخلي

17000 افغانی، 21400 افغانی، 26400 افغانی،

31100 افغانی، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنګه چی د اریتمیتیکی لری زیاتون پیداکیږي، همداسی د هندسي لری زیاتون هم پیداکیږي شي. عمومي فرمول به په پورتنی ۱ - بیلګه کی ځانګړی یا ځانیز شي

(مشخص). د زیاتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لری sn څخه په q پراخه شوي لری کمو. په دې ډول لری لرو توکو ته لریږي:

۱۸. ۲ الف. ۱. ځمکچیزې یا هندسي لریپرلپسي (لنډ: لری):

د ځمکچیزې پرلپسي څخه جوړه شوې لری ځمکچیزه لری بلل کیږي. د هندسي پرلپسي د $a = 3.2^{k-1}$ څخه جوړه هندسي لری په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 3.2^0 = 3$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0 + 3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0 + 3.2 + 3.2^2 + 3.2^3 + \dots + 3.2^{n-1}$$

.

.

جمله : (اکسپلیڅیت انځورونه):

د ځمکچیزې پرلپسي د $a_k = a_1 + (k-1).d$ توکي سره جوړې پرلپسي څخه جوړې شوې هندسي لری لپاره صدق کوي:

$$S_n = a_1 + a_2q + a_3q^2 + \dots + a_nq^{n-1} = a_1(q^n - 1)/(q - 1);$$

$$q \neq 0; S_n = n \cdot a_1 \quad q = 1$$

اوبی: د $q \neq 1$ لپاره باور لري:

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

$$s_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_1q^n$$

$$s_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

غوښتنه: اوبی د $q = 1$ لپاره د گرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته یو بل ډول ښوونه پلي کوو: پرلپسی د- n ام غري $an = 3.2^{n-1}$ سره ورکړ شوي. دلته په دې توگه د لری غري لرو غرو ته رالږيري.

$$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \dots + 24576 + 49152$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_{15} \cdot 2 = 6 + 12 + \dots + 49152 + 98304$$

$$s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

$$s_{15} - s_{15} \cdot 2 = 3 - 98304$$

$$s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$$

$$s_{15}(1-2) = 3-98304$$

$$s_n(1-q) = a_1 - a_n \cdot q$$

$$s_{15} = (3-98304)/(-1)$$

$$s_n = (a_1 - a_n \cdot q)/(1-q) = (a_1 - a_1 \cdot q^n)/(1-q)$$

$$s_{15} = 98401$$

$$s_n = a^1 \cdot (1-q^n)/(1-q)$$

له کمون یا کمېنت وروسته د لری په کښه لور ټيک (یواځی) پورته لیکي لومړی توکی او د لاندې کرښی اخرنی توکی پاتیري، نور ټول توکی یوبل سره لري کوي، د بیلگي په توگه $a_2 - a_1 \cdot q = 0$ او یا $a_n - a_{n-1} \cdot q = 0$ دا روښانه ده چی q نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي، په لومړي حالت که به مو پرلپسی

$a_1, 0, 0, 0, 0, \dots$

لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي a_1, a_1, a_1, a_1 سره سر او کار وي

بیلگي:

$$1 - 7; -21; 63; -189; \dots \quad q = -3; a_1 = 7$$

غوښتونکی s_7

$$s_7 = 7 \cdot ((-3)^7 - 1) / -3 - 1 = -15316 / -4 = 3829$$

کنترول:

$$a_7 = a_1 \cdot q^6 = 7 \cdot (-3)^6 = 5103, s_7 = 5103 \cdot (-3)^7 - 1 / (-3)^7 - (-3)^6 : \\ = 5103 \cdot 2188 / 2916 = 3829$$

۱۸ . ۲ الف ۲ اریتمیتیکی لړۍ

دلته غواړو چې یو ځل بیا لاند مګر د یوه لوی سرلیک په څیر اریتمیتیکی لړۍ ته یو نظر واچوو. یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوې لړۍ اریتمیتیکی لړۍ نوموو. د

$$a_k = 15 + (k - 1) \cdot 4$$

سره جوړه اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ په لاندې ډول ده:

$$s_1 = a_1 = 15$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = 15 + (15 + 4) = 15 + 19 = 34$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = 15 + (15 + 4) + (15 + 2 \cdot 4) = 15 + 19 + 23 = 57$$

"

"

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 15 + (15 + 4) + (15 + 2 \cdot 4) + \dots + (15 + (n-2) \cdot 2) + (15 + (n-1) \cdot 4)$$

"

"

"

جمله : (د اریتمیتیکی لړۍ اکسپلیځیت انځورونه):

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$$

سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ s_n اریتمیتیکی لړۍ لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d) = (n/2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

$$\begin{aligned}
 s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \\
 s_n &= (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \\
 s_n + s_n &= [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \dots \\
 &\quad + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] \\
 2 \cdot s_n &= n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d] \\
 s_n &= \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]
 \end{aligned}$$

غوښتنه:

وښايي چې $sn = (n/2)(a_1 + a_n)$ د $sn = (n/2)(2a_1 + (n-1)d$ سره په يوه مانا دي

۱۸. ۶ د پرلپسی او لړيو پولی

موږ تر اوسه داسې لړيو سره سر او کار لروده چې اخرنۍ توکي يې لاس ته راوړونکي وو. داسې لړۍ پایلرۍ بلل کيږي. داسې فکر هم کيدی شي چې د لړۍ اخرنۍ غړي موجود نه وي، يعنې لړۍ دې په خوښه دوام پيدا کولی شي. په عمل کې داسې پرابلمونو سره مخامخ کيږو چې دا مو ناپای لړيو ته هڅوي. دا څرگنده ده، چې داسې لړۍ اريتميتيکې لړۍ نه دي، کم له کمه به ی اخرنۍ غړی په پوښتنه کې راتلی او يا د پانديرو غړو زياتون، په اريتميتيکې لړۍ کې بي مفهومه دی، ځکه چې دواړه لويي د n د ارزښت سره په ټولو پولو لويږي په هندسې لړيو کې هم په يوه ناپای لړۍ کې د اخرنۍ غړي او يا زياتون پوښتنه بي مفهومه ده. دا روښانه ده چې د پيل غړی د $|q|$ سره ځل له امله تل جگيږي. دا د مثبت او همدول د منفی q لپاره باور لري.

بيلگي:

۱ - اريتميتيکې لړۍ $2+3+4+5+\dots$ يو لاس ته راوړونکی د زياتون يا جمعۍ ارزښت نه لري، ځکه چې هر راتلونکی زياته وونی د ټولو پولو لويږي يا جگيږي.

۲ - ځمکچيزه يا هندسې لړۍ $2+3+4+5+6+10,125+15,1875+\dots$ د لومړي توکي $a_1 = 2$ او د ویش $q = 1,5$ سره په ټولو پولو لويږي. يا جگيږي نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلوميدی شي. د پای توکوگن زياتون sn او اخرنۍ توکی an شميريدونکی دی.

۳ - ناپای ځمکچیزه یا هندسي لړۍ

$$q = -2 \text{ او } a_1 = 1,5 \text{ د } -966 + 48 - 24 + 122 - 66 + 3 - 1,5$$

سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چې د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکې پولې څخه جگړي یا لویږي. له دې سره به څرگنده شوې وي چې کله د ناپای هندسي لړۍ د زیاتون ارزښت پای دی.

پیلبلګه :

یو سخی سری غواړي د معیوبو هستوګنځی ته بسپنه ورکړی. په لمرۍ میاشت کې دی ۱۰۰۰ افغانۍ بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کې د هغې د مخه میاشتی نیمایي یعنی په دومه میاشت کې ۵۰۰ افغانۍ او په دریمه کې ۲۵۰ افغانۍ او داسې نور. دلته $a_1 = 1000$ او $q = 1/2$ دي. دوخت د کموالي له امله دا لړۍ باید پای لري وي، مگر موږ دې پوښتنې ته تیوریتیکي ځواب ورکوو.

د پای ځمکچیزو لړیو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له فرمول $s_n = 1000(1 - 0,5^n) / (1 - 0,5)$ څخه کار واخستل شي، که چیرې n یو ناپای لوي ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کې موږ ته معلوم ارزښتونه کینول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1 - 0,5^n) / (1 - 0,5)$$

$$s = 1000(1 - 0,5^n) / (1 - 0,5) = 2000 \cdot (1 - (1/2)^n)$$

که n له ټولو پولو تیر شي، باید د $(1/2)^n$ له امله دا مات $(1/2)$ تل کوچنی شي. دې مات $(1/2)$ باندې کیدی شي، چې د لویو n توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي.

دلته روښانوي چې په دې توګه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لړۍ

$$1000 + 500 + 250 + 125 + 65,50 + 32,75 + \dots$$

جوړوي، کومه چې ځان و 2000 ته نژدې کوي او هغه ته هیڅ نه رسیږي. دا سری زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانۍ خیرات ورکړي.

یادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توګه ځواب کیدی شي.

پرلپسی او د پرلپسی لړۍ په لوړو شمیرپوهنوکې غوره رول لوبوي» ډیرې ښوونې (اوبونې) په دې ولاړې دي، چې ایا یوه ټیګ ټاکلې پرلپسی یوې معلومې یا ټاکلې پولې ته هڅه کوي او که نه؟ چې په اول حالت کې پرلپسی (konvergent) لیمټ لرونکې

یاپوله لرونکي (بلل لکیري او په دوهم حالت کی پرلپسی (divergent لیمت یا پوله نه لرونکی) بلل کیري.

بیلگه :

د ... مخ په اول او په درېمې بیلگو کی راوړل شوی پرلپسی دیورگنت یا پوله نه لرونکی ، په ۲ -مه بیلگه کی پرلپسی کونورگنت یا پوله لرونکی ده او د صفر لور ته هڅه کوي یا صفر ته کونورگنت ده یعنی ددې پرلپسي پوله صفر دی. او ۴ -مه بیلگه کی پرلپسی پوله لري او د ۳ لور ته هڅه کوی، یعنی پوله یی ۳ دی.

پرلپسی شته چی د جگیدو سره یوه ټاکلی گڼ ته په خوبنه ورنزدې کیدی شي. د دې پرلپسی د په خوبنه لویو غړو او د دې گڼ کمون ترمنځ بالاخره دومره کوچنی کیري، چی په جیشمیرني باندې هم نه شي شمیرل کیدی .
مون د پرلپسیو دا ډول ځاننیونی، بی له جب شمیرنی یا جیشمیري، په لاندې بیلگو کی څیرو.

د پرلپسیو غړي

$$1; 1/2; 1/3; 1/4; \dots | 0; 1/3; 2/4; 3/5; 4/6; \dots | 3/29/4; 15/8; 33/16$$

$$1; 1/2; 1/3; 1/4; \dots | 0; 1/3; 2/4; 3/5; 4/6; \dots$$

$$| 3/29/4; 15/8; 33/16$$

د لاندې سره

$$a_k = 1/k \quad | \quad a_k = (k-1)/(k+1) \quad | \quad a_k = 2 + (-1/2)^k$$

د k د جگیدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې گڼونو ته نزدې کوي

$$g=0 \quad | \quad g=1 \quad | \quad g=2$$

د گراف ټکي یی تل د جگیدونکی غړی نمرې k سره د

$$x - \text{محور سره غبرگ} \quad | \quad x - \text{محور سره غبرگ} \quad | \quad x - \text{محور ته}$$

$$y = 2 \text{ سره} \quad | \quad y = 1 \text{ سره او په ریښتونی}$$

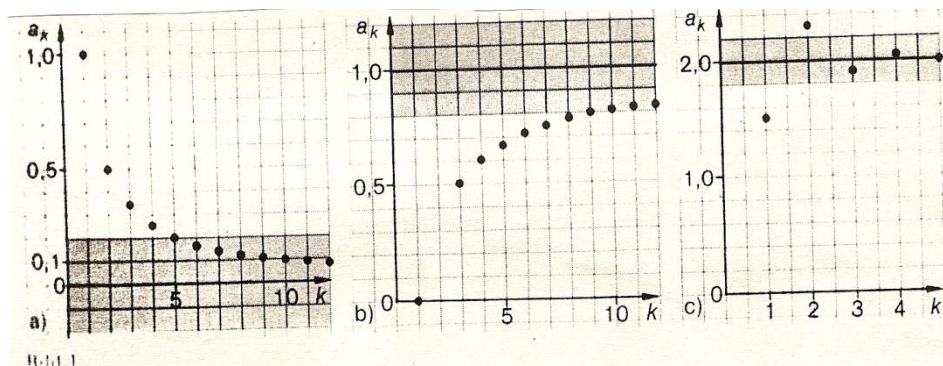
له لاندې او پورته بدل

له پورته راتلونکي

راتلونکی

که په کرښه یو دواړو لورو ته پټی وکښل شي

د $y = 2$ سره د $y = 1$ سره د $y = 0$ سره
 نو د پوره لويي k نمره توکي سره د پرلپسی ټول غړی په دې پټی کی دننه پراته دي.



دا لاندې ډیفرنڅ یا کمون

$$|a_k - 0|$$

$$|1 - a_k|$$

$$|a_k - 2|$$

دا مانا لري، چی د جگیدونکی k نمرې توکیه خورا کوچنی کیدی شي. دا پوښتنه مو
 چی د کوم غړی a_k لپاره دا کمون د بیلگي په توگه له 0,0001 کوچنی کیدی شي، لاندې
 ناسمساوات ته را هڅوي

$$|a_k - 0| < 0,0001$$

$$\left| \frac{1}{k} - 0 \right| < 0,0001$$

$$\frac{1}{k} < 0,0001$$

$$k > 10000$$

$$|1 - a_k| < 0,0001$$

$$\left| 1 - \frac{k-1}{k+1} \right| < 0,0001$$

$$\left| \frac{(k+1) - (k-1)}{k+1} \right| < 0,0001$$

$$\frac{2}{k+1} < 0,0001$$

$$\frac{2}{0,0001} < k+1$$

$$19999 < k$$

$$|a_k - 2| < 0,0001$$

$$\left| 2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^k - 2 \right| < 0,0001$$

$$\left| \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right| < 0,0001$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^k < 0,0001$$

$$k \cdot \lg \frac{1}{2} < \lg 0,0001 \parallel : \lg \frac{1}{2} < 0 (!!)$$

$$k > \frac{\lg 0,0001}{\lg \frac{1}{2}}$$

$$k > \frac{-4}{-0,3010}$$

$$k > 13,29$$

دا په دې مانا، : د ټولو پرلپسی غړو د

$$k > 10000$$

$$k > 19999$$

$$k > 13$$

سره کمون $|a_k - g|$ له 0,0001 کوچنی دی .
د گراف لپاره باور لري، چې دا ټول ټکي د یوې پټۍ یا تسمې په دننه کی پراته دي
سور يي 2.0,0001 په کرښه د مساوات

$$y = 0$$

$$y = 1$$

$$y = 2$$

$$y = 0 \quad y = 1 \quad y = 2$$

سره پروت وي .

که دا د 0,0001 په ځاي کی یو په خوښه کوچنی ریيل گڼ ورکړ شي، او وله
دې وغوښتل شي چې کمون یی له دې گڼ کوچنی دی نو په ورته توگه مو
لاندې نامساواتو ته لارښودوي.

$$|a_k - 0| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{k} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{k} < \varepsilon$$

$$k > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$|a_k - 1| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{k-1}{k+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{(k-1) - (k+1)}{k+1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-2}{k+1} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{2}{k+1} < \varepsilon$$

$$\frac{2}{\varepsilon} < k+1$$

$$\frac{2}{\varepsilon} - 1 < k$$

$$|a_k - 2| < \varepsilon$$

$$\left| 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right| < \varepsilon$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$$

$$k \cdot \lg \frac{1}{2} < \lg \varepsilon : \lg \frac{1}{2} < 0 (!!)$$

$$k > \frac{\lg \varepsilon}{\lg \frac{1}{2}}$$

دا په دې مانا چې : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$$k > 1/\varepsilon$$

$$k > 2/\varepsilon - 1$$

$$k > \log \varepsilon / (\log(1/2))$$

سره کمون $\frac{q^n}{1-q}$ دی .

پرلپسی له دې خوښو سره کونورگنت بلل کيږي او گڼ g یی پوله.

پیژند ۱۸. ۱ :

یوه پرله پسی کونورگنخ Konvergent (لاتین convergere یو د بل په لور ور
خغلیدل یعنی یو بل ته ورنزدېکیدل) بلل کیږي یعنی د یوې ټاکلې پولې په لور هڅیږی،
کله چی د هغی غږي د جگیدونکی ایندکس n سره یوې پولې ته په خوبښه نزدې شي. یوه
لری کونورگنت یا پوله لرونکی بلل کیږي، کله چی د برخه زیاتون پرلپسی د
جگیدونکی n سره یوې پولې ته په خوبښه نزدې شي.

هغه پرلپسی چی د صفر په لور هڅیږي صفرپرلپسی یی بولو هغه پرلپسی چی
یوې ټاکلې پولې ته نه هڅیږي. دیورگنت بلل کیږی «) دا وروسته ه تر څیړنی لاندې
نیول شوي دي.

جمله :

د ځمکچیزې یا هندسي لری پولې تج ت لنې یا کونور گنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |q| < 1$$

که $|q| < 1$ وي ، پس د پای ځمکچیزې لری لپاره د زیاتون فرمول داسی دی

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

د q^n ارزښت څخه تېرېدی شو یعنی ترې صرفنظر کیدی شي، که n پوره لوي
وټاکل شي.

جمله :

دناپای ځمکچیزې لری $a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots$ د زیاتون s_n سره پوله
تیک هلته لري، کله چی $|q| < 1$

$$s = a_1 / (1 - q)$$

$$n = n_0(\varepsilon); \dots \dots \dots (18.7)$$

وي.

جمله:

هره پرلپسی د $a_k = \frac{b}{k^n}$ ($b \in R; n, k \in N$) سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د $a_k = cq^n$ ($c \in R$) سره د $|q| < 1$ لپاره یوه صفر پرلپسی ده.

دلته غواړو چې دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو. د یوې پرلپسی د غړو a_n ځاننویځی څیرنه د تل جگیدونکي n لپاره، وایو چې: که n د oe (ناپای) په لورو هڅیږي او یا لڼد $oe \rightarrow n$ ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي ته بیایي او یا کونورگنځ (convergence). موږ پرلپسی $\{a_n\} = \{1/n\}$ په پام کې نیسو، د جگیدونکي n سره، گورو چې د پرلپسی غړي تل 0 ته په خوښه یا په زړه پورې وړ نژدې کیږي.

که سړی هرڅومره کوچنی گڼ $\varepsilon < 0$ وټاکي د یوه معلوم $n = n_0(\varepsilon)$ دلته $n_0(\varepsilon)$ د ε په واک کې دی) څخه وروسته ټول گڼونه د 0 په ε -چاپیریال کې پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon). \quad (18.1)$$

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (18.2)$$

سړي کړی شي چې دا n دلته په ساده ډول ورکړي. د (۱۸ . ۱) له امله دی

د

$$100 / 1 =$$

لپاره . $n_0 = 100$ نو $|a_n| < 1 / 100$ د ټولو $n > 100$ لپاره، یعنې د $n = 101, n = 102, n = 103, \dots$ لپاره. د $1000000 / 1 =$ لپاره لرو $n_0() =$ 1000000 پس، $|a_n| < 1 / 1000000$ د ټول $n > 1000000$ لپاره

په لاندې حالت کې سړی وایي: چې پرلپسی

$$\{1/n\}$$

کنورگنټ ده. هغه د پولی $a = 0$ لور ته کونورگنټ کیږي. د دې لپاره لیکو)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

او یا په ساده ډول

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (18.3)$$

(د $1/n$ لیمس د $n \rightarrow \infty$ لپاره په ۰ مساوي دی او یا ساده $1/n$ په ۰ لور ځي) د $\{a_n\} = \{(-1)^n(1 + \frac{1}{n})\}$ لاندې پرلپسی په څیرنه کره لاس ته راځي: د جوړه یا جفت n لپاره پرلپسی a_n د ۱ لورته نږدې کیږي او د ناجوړه یا طاق n لپاره پرلپسی د ۱- لورته نږدې کیږي. دلته سری د دوه پولو $1+$ او $1-$ څخه نه غږیږي بلکې د پرلپسی د دوه ډیری شوو ټکو یا ځای راتولشو ټکو څخه. پرلپسی کونورگنت نه ده بلکه دیورگنت (divergence) (ټیگ: ناکلی دیورگنس) ده.

پرلپسی $\{a_n\} = \{n^2\}$ هم دیورگنت ده. دا چې a_n د جگیدونکی n سره د ∞ یا ناپای لورته ځي پس د هرڅومره لوی ارزښت K څخه اوږي یا جگيږي، نو سری د ∞ لور د ټاکلی دیورگنت څخه غږیږي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty \vee n^2 \rightarrow +\infty; \dots \dots \dots (18.4)$$

په پورته کې $\vee$ د یا لپاره ځای په ځای ده له دې پیل یادونو څخه اوس باید د پولو (حدونو) کلیمی کره وپیژندل شي:

پیژند ۱۸. ۲:

یو پرلپسی $\{a_n\}$ پوله یا حد a لري

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \rightarrow a; \dots \dots \dots (18.5)$$

که د هر یوه (هرڅومره کوچنی هم) $\varepsilon > 0$

< 0

لپاره یو $n_0 = n_0(\varepsilon)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$|a_n - a| < \varepsilon; \dots \dots \dots (18.6)$$

$$n = n_0(\varepsilon); \dots \dots \dots (18.7)$$

وايو چی پرلپسی $\{a_n\}$ کونورگنت یا په بل عبارت پرلپسی $\{a_n\}$ د پولی a په لور کونورگنت کیږي. که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو دیورگنت بللکيږي (یا دیورگنت کیږي).

که یوې دیورگنتې پرلپسی $\{a_n\}$ و هر (په خوښه لوی) گن K لپاره یو $n_0 = n_0(K)$

داسې موجود وي چی باوري وي

$$a_n > K \quad \text{یا} \quad a_n < -K \quad (18.8)$$

د ټول

$$n > n_0(K) \quad (18.9)$$

نو د پرلپسی څرگند یا معلوم دیورگنت بلل کیږي د $oe +$ په لور او یا $oe -$ په لور او ددې لپاره لیکي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow (\text{په همدې ډول}) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad (18.10)$$

یا لنډ:

$$a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow (\text{یا په همدې ډول}) a_n \rightarrow -\infty \quad (18.11)$$

که یوه پرلپسی دیورگنت او ټاکلی دیورگنت نه وي، نو ناټاکلی دیورگنت بلل کیږي. ددې پرلپس $\{a_n\} = \{n/n+1\}$ څخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

اټکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعنې $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n/n+1) = 1$

اوس باید د (۱۸. ۵) تر (۱۸. ۷) ونبول شي. دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n)/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

$$د \quad n+1 > n \Leftrightarrow n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$$

د $1/100 = n_0(\varepsilon) = 99$. نو د ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدۍ شي چې تصدیق کړو چې: هر $\epsilon > 0$ ته یو $n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$ داسې موجود دی چې $|a_n - 1| < \epsilon$ د ټولو $n > n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$ لپاره دی.

دا ساده بیلگه د تعریف ۱۸ . ۲. پرابلم په گوته کوي. دا تعریف جوړونکۍ نه دی، دا وایي چې پوله څرنگه پیدا کیدۍ شي. مخکي له دې چې پولې ته تگ (کونورگنڅ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته ضرورت دی. مخکي له دې چې کونورگنڅ اټکل کیدۍ شي چې دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعنې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n/n+1) = 1$$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي. دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n)/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\epsilon$$

$$د \quad n+1 > n \Leftrightarrow n > (1/\epsilon) - 1 = n_0(\epsilon) \quad \text{لپاره .}$$

$$د \quad 1/100 = \text{لپاره لرو } n_0(\epsilon) = 99. \text{ نو د ټولو } n > 99 \text{ لپاره داسې دی}$$

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدۍ شي چې تصدیق کړو چې: هر $\epsilon > 0$ ته یو $n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$ داسې موجود دی چې $|a_n - 1| < \epsilon$ د ټولو $n > n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$ لپاره دی.

ددې پورته سره کیدۍ شي چې تصدیق کړو چې: هر $\epsilon > 0$

$$n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1 \text{ ته یو}$$

$$د \quad |a_n - 1| < \epsilon \quad \text{داسې شته دی چې}$$

$$د \quad n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1 \text{ لپاره دی .}$$

دا ساده بیلگه د پیژند ۱۸ . ۲. پرابلم په گوته کوي. دا تعریف جوړونکۍ نه دی، دا وایي چې پوله څرنگه پیدا کیدۍ شي. مخکي له دې چې پولې ته تگ (کونورگنڅ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته اړتیا شته دی. مخکي له دې چې

کونورگنځ (ټولې تج تلنه) وښایو نو باید پوله مو پیژندلې وي یا کم له کمه مو گومان په راغلی وي.

په ټولیزه(عمومي) توگه د $n_0(\varepsilon)$ شمیرل هم د ستونځو ډک دي. د پولی عملي شمیرلو لپاره داسی عملیو یا کاره ونو ته اړتیا ده، چی بی د پیژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال څخه ټولی راپیدا کړی شو. له دې پرابل سره ۱۸ . ۴ -امه برخه ځان مشغولوي. کله کله دا بسوالی یا بسیا کوي چی سری دومره پوه شي چی ایا پوله وجود لري یا شته دی (ایا کونورگنټ کیږی) بی له دې چی هغه وپیژني او یا یی وشمیري. داسی د موجودیت ویناوي یواځي د کونورگنځ کریتیرین (- خویونه) کولی شي، له کومو څخه چی لاندې یو ورکول کیږي. دې ته باید گوته ونیسو چی دا کریتیرین د مخه د پولی پوهیدل ضرور نه نیسي) دا د مخه نیونه نه ده یعنی فرضیه نه ده) .

جمله ۱۸ . ۱ :

هره بنده (محدوده) مونوتون پرلپسی a_n کونورگنټ ده .

دا کریتیریوم څرگند د لیدلو دی. که یوه پرلپسی تل جگيري (کمیری ، ټیټیری) او ټاکلی یا معلوم پای ارزښت K څخه نه اوري (K څخه نه ټیټيري) نو باید a_n یوځاي کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله یوځاي په یوځاي کی کیدی شي.

یادونه : څه گڼونه چی په یوځاي کی سره ډیر راتول شي ما ورته ډیری لیکلي، دا ښه نه ده، ځکه، چی ډیری مي د ډیری يانی د سیټ لپاره کارولی ، نو دلته لیکم، چی «راپنډ» شي .

جمله ۱۸ . ۱ د بیلگي په توگه په دریمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوگاریتم بنسټ په څیرگن e سره اړیکو یا رابطو کی استعمال لري . سری د یو څه ستونځو سره ښوولی شي چی لاندې باوري دی

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دې امله دا پرلپسی

$$\{a_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

مونوتون او بنده (محدوده) ده او د جملی ۱۸ . ۱ له امله کونورگنټ ده.

ددې پوله $e = 2, 71828$ ده (پرتله یا مقایس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (18.12)$$

۱۸ . ۴ د پولی شمیرنه

په دې برخه کې غواړو چې قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چې د پیرندلشوو پرلپسی د کونورگنت څخه د نورو کونورگنت لاس ته راوستی شو، او همداسې، چې د هغې په مرسته د پیرندلشوو پرلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو پرلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي. لاندې بنسټیزه جمله ښاي چې د ځانگړو شرایطو لاندې د گڼونو پرلپسیو سره همداسې شمیرل کیدی شي لکه پخپله د گڼونو سره.

جمله ۱۸ . ۲ :

که پرلپسی $\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ (پای) پوله ارزښت a او b ولري ، یانې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \quad (18.13)$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, \quad (18.14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \quad (18.15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}, \quad b_n \neq 0, b \neq 0, \quad (18.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b, \quad a_n > 0, a > 0, \quad (18.17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \log a, \quad a_n > 0, a > 0. \quad (18.18)$$

دا جمله دوه گوني وينا کوي: که د پرلپسیو غړو a_n او b_n د کونورگنت عددونو پرلپسي د جمعي، تفريق، ضرب (زیاتون کمون ، ځل) او ویش، پوتنځ یا لوگاریتم نیولو ، د یوې نوې پرلپسي یا ترادف غړي لاس ته راوړي نو دا نوې پرلپسي (ترادف) کونورگنت ده او

د پولی ارزښت یی په ترتیب د کونورگنتو پرلپسیو یا ترادفون جمع، تفریق، ضرب (زیاتون، کمون، حل)، ویش، پوتنخ او لوگاریم دی.

په لاندې کی غواړو یواځی اړیکی (۱۸ . ۱۴) وښایو. د ښوولو لپاره یی د پولی ارزښت پیژند ۱۸ . ۲ څخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو). نیونی (۱۸ . ۱۳) دا مانا لري، چی هر

$$< 0$$

ته یو

$$(n_1) \text{ (او یو } n_2)$$

داسی شته دی، چی باوري کوي $|a_n - a| < \varepsilon$ دتولو $n > n_1(\varepsilon)$ لپاره ،

$|b_n - b| < \varepsilon$ دتولو $n > n_2(\varepsilon)$ لپاره پس معتبر دي

$$n > n_0(\varepsilon) = \max \{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} \text{ د تول } |a_n - a| < \varepsilon \text{ او } |b_n - b| < \varepsilon$$

اوس باید یواځي وښایو چی د یوه ټاکلي n چه $|a_n \pm b_n - (a \pm b)|$

د هر ε لاندې راتیښدلی شي. لاندې باور لري

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

دتولو $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ لپاره

په دې توگه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.

د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی باید برسیره په نیونو یا فرضیو، چی په (۱۸ . ۱۵) تر (۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټیک په پام کی ونيول شي چی پرلپسی $\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ څرگند پای پولی ارزښتونه a او b باید ولري. که د بیلگي په توگه، $a_n \rightarrow \infty$ او $b_n \rightarrow \infty$ وي، نو فرمول (اجازه نه لرونکی استعمال!) (۱۸ ، ۱۴) په یوه په نامه نټاکلي افادې په لورځی یعنی $\infty - \infty$

$$(a_n - b_n) \rightarrow \infty - \infty. \quad (18.19)$$

که باور ولري $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow \infty$ ، نو سری د اجازي نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵) یوه بله نټاکلی افاده لاس ته راوړي:

$$(a_n \cdot b_n) \rightarrow 0 \cdot \infty. \quad (18.20)$$

په لاندې کی b.w. د همداسي په معنا دی.

$$a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0 \text{ bzw. } a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ bzw. } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}. \quad (18.21)$$

د (۱۸ . ۱۷) استعمال مو د $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$ همداسې د $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow 0$ همداسې حالتونو کې مو درې نړو ناکلو افادو ته لارښود وي. $a_n \rightarrow 1, b_n \rightarrow \infty$ همداسې $a_n^{b_n} \rightarrow 0^0$ bzw. $a_n^{b_n} \rightarrow \infty^0$ bzw. $a_n^{b_n} \rightarrow 1^\infty$. (18.22)

په پورته انځور شوو اړیکو کې لاندې افادې
(18.23) $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0, 1^\infty$

ناټاکلې افادې بلل کېږي.

داسې پرلپسې چې د جملې ۱۸ . ۲ فورمال استعمال څخه ناکلو افادو ته لارښودوي، دیورگنت او یا به مختلفو ارزښتو ته کونورگنت وي. دا یوې ځانګړې څیړنې ته اړ دي.

مخکې له دې چې داپوښتنې ځوابوو، نو باید یوڅو ټیپیکي پرلپسې وڅیړل شي، کومې مو چې په نامه ناکلو افادو ته لارښود وي، که څه هم د جملې ۱۸ . ۲ نیوني یا فرضي پوره نه وي.

که $a_n \rightarrow +\infty$ او $b_n \rightarrow +\infty$ باور ولري نو طبعاً لاس ته راځي

$a_n + b_n \rightarrow \infty + \infty = \infty$	(18.24)
$a_n \cdot b_n \rightarrow \infty \cdot \infty = \infty$	(18.25)
$a_n - b_n \rightarrow \infty - \infty = \infty$	(18.26)

دا اړیکې (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۲۵) طبعاً د ناڅرګندې پولې ارزښت - oe لپاره هم باوري دي.

که $a_n \rightarrow a$ او $b_n \rightarrow \infty$ وي، نو باور لري :

$a_n + b_n \rightarrow a + \infty = \infty,$	(18.27)
$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot \infty = \infty, a > 0,$	(18.28)
$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot \infty = -\infty, a < 0,$	(18.29)
$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{\infty} = 0,$	(18.30)
$a_n^{b_n} \rightarrow a^\infty = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < a < 1, \\ \infty & \text{für } a > 1, \end{cases}$	(18.31)
$a_n^{-b_n} \rightarrow a^{-\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{für } a > 1, \end{cases}$	(18.32)
$b_n^{a_n} \rightarrow \infty^a = \infty, a > 0.$	(18.33)

د لاندې لپاره باور لري :

$$a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow b, \quad (18.34)$$

$$\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \frac{b}{0} = \infty, b > 0, a_n > 0, \quad (18.35)$$

$$a_n^{b_n} \rightarrow 0^b = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ \infty & \text{für } b < 0, a_n > 0, \end{cases} \quad (18.36)$$

$$\log a_n \rightarrow \log 0 = -\infty, a_n > 0. \quad (18.37)$$

د $a_n \rightarrow 0$ او $b_n \rightarrow \infty$ لپاره باور لري يا صدق کوي.

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{0}{\infty} = 0, a_n > 0, \quad (18.38)$$

$$\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \frac{\infty}{0} = \infty, a_n > 0, \quad (18.39)$$

$$a_n^{b_n} \rightarrow 0^\infty = 0, a_n > 0. \quad (18.40)$$

په دې همدا اوس بنوول شوي اړیکو کی لاندې افادې ټاکلی افادی دي (نیونه د ۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۴۰) پورې دی په پام کي ونيول شي) :

$$\begin{aligned} \infty + \infty &= \infty, a + \infty = \infty, \infty \cdot \infty = \infty, a \cdot \infty = \infty, \\ \frac{a}{\infty} &= 0, \frac{a}{0} = \infty, \frac{0}{\infty} = 0, \frac{\infty}{0} = \infty, \\ \infty^\infty &= \infty, a^\infty = \infty (a > 1), a^\infty = 0 (0 < a < 1), \end{aligned} \quad (18.41)$$

$$0^\infty = 0, 0^a = 0 (a > 0), 0^a = \infty (a < 0),$$

$$\infty^a = \infty (a > 0), \infty^a = 0 (a < 0), \log 0 = -\infty.$$

په لاندې بیلگه کی به یو څو گڼونپرلپسی ورکړ شي، کومی چی د ټاکلو افادې په لور لارښودوي(بیایي) :

بیلگه ۱۸ . ۳:

$$\begin{aligned} n^2 &= n \cdot n \rightarrow \infty \cdot \infty = \infty, & \sqrt{n} &= n^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty^{\frac{1}{2}} = \infty, & \frac{1}{n^2} &\rightarrow \frac{1}{\infty} = 0, \\ 2^n &\rightarrow 2^\infty = \infty, & \frac{1}{n^n} &= \left(\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 0^\infty = 0, & \log \frac{1}{n} &\rightarrow \log 0 = -\infty, \\ \frac{n}{\sin \frac{1}{n}} &\rightarrow \frac{\infty}{\sin 0} = \frac{\infty}{0} = \infty, & n \cdot \log \frac{1}{n} &\rightarrow \infty \cdot (-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

هغه پرلپسی چی د ناټاکلو افادو (۱۸ . ۲۳) . په لور مو لارښودوي، څه ستونځي پېښوي. دا د هوښیارو فورمبدلولو یا بڼه بدلون په بنسټ په داسی پرلپسو بدلیږي چی څرگنده – یا ټاکلي افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بیایي یا چی د هغي کونورگنتځاننیوني معلوم دي . لومړی دي یو څو ځانگړي پرلپسی وکتل شي:

پرلپسی مو د $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ غړو سره د نا ټاکلی افادی 1^∞ په لور بیایي او د (۱۸ . ۱۲) له مخی پوله ارزښت e لري. سری ښوولی شي (دلته دي دا نه ښوول کیږی) ، چی دا پولی ځاننیونه ساتلي پاتی کیږي، که څوک د $a_n = 1/n$ په ځای یوه په خوښه د صفر پرلپسی $a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0$ وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوښه صفر پرلپسی $\{a_n\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, a_n \neq 0,$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

(18.43)

بیلگه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بیلگي په توگه لاس ته راځي:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n(-1)} = \left(\left(1 + \left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} \rightarrow e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a} \cdot a} = \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a \rightarrow e^a, \quad \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n-3} &= \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n-3}}{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n-3}} = \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{-3} \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^3 \cdot \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)^2}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 \cdot \left(\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n\right)^2} \rightarrow \frac{1^3}{1^3} \cdot \frac{(e^2)^2}{(e^{-3})^2} = e^{10}, \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow e^0 = 1,$$

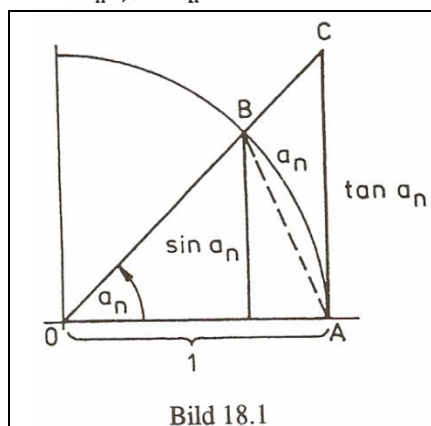
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^n \rightarrow e^\infty = \infty.$$

د $a_n \rightarrow 0$ لپاره پرلپسی $(\sin x)/n$ د ناتاکلی افادې $0/0$ په لور ځي. لاندې باور لري :
جمله ۱۸ . ۴: د هرې په خوښه صفر پرلپسی

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, a_n \neq 0,$	(18.44)

لپاره باور لري (د لنډې الماني ژباړه a_n په لينده کچ)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad (a_n \text{ im Bogenmaß}). \quad (18.45)$$



اوبونه د: $\sin(-a_n) = -\sin a_n$ له امله او له دې امله

$$\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$$

چی د $\frac{\sin a_n}{a_n}$ د a_n د لټه دې (۱۸ . ۴۵)
(یواځي د $a_n > 0$ لپاره وینول شي.

مور د لټه د یوونگردي یا واحد داېرې د کونج بلواک څخه گټه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ . ۱) د

$$\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}, \quad \text{درې گوډي OAB منځهواره:}$$

د گردی سکتور یا گردیبرخه OAB منځهواري

$$\frac{1^2 \cdot a_n}{2}, \quad \text{څخه کوچنی ده، او دا بیرته د درېگوډي}$$

$$\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}, \quad \text{OAC د منځهواري.}$$

څخه کوچنی دی. له دې امله باور لري

$$a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n} \quad \text{او} \quad \sin a_n < a_n$$

اوښونه د: $\sin(-a_n) = -\sin a_n$

$$\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$$

له امله او له دې امله چې

دی، دلته دې (۱۸ . ۴۵) یواځې د $a_n > 0$ لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونگردي یا واحد داېرې د کونج بلواک څخه ګټه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ .

(۱) د درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}$,

د ګردۍ سکتور یا ګردبیرڅه OAB

منځهواړې $\frac{1^2 \cdot a_n}{2}$,

$$\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$$

څخه کوچنی ده، او دا بیرته د درې ګوډي OAC د منځهواړې.

څخه کوچنی دی.

$$a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$$

له دې امله باور لري $\sin a_n < a_n$ او $\sin a_n < a_n$

او ورپسې

$$\frac{\sin a_n}{a_n} < 1, \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n}, \text{ also } \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1.$$

د $\cos a_n \rightarrow 1$ له امله $a_n \rightarrow 0$ لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري.

بیلګه ۱۸ . ۵ : د جملې ۱۸ . ۴ په مرسته د بیلګې په توګه لاس ته راځي:

$$n \cdot \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1,$$

$$n^2 \cdot \sin \frac{1}{n} = n \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$\sqrt{n} \cdot \tan \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\cos \frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

بیلګه ۱۸ . ۶ :

په پرلپسی $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$,

چی د ناکلی افادی $\frac{\infty}{\infty}$ په لور مو هڅوي کوبنس کیري چی د مات باندې او ماتلاندې په یوه گڼ وویشل شي، چی یو ټاکلی وینه یا افاده ترې رامنځ ته شي.

$$\frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 - 1} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{3}{2}, \quad \frac{6n^3 + n - 1}{7n^4 + n^2 + 1} = \frac{\frac{6}{n} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{7 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \rightarrow \frac{0}{7} = 0,$$

$$\frac{6n^3 + n - 1}{2n^2 - 1} = \frac{6n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{\infty}{2} = \infty, \quad \frac{\sqrt{n^2 - 1} + n - 1}{n + 1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{2}{1} = 2.$$

بیلگه ۱۸. ۷: پرلپسی $\{a_n - b_n\}$ ، چی ناکلی افادی $\infty - \infty$ ته مو لارښودوي، کید ی شي د نورو ترمنځ لاندې بڼه غوره کړي:

$$a_n - b_n = \frac{(a_n - b_n)(a_n + b_n)}{a_n + b_n} = \frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n + b_n} \rightarrow \frac{?}{\infty}.$$

که صورت پولې ته و هڅیري، نو یوه ټاکلی افاده بیا مخ ته لرو.

$$\sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n = \frac{4n^2 + 5n + 2 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 5n + 2} + 2n} = \frac{5 + \frac{2}{n}}{\sqrt{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}} + 2} \rightarrow \frac{5}{4},$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{2n-1} = \frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{\frac{2}{n} - 1}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}} \rightarrow \frac{-1}{+0} \rightarrow -\infty,$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \rightarrow \frac{2}{\infty} = 0.$$

تمرینونه:

د ورکړ شوي پرلپسي $\{a_n\}$ یا ترادف پوله ارزښت a وشمیرئ (که شتون وري)! $n_0(\epsilon)$ وټاکئ، داسې، چې د ټولو $n > n_0(\epsilon)$ (18.6): لپاره باور

1. a) $a_n = \frac{n+1}{2n}$

b) $a_n = \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{1}{n^3}$

ولري.

c) $a_n = n \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - n$

d) $a_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$

د لاندې پرلپسیو $\{a_n\}$ پوله ارزښت وشمیری، که شتون ولري.

1. a) $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$

b) $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c) $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$

d) $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e) $a_n = \left(\frac{3n-2}{3-6n} \right)^2$

f) $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g) $a_n = \frac{2 - \sqrt[3]{n^2}}{n^2 + 5}$

h) $a_n = \frac{3 + (-1)^n + 2n}{1 - 3n}$

i) $a_n = \frac{4\sqrt{n} - 10n}{n\sqrt{n}}$

j) $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k) $a_n = n \left(1 - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}} \right)$

l) $a_n = n \left(\sqrt[3]{n^2+2} - \sqrt[3]{n^2+1} \right)$

2. a) $a_n = \left(1 + \frac{4}{n} \right)^n$

b) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n$

c) $a_n = \left(\frac{cn+1}{cn} \right)^n$

d) $a_n = \left(\frac{2+n}{n-4} \right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{\left(1 - \frac{2}{n} \right) (n+3)}{n+2} \right)^n$

f) $a_n = \left(1 - \frac{5}{n} \right)^{\frac{n}{4}+3}$

g) $a_n = \sqrt[n]{3}$

h) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a) $a_n = [2n^{-1} \cdot \sin(2n^{-1})]$

b) $a_n = n \cdot \sin \frac{1}{n}$

c) $a_n = n \cdot \tan \frac{1}{n}$

d) $a_n = \sqrt{n} \tan \frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $a_n = 2n^2 \cdot \cos \frac{1}{n^2} \cdot \tan \frac{1}{n^2}$

f) $a_n = \sin \frac{1}{n} - n \cdot \cos \frac{1}{n}$

19 پوله (حد) "The Limit"

لاندې د اعدادو ترادف (پرلپسې) لرو:

$$(1) \quad 1/n, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$$

$$(2) \quad 3/2, 4/3, 5/4, \dots, (n+1)/n$$

$$(3) \quad 2, 4, 6, \dots, 2n$$

که n د ناپای په لور یاني $n \rightarrow \infty$ ته لار شي، نو د پورته ترادفونو څخه (۱) د صفر په لور، (۲) د یو په لور او (۳) د ناپاي په لور ځي.

د Limit مانا پوله (حد) ده، چې له هغې تیرېدنه اجازه نه لري. په پخواني روم کې د یوه ښار د قلعي نوم هم Limit وو. په ریاضیاتو کې، لکه په ترادفونو (پرلپسې) کې مو چې ولیدل لیمیت د پولي یا حد مفهوم لري.

د پولي (حد) د استعمال مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوه فنکشن یا تابع سلوک یا کاروایی داسې وڅیړو لکه څنګه، چې د فنکشن یا تابع (بلواک) د افقي محور (پروت - x محور (abscissa)) باندې پرلپسې یا ترادفونه یوې پولي یا حد (ټکي) ته ورنزدېکېدنه. دا لکه په پورته ننوتنه کې، چې پرلپسې یا ترادفونه په پروت محور یوې پولي ارزښت ته ځي. وبه گورو، چې پوله یا حد په ریاضیاتو کې ددې لپاره کارول کیږي، چې مشتق وپېژنو

فعالیت :

-ایا تاسو په ورځني ژوند کې د پولي (حد) د کلمي سره بلد یاست؟

ايا تاسو په ورځني ژوند کې يوه بيلگه راوړې شۍ، چې يوې پولې ته له دواړو لورو، له
بنۍ و کين لورته او همدول له کين و بنې لورته نژدې شۍ يا لاړ شۍ؟

په يوه ټاکلي ځای کې د توابعو پوله :

يادونه: موږ له دې وروسته د پولې په ځای پوله ارزښت لیکو، چې دا ټيک زموږ غوښتنه
په گوته کوي.

فعاليت ۱ : يوه تابع $f(x) = x + 2$ په پام کې ونيسۍ، چې پروتولارسيستم يا سيستم

قيمت وضعيه کې ټکي $P(2,4)$ لري

۱ - د تابع جدول وکارۍ.

۲ - د تابع گراف وکارۍ

۳ - $f(2)$ پيدا کړۍ او د x خوزښت (حرکت) باندې بحث وکړۍ که x د ۲ ارزښت ته
دواړو لورونږدي شي

۴ - د x پولې ته تلنه په گراف (څيره) کې روښانه کړۍ.

بيلگه ۱ :

يوه تابع $f(x) = 2x$ او يوټکي P_0 دې ورکړ شوی وي، چې کواوردينات (3/6) لري.

(۱) د تابع جدول وکارۍ

(۲) د تابع کراف يا څيره , وکارۍ

(۳) $f(3)$ پيدا کړۍ او د $f(x)$ تلنه باندې بحث وکړۍ که x د "3" ارزښت ته نژدې شي

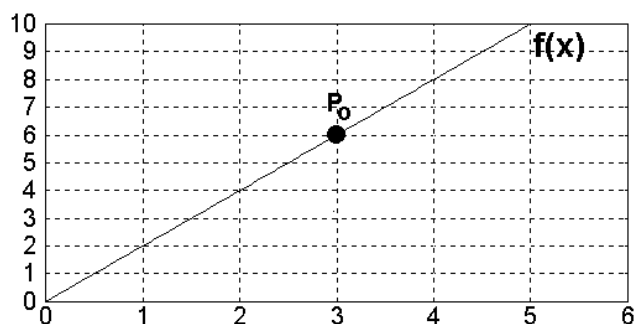
(۴) د $f(x)$ پولې ته تلنه په څيره کې روښانه کړۍ.

اوس غواړو دا پورته فعاليت روښانه کړو:

(۱) د تابع جدول (دولۍ يې گران لوستونکي پوره کوي)

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	0	2	4

(۲) د تابع څیره



(۳) $f(3) = 6$ او غواړو د درې ارزښتونو څخه چې له ښي او کيني لور و ۳ ته ورنژدې کېږي و گورو، چې په دې درې ارزښتونو کې چیرته ځي. ددې لپاره لاندې ارزښتونه په دوه جدولونو کې څیرو

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې گورو، چې له کين لور وکښته ۲ ته نژدې کېږو او له ښي لور له کښته و پورته لورته هم ۲ ته نژدې کېږو. بل جدول پروت کارو. له ښي و کين لور ته له کين و ښي لورته

————— 1 —————

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

—————→ 6 ←————

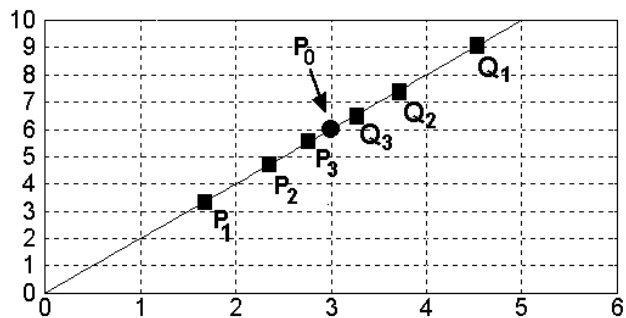
په درې پړاوونو کې د $f(3)$ قېمت د $f(x)$ قېمتونو سره پرتله کېږي. که x و 3 ته ورنژدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که x و 3 ته ورنژدې شي، نو د $f(x)$ پوله (حد)، برابر په 6 دی او دا داسې لیکو: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

۴) اوس پورته ګراف په لاندې توګه رسموو او ښی او کین لور ته موخه ور ټکي - لکه په پورته جدول کې - په نڅېنه کوو.

د لاندې څپرې له مخې ټکي $P_1, P_2, P_3, \dots$ په پام کې نیسو، چې ټکي P_0 ته تل له کین لور نژدې کېږي. او همداسې ټکي $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ چې له ښی لور ټکي P_0 ته نژدې کېږي.

کنټل کېږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و ټکي P_0 ته نژدې کېږي په همغه کچه د تابع ارزښتونه و 6 نژدې کېږي (د ټکي $P_0(3,6)$ قېمت له امله)



که په ګراف کې ځای $x=3$ ته نژدې شو، نو تابع ارزښت یا فنکشن ارزښت و قېمت (ارزښت) 6 ته نژدې کېږي.

وايو: 6 د فنکشن $f(x)$ پوله ارزښت دی د $x \rightarrow 3$ لپاره (لوستل: x د 3 (درې) په لور تلنه).

د پوله ارزښت لپاره مو لیکډول لیکښه (په پرله پسې یا ترادف کې) پیژندلی:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

يادونه: د تابع پوله يا حد په هغه ځای کې چې تابع تعريف نه وي هم کيدی شي شته وي:

په پورته کې مو د يوه تابع $f(x)$ حد په $x=3$ ځای کې تر څېړنې لاندې ونيو. دلته تابع په $x=3$ کې پېژند يا تعريف درلود.

اړين نه ده، چې تابع د $x=3$ په ځای کې تعريف وي، ځکه چې پوله ارزښت د x لپاره يواځې د $x=3$ په نږدې کې تشرېح شوې.

پام: په ځنو فنکشنونو يا توابعو کې، پوله يا حد، په داسې ساده ډول لاس ته نه شو راوړی - لکه د مخه - مگر د تابع د ساده بدلون له لارې دا کار سرته رسولی شو.

بيلگه ۱:

$$\text{تابع } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; x \neq 1 \text{ راکړ شوي}$$

(۱) د تابع جدول او گراف وکارئ!

که صور د $x-1$ سره لنډ کړو، نو لرو:

$$f(x) = x + 1$$

د تابع " $f(x)$ " خوزښت تر بحث لاندې ونيسئ که " x " و " 1 " ته نږدې شي يا همداسې که $x \rightarrow 1$.

له دواړو پاني له گراف او جدول څخه موږ لیکو چې $f(x)$ د ريل عدد "۱" په لور هڅيږي. نو

څيره دې گران
لوستونکي وباسي

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

له دې امله روښانه ده چې تابع په هغه ټکي کې تعريف (پېژند) نه لري، په هغه کې چې پوله (حد) شمېرل شوی.

يادونه: په پورته ډول تابع به سملاسي پسې وڅېړل شي، خو د هر څه لومړی پېژند راوړو:

پېژند (تعريف):

تابع $f(x)$ يوه پوله L لري، که x د يوه ريل عدد c په لور تړلی لار شي، او داسې

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

بي لیکو:

فعاليت: ايا دا پېژند رښتيا دی، که $f(c) \neq L$ وي؟

فعاليت: که ولرو: $|x|$ ، چې تل مثبت دی.

- دا بي له دې مطلق ارزښت څنگه لیکو؟

- ايا دا هغو اعداو کارولی شو، چې يو الله بل سره د شمېرنيزو نښو له لارې تړلي وي، يعنې چې اعداد يو له بل سره د جمعې، تفريق ... له لارې سره تړلي وي؟

فعاليت: هغه توابع چې په يوه عدد د بېلگې په توگه صفر کې تعريف نه وي، څه بلل کيږي

بيلگه ۲: تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ، $x \neq 0$ راکړ شوي

(۱) تابع وليکي، بي له دې، چې سومبول "||" وکاروي:

(۲) د تابع گراف وکاري

(۳) د $f(x)$ ارزښت پيدا کړي، که x له بني لور و ۱ ته نژدې شي

(4) د $f(x)$ ارزښت پيدا کړی که "x" له کین لور و 1- ته نژدې شي

(5) وښایاست چې تابع $f(x)$ څو پوله ارزښتونه لري .

یادونه: که یوه تابع چې په صورت او مخرج کې دارونده ارزښت لپاره **صفر ولري** او دا **صفر ځایونه** له منځه تللی شي، نو دا ډول تابع په صفر ځای کې بې تعریف ده (یا تشیا؟ functional gap) لري.

ښوونه :

(۱) تابع بې له سومبول "||" داسې لیکو:

$$f(x) = \begin{cases} 1; x > 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$$

(2) د تابع گراف انځور و:

که څیره ونه کښل شوه ساده ده

(3) د $f(x)$ ارزښت که x له ښي لور و 1 ته نژدې شي ، لاندې پوله راکوي

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

(4) د $f(x)$ پوله ارزښت که "x" له کین لور 1- ته نژدې شي، په لاندې ډول دی.

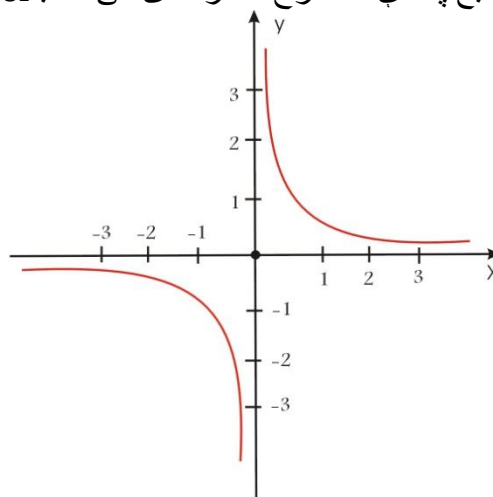
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$$

(5) گورو چې x ،،دوه،، ارزښتونو (1) او (-1) ته نژدې شي ، نو دوه پوله ارزښتونه لري یعنې $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = \pm 1$ ، نو له دې امله $f(x)$ پوله نه لري

بیلگه ۳ : تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ لرو، چې $x \neq 0$ دی.

تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ په $x = 0$ ځای کې تابع ارزښت نه لري یانې په $x=0$ تعریف نه ده. دا په صفر ځای کې قطب (Pol) لري (۱). لاندې څیره دې وکل شي.

(۱) یادونه: هغه تابع، چې مخرج یې صفر وي او صورت یې صفر نه وي، وایو چې تابع په دې د مخرج صفر ځای کې قطب Pol لري.



و $x=0$ ته د نږدې کېدو لپاره ترادف (پرلپسي) $(x_n) = \frac{1}{n}$ ټاکو.

د اړونده تابع ارزښتونو ترادف (پرلپسي) $(x_n) = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}} \right) = n$ دی.

دا د $n > 0$ لپاره یو نامحدود صعودي ترادف دی،

او د $n < 0$ لپاره نزولي-یا متناقص ترادف دی.

دا په دې معنی، چې تابع $f(x)$ په 0 ځای کې حد نه لري. دا هلته یو قطب لري.

قضیه: که تابع " $f(x)$ " همغه پوله (حد) " L " ولري که " x " له ښی یا کین لوري وه " c " ته نږدې شي، نو پوله (حد) شته دی او د " L " سره برابره ده.

د حدونو خویونه یا خواص : " Properties of Limits "

فعالیت :

په دې برخه کې د ثابتو — او کټمټ توابعو Identity function حدونه وشمیری

د لیمیت خویونو څخه کار واخلی

د پولینوم تابعو حد (پوله) پیدا کړی

پوهیږو : په ریاضیاتو (شمیرپوهنه) کې ټول توابع چې راځي د ساده توابعو ګډوله والی combination دی، لکه د توابعو جمع (زیاتون، ضرب) (ځل) وېش او زنحیرونه composition. دلته دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g(x) = x$ شته، که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$h(x) = x + C, \text{ یا } L(x) = cx, \text{ یا } m(x) = x^2 \text{ او داسې نور}$$

هڅه: د توابعو $f(x) = x$, $g(x) = x - 2$ څخه کار واخلی، چې درې نورې توابع ترې لاس ته راوړی

فعالیت :

ایا د یوې تابع پوله کېدی شي د تابع له حل څخه پیدا شي؟

د بېلګې په توګه، که ولرو

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3 \lim_{x \rightarrow 2}$$

نو دا تابع ولیکی.

یادونه: د پورته کارونې په څیر همدا څه د هرې ثابتې تابع لپاره رښتیا دی

د یوې ثابتې پوله ارزښت: که a او b ثابتې وي، نو $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ باور لري

په همدې ډول کټمټ يا ايډنټيک تابعو $f(x) = I(x) = x$ لپاره هم لرو ، که " c " کوم حقيقي عدد وي ، نو x و c ته نږدې کيږي. دا ،، ټيک داسې ده لکه ،، چې $f(x) = I(x)$ و c ته نږدې شي فعاليتونه:

1) که $f(x) = x$ ، $g(x) = 2$ وي ، نو لرو :

$$g(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \quad 1) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 ,$$

2) که وي $h(x) = f(x) + g(x)$ لرو

$$h(x) = x + 2$$

3) د $h(x)$ گراف

رسم دې گران لوستونکي د ځانونو لپاره وکارې
4)

$$\begin{array}{c} \longrightarrow 1 \longleftarrow \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & .5 & .8 & & 1.2 & 1.5 & 2 \\ \hline 2 & 2.5 & 2.8 & & 3.2 & 3.5 & 4 \\ \hline \end{array} \\ \longrightarrow 3 \longleftarrow \end{array}$$

تاسو په ياد ولری يا وليکی

$h(x) = \lim_{x \rightarrow 1}$	$x + 2 = 3 \lim_{x \rightarrow 1}$

او $h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \lim_{x \rightarrow 1}$

هڅې

۱ (که $f(x) = -2$ ، $h(x) = x$ وي، پيدا کړئ

a) $f(x) \pm h(x)$

b) $f(x) \cdot h(x)$

۲ (وهڅيرئ، چې د پورته توابعو د a او b) لپاره پولي وټاکي، که x عدد 3 ته نږدې شي.۳ (که $g(x) = x$ وي، نو پيدا کړئ $\lim_{x \rightarrow 4} 4x$.۴ (که $h(x) = x$ ، $f(x) = -2$ وي پيدا کړئ

(a) $f(x) + h(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + h(x))$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

بيلگه ۳: د $g(x) = \sqrt{3-x}$ گراف وکارئ او پيدا کړئ

a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، b) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$; c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$

حل:

دلته دي گراف وکښل شي....

له گراف څخه

$$g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2}$$

الف- په لاندې توگه مخ ته ځو:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

ب) له گراف څخه $g(x) = 2 \lim_{x \rightarrow -1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} (3-x)} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{يادونه:}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x)} = \sqrt{0} = 0$$

گڼ دلايل شته چې پولې شميرنه ساده کوي، موږ به دا لاندې بې له ثبوتو ومنو که f او g توابع وي C او L او M رييل عددونه وي، داسې چې باور ولري:

$$\lim_{x \rightarrow C} g(x) = M, \text{ او } f(x) = L, \lim_{x \rightarrow C}$$

$$1) \quad ((f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow C} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow C}$$

$$= \lim_{x \rightarrow C} f(x) + \lim_{x \rightarrow C} g(x) = L + M$$

$$2) \lim_{x \rightarrow C} (f-g)(x) =$$

$$((f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow C} f(x) - \lim_{x \rightarrow C} g(x) = L - M \lim_{x \rightarrow C}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow C} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow C} (f(x) \cdot g(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow C} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow C} g(x) = L \cdot M$$

$$4) \lim_{x \rightarrow C} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow C} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}; (M \neq 0)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow C} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

د) $f(x) \geq 0$ لپاره او د ټولو x ارزښتونو لپاره چې C ته نږدې کيږي.

پوښتنه : موږ لاندې تابع لرو :

$f(x) =$	$x^2 - 1$	$x \leq 0$
	$x - 1$	$0 < x < 2$
	$2x + 1$	$x \geq 2$

پیدا کړی

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad a) \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad d) \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

حل :

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1$$

$$\text{حد شته او } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \text{ دی:}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (2x + 1) = 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 1) = 2 \times 2 + 1 = 5 \text{ له ښي لورې}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 2 - 1 = 1 \text{ له کيڼ لورې}$$

له دې امله پوله (حد) نه شته

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$$

بیلگه: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، پیدا کړی، که $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ وي

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5$$

$$2 + 5 = 7 \times 4 - 3 \times = 2$$

$\lim_{x \rightarrow -2} (f(x))^n$ نو پیدا کړی $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$ که فعالیت :

یادونه:

د یوه پولینوم لیمیت ټیک داسې شمیرل کيږي، لکه د یوه فنکشن لیمیت

بیلگه ۶ :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) ، پیدا کړی$$

حل : $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی

که x و 3 نږدې شي پوله یا حد کیدی شي د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 1)} \\ &= \frac{3^2 - 2 \times 3 + 5}{2 \times 3^2 + 1} = \frac{8}{19}\end{aligned}$$

د راشنل- نسبتي- يا کسري فنکشنونو پولې

مونږ دا لاندې د پولينومونو ویش لرو

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}; b_0 \neq 0$$

په پورته پولينوم ویش کې که $x=0$ وي، نو $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي د $b_0 \neq 0$ سره.

که $n < m$ وي او x ناپای ته لاړ شي، پولينوم ویش صفر ته ځي

که $n > m$ وي او x ناپای ته لاړ شي، د پولينوم ویش د ناپای په لور ځي.

$$\text{که } n = m \text{ وي، نو } R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n}{b_m} \text{ لرو}$$

پام : د نسبتي يا کسري فنکشنونو (ناطقو توابعو) پوله ارزښت (حد) غواړو پيدا کړو.

ددې لپاره چې د ،،وياندو،، توابعو پولې پيدا کړو، که شته وي، نو د مختلفو لارو يا متودونو څخه کار اخلو.

پوهیرو، چې د پولینومي تابعو پوله (حد) - د یوه ورکړ شوي x ارزښت لپاره، لکه د نورو ساده تابعو په څېر، چې د جمعې، تفریق، ضرب او وېش په څېر ورکړ شوي دي وشمیرو.

که ولرو: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ نو د تابع خواص د $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ لپاره ساده

کو چې د پورته پولینوم ویش، چې گویاتابع ده پوله یا حد وشمیرو.

$$\text{بیلگه ۱: پیدا کړی } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x + 2}$$

که $x = 1$ وي، نو تابع تعریف ده او لرو

$$\frac{x^2 + x}{x + 2} = \frac{(1)^2 + 1}{1 + 2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1}$$

Substitute(ځای په ځای کړو $x = 1$ که

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ نو لاس ته راځي}$$

$$\text{بیلگه ۲: پیدا کړی } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x + 3}$$

حل: تابع په $x = 0$ کې تعریف دی، نو لرو:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 3} = \frac{0 - 1}{0 + 3} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$\text{بیلگه ۳: پیدا کړی } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$$

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف ده، نو لرو

$$= \frac{1^2 + 1 - 2}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه وي، نو د مختلفو متودونو څخه کار اخلو، چې پوله (حد) پیدا کړو، که شته وي.

بیلگه ۴ : پیدا کړی $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$

حل : دا چې تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف نه ده، نو پوله (حد) د تابع د حل له لارې نه شي پیدا کیدی. دا کېدی شي داسې پیدا کړو، چې تابع په ضریبونو تجزیه کړو .

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} \lim_{x \rightarrow 2}$$

د تابع پوله (حد) که x و ۲ ته نږدې شي، دا مانا لري، چې $x \neq 2$ دی.

دا راشنل فنکشن (کونګه؟ تابع) رالښیږي: $\lim_{x \rightarrow 2} (x-4)$ او لاندې پوله لري:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-4) = 2-4 = -2$$

بیلگه ۵: پیدا کړی $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$

ګور، چې تابع په $x = 16$ کې تعریف نه ده یانې $x \neq 16$.

په یاد ولری چې : $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ د $\sqrt{a} \sqrt{b} + \sqrt{a} \sqrt{b}$ جوړه (مزدوج) دی او برعکس.

حل: د جوړې (مزدوج) سره ټی ضرب کړی

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} \times \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 4} \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x} + 4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x} + 4} = \frac{1}{\sqrt{16} + 4} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

بیلگه ۶ : پیدا کری

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

حل : تابع په $x=3$ کې تعریف نه ده ، نو مخرج او صورت د مخرج په مزدوج ضربوو او لرو:

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} -1(\sqrt{x+1}+2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \\
 &= -(\sqrt{3+1} + 2) = -4
 \end{aligned}$$

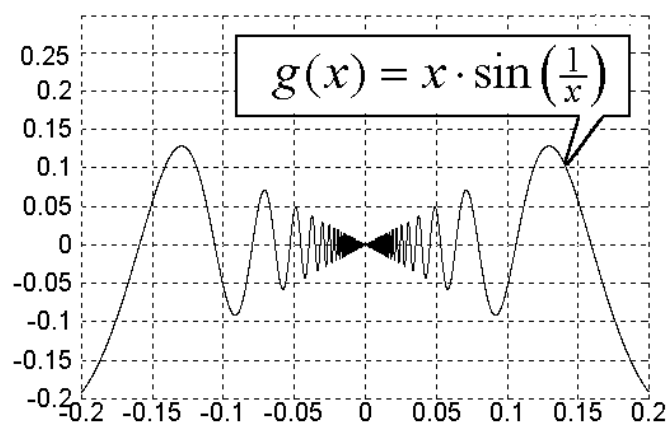
بیلگه ۷ : پیدا کری

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2-1}$$

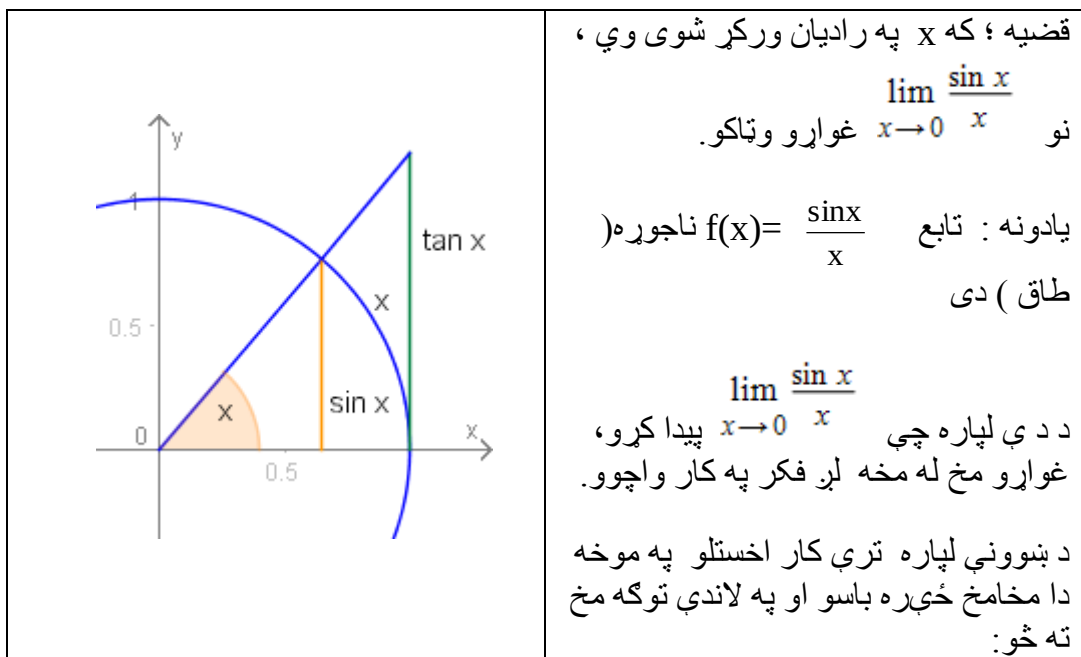
حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف نه ده، نو په لاندې توګه مخ ته خو

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x^2-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)} \\
 &= \frac{10}{-2} = -5
 \end{aligned}$$

د مثلثاتي توابعو پولې



بیلګه:



په يوه انټروال $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ کې د رسم له حالته سملاسي لاندې نا برابرې يا نامساوات باور لري

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

موږ له دې سره لرو $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$ او $x > 0$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x}$$

او $\sin x$ د سره ضرب (ځل) له امله لاندې نامساوات لاس ته راځي

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

د پولې ته تگ له امله لاس ته راځي

$$\leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad 1 = \lim_{x \rightarrow +0} \cos x$$

دا په دې معنا دی، چې غوښتونکي پوله ارزښت 1 دی.

د دې ښوونې سره موږ ښی پوله ارزښت یې ډاکر، د کین پوله ارزښت لپاره په ورته توګه مخ ته ځو او پوله ارزښت د $x < 0$ لپاره پیدا کوو، یعنې له دې څخه هم لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو، نو دا لاندې لاس ته راوړنه هم لرو

$$= \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin \alpha}{-\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin x}{x}$$

.....(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

د مساواتو (3) + (4) څخه غوښتنه لاس ته راځي

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

بیلګه ۱: حل کړئ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

حل: وي دې $2x = \alpha$ که $x \rightarrow 0$ نو $\alpha \rightarrow 0$ او

$$= \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin 2x}{x}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي :

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \times 1 = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

بیلگه ۲ : وښایاست $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$

که $y = 5x$ وي ; او $x \rightarrow 0$ ، نو $y \rightarrow 0$ هم

$$\frac{\sin 5x}{5x} \text{ او } = \frac{5}{2} \frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} = \frac{5}{2} \frac{\sin 5x}{2x}$$

$$= \frac{5}{2} \frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{2} \frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}$

$$1 = \frac{5}{2} \times = \frac{5}{2}$$

قضیه : په درېگودي گچ یا مثلثاتو کې بل غوره پوله ارزښت دا لاندې دی.

$$\frac{\tan x}{x} \lim_{x \rightarrow 0}$$

بیلگه : وښایاست $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}$

حل : وي دې $\theta = 3x$ ، نو $x = \theta / 3$ ، که $\theta \rightarrow 0$ نو $x \rightarrow 0$

$$\text{له دې امله} = \frac{3 \tan 3x}{(3x)} = 3 \frac{\tan \theta}{\theta} \frac{\tan 3x}{x}$$

$$= 3 \times 1 = 3 \text{ نو}$$

$$\frac{5 \tan 2x}{7x} \lim_{x \rightarrow 0} \text{ بیلگه : حل کری }$$

$$\text{حل : وي دي } 2x = y, \text{ نو } x = \frac{y}{2} \text{ دی}$$

$$\text{که } x \rightarrow 0 \text{ وي، نو } y \rightarrow 0 \text{ دی}$$

له دي امله

$$= \frac{5}{7} \cdot \frac{2 \tan 2x}{2x} \frac{5 \tan 2x}{7x}$$

$$= \frac{10}{7} \frac{\tan 2x}{2x}$$

$$= \frac{10}{7} \frac{\tan y}{y}$$

نو

$$\frac{5 \tan 2x}{7x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{10}{7} \frac{\tan y}{y} \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$= \frac{10}{7} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y}{y}$$

$$1 = \frac{10}{7} \times = \frac{10}{7}$$

پای

وهڅیری ، چې وینایاست:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \text{ که } x \text{ په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو}$$

الف) تانجنت $\tan x$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو ولیکئ

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو ولیکئ

پ) پوله پیدا کړئ

ت) ایا قضیه رښتیا یا ټیک ده؟

په یاد ولری:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 1$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \text{ حل کړئ : بیلگه ۵ :}$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \text{ حل :}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x$$

$$0 = 0 \times 1 = 0$$

بیلگه ۶ : وشمیری $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

حل : شمیرو

$$\frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} \lim_{x \rightarrow 0} x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 \tan 3x}{3x}}{\frac{5 \sin 5x}{5x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 3x}{5 \sin 5x}$$

$$= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x}}{5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta}}{3 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{5}$$

بیلگه ۷ : وشمیری ؛ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2}$

حل : شمیرنه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{4x+6x}{2} \sin \frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin -x}{x^2}$$

۶۰۳

پوله (حد)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin x}{x^2} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= 10 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (y = 5x) \\ &= 10 \times 1 \times 1 = 10 \end{aligned}$$

بیلگه ۸ : پیدا کری

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x - \alpha}$$

حل :

$$\begin{aligned} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x - \alpha} &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{2 \cos 3(x + \alpha) \sin 3(x - \alpha)}{x - \alpha} \lim_{x \rightarrow \alpha} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \alpha} \cos 3(x + \alpha) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin 3(x - \alpha)}{x - \alpha} \\ &= 2 \cos 6\alpha \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{3 \sin 3(x - \alpha)}{3(x - \alpha)} \end{aligned}$$

وي دي $y \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \alpha$, $x - \alpha = y$ نو لاس ته راځي

$$\begin{aligned} &= 2 \cos 6\alpha (3) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \\ &= 6 \cos 6\alpha \cdot 1 = 6 \cos 6\alpha \end{aligned}$$

په یاد ولری : مثلثاتي کتمتوالی

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

بیلگه ۹ : حل کری $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\tan x|}{x}$

حل : $x > 0$

$$\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\tan x|}{x} + \frac{\tan x}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+}$$

$$= 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\tan x|}{x} - \frac{\tan x}{x} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\tan x|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x}{x}$$

$$= -1$$

لرو $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\tan x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\tan x|}{x}$

گورو، چي د پورته تابع پوله يا لیمیت نه شته

ناپړېکيدنه (متما دیت) “Continuity”

په دې برخه کې لولو ، چې یو فنکشن یا یو تابع په یوه ټکي یا یوه اینټروال کې څنگه ځان نیسي یا کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې توب وهي، یا پرې کیږي او که یا په نه پرېکیدنې توګه د اینټروال په دننه کې ځغلي.

د تابعو ناپرېکیدنه Continuous functions

په دې موضوع کې موږ د د یوې تابع د ناپرېکیدنې (متمادیت) په هکله څرګنه کوو او د ناپرېکیدنې یا متمادیت پیژند(تعریف) ورکوو.

// رسمه //

(1)

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

// رسمه //

(2)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

// رسمه //

(3)

$$f(x) = x^2 - 1$$

دا رسمونه دې هم ګران زده کوونکي وکارې، زه د رسم کولو ستونځې لرم (تمرین)

b دې د تابع f په پیژندور شو یا تعریف ساحه کې یو حقیقي (ریل) عدد وي. تابع f په b کې ناپرېکیدونکي (متمادي)، بلل کیږي، که د ټکي (b.f(b)) نږدې د f ګراف وکښل شي، بې له دې، چې پنسل له کاغذ پورته کړی شي.

له دې امله تابع $f(x) = x^2 - 1$ او تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ په ټکي $x=b$ کې ناپرېکیدونکي دي.

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ په $x=0$ کې ناپرېکیدونکي نه ده یانې پرېکیدونکي ده یا توپ وهي.

تابع په $x=a$ کې پرېکیدونکي ده، که پرې شي (تشیا ولري)، توپ وهي او یا ماته شي.

لرو $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ په $x = 0$ کې

نه شته

بیلگه ۱ : وي دي $f(x) = 2x + 1 ; x \geq 1$

$$1 - x ; x < 1$$

الف (گراف وکاري گراف

ب (پيدا کړی $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

پ (پيدا کړی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

که تابع په $x=3$ او $x=1$ کې نابریکيدونکي وي

حل :

الف (گراف کين لور ته کينل شوی دی

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = (2x + 1) = 7$$

ب ($f(3) = 7$

پ (

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3 \lim_{x \rightarrow 1^+}$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x = 0 \lim_{x \rightarrow 1^-}$$

له ب (او پ (څخه لرو

$$f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \lim_{x \rightarrow +1}$$

له دي امله تابع په $x = 3$ نابریکيدونکي او $x = 1$ کې پریکيدونکي ده يا نامتمادي

بیلکه ۲ : وي دي $f(x) = \frac{x^3 + x}{x}; x \neq 0$

$= 3$;

// رسمه // (الف) فنکشن رسم کری

ب (بحث وکری، چي تابع په $x = 2$ او $x = 0$ کي ناپرېکيدونکي ده او که نه

حل : الف) د تابع گراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	2	1	2	5

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$

$f(2) = \frac{2^3 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$

له دي امله د f پوله (حد) شته او $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ، نو تابع په $x = 2$ کي متمادي يا نه

پرېکيدونکي دی

وي دي $x = 0$

$f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x \rightarrow 0^+}$

$f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x \rightarrow 0^-}$

دا دا مانا لري چې $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ په دې مانا دی چې $f(0) = 3$.

دا دا مانا لري، چې $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

تابع په $x = 0$ کې پرېکړدونکې (نامتمادي) ده

که له دې شرطونو کوم یو شرط پوره نه وي نو تابع پرېکړدونکې (نامتمادي) ده

بیلګه ۳: وي دې

$$x \neq -3, \quad f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

ایا تابع په $x = -3$ کې ناپرېکړدونکې ده؟

حل (تابع $f(-3)$ تعریف نه دی، له دې امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه دی

پیژند(تعریف) :

f دې یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x=c$ لري تعریف وي.

تابع f په $x = c$ کې ناپرېکړدونکې بلل کیږي، که دا لاندې شرایطو پوره وي.

(۱) $f(x)$ تعریف دی (۲) که $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ شته وي (موجود وي)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad (۳)$$

که تابع د ټولو $x \in (a, b)$ لپاره متمادي وي ، نو تابع په واز اینتروال (a, b) کې هم متمادي دی.

$$f(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad x \leq 1 \quad \text{وي دي لکه ۴ :}$$

$$= 4+x \quad ; \quad x > 1$$

وگوری، چې تابع چېرته ناپرېکېدونکې ده او چېرته پرېکېدونکې.

حل : په $x = 1$ کې f تعریف دی

$$f(1) = 3.$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 1) = 3 \lim_{x \rightarrow -1}$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow +1} (4+x) = 5 \lim_{x \rightarrow +1}$$

$$f(x) \neq \lim_{x \rightarrow +1} f(x) \lim_{x \rightarrow -1}$$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې پرېکېدونکې (نامتدادي) ده

بیلگه ۵ : وي دي

$$= 2x^2 + 1 \quad ; \quad x < 2$$

$$f(x) = 3 \quad x = 2$$

$$= x + 3 \quad ; \quad x > 2$$

د تابع $f(x)$ متدایت په $x = 2$ کې تر بحث لاندې ونیسئ

حل : تابع $f(x)$ په $x = 2$ کې تعریف ده او لرو $f(2) = 3$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow +2} (x + 3) = 5 \lim_{x \rightarrow +2}$$

او

$$\lim_{x \rightarrow +2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

دا چې $f(x) = 3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ ده
دا په دې مانا دی، چې تابع په $x = 2$ کې پرېکږي (نامتدادي) ده

د ناپرېکږي يا متدادي توابعو خويونه

فعاليت:

(۱) د توابعو f او g جمع (زياتون) پيدا کړئ

$$(f+g)(x) = \dots\dots$$

(۲) د f او g توابع په $x=2$ کې متدادي (ناپرېکږي) دي، نو:

$$f(x) = \dots\dots\dots \& \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots\dots \lim_{x \rightarrow a}$$

(۳) د پوله ارزښتونو (حدونو) ارزښتونه وکاروئ

$$(f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \lim_{x \rightarrow a}$$

$$\dots : = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots = (f + g)$$

(a)

له دې امله $(f+g)$ په $x=a$ کې متمدادي دي.

که تابع f او g په $x=c$ کې متمدادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په $x=c$ کې متمدادي ده

(۱) د توابعو جمع $f + g$

(۲) د توابعو تفریق (کمون) $f - g$

(۳) د توابعو ضرب (خُل) $f.g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}; g \neq 0$

بیلگه ۱ : وي دې

$$f(x) = \sin x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 2$$

نو (۱) f او g په $x=1$ کې متمدادي دي.

(۲) وڅیړئ، چې الف) $\sin x + x^2 + 3x - 1$

ب) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2)$

په $x=1$ کې متمدادي که نامتمدادي دي

حل :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 2;$$

نو f په $x=1$ کې متمدادي دی

نو g په $x=1$ کې متمدادي دی

دويم خوي وڅيری

$$2) a) \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$

(۲ الف)

$$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کې متمادي ده

$$(b) (\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x) \cdot g(x)$$

$$= (f \cdot g)(x)$$

نو د ناپرېکيدونکو- يا متمادي توابعو ضرب (ځل) په $x = 1$ کې متمادي دی

بيلگه ۲ : وي دي

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = 3x - 2;$$

وڅيری، چې ايا $f(x) \cdot g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده

حل :

$$f(x) = f(2) = 3 \lim_{x \rightarrow 2}$$

$$g(x) = 4 = g(2) \lim_{x \rightarrow 2}$$

$$f(x) \cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$$

$$f(x) \cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12 \lim_{x \rightarrow 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

$$= f(2) \cdot g(2)$$

له پورته څخه لاس ته راځي، چې $f(x) \cdot g(x)$ متمادي دی

په کین لور بند اینتروال $[a, b]$ کې گراف متمادي تابع په گوته کوي یا بنایي، چیرته چې $f(a) \neq f(b)$ دی.

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ نو گراف له ټکي $(b, f(b))$ څخه نه شي انځورېدلی تر څو پرته (افقي) کرښه $y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي.

(انځور راځي)

له پورته څخه لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال $[a, b]$ کې متمادي (ناپېرېکېدونکي) او k د b ترمنځ پروت وي، نو هلته کم له کمه یو عدد c د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ شته داسې چې $f(c) = k$ دی

بیلگه ۳: وي دي $f(x) = x^3 + 4x$, $x \in [1, 2]$

و بنایي، چې یو $c \in (1, 2)$ شته داسې، چې $f(c) = 11$ وي.

حل: $f(x)$ یو پولینوم دی نو f په بند اینتروال $[1, 2]$ کې متمادي دی. لرو

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5; f(2) = 8 + 4(2) = 16$$

$$f(1) \neq f(2) \text{ او } 5 < 11 < 16$$

له دې امله یو عدد $c \in (1, 2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی

بیلگه ۴ : وي دي

$$f(x) = 2x + 4; -1 \leq x < 2$$

$$; 2 \leq x \leq 20 \quad |x-10| =$$

نو

الف) و آزمایي، چي تابع متمادي ده (ب) و آزمایي، چي يو $c \in (-1, 20)$ شته داسي چي $f(c) = 6$ دي او د c ارزښت پيدا کړي.

حل :

$$f(x) = 2x^2 + 4 = 8 \lim_{x \rightarrow 2^-}$$

$$f(x) = 10 - 2 = 8 \lim_{x \rightarrow 2^+}$$

له دي امله لرو

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$$

$$f(x) = 10 - 2 = 8$$

گورو چي تابع په $[-1, 20]$ کي متمادي دي

$$b) f(-1) = 2x - 1 + 4 = 2$$

$$f(20) = |20-10| = 10 \Rightarrow f(-1) \neq f(20)$$

$$2 < 6 < 10 \quad \text{په دي اساس لرو}$$

$$c \in (-1, 20): f(c) = 6 \quad \text{له دي امله لرو}$$

$$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2).$$

$$= 6 \Rightarrow |x-10|$$

$$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$$

$$10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$$

د c ارزښت دی 1, 4, 16

بیلگه ۵ : وي دي

$$f(x) = 2 \sin x + 3; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

وښایی چې $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ شته د کومې لپاره چې باور لري $f(c) = 4$ او c پیدا کړی.

حل : د تابع f د ساین تابع ده، نو له دې امله f متمادي (ناپربکېدونکې) دی

$$f(-\frac{\pi}{2}) = 2 \sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$$

$$f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2}) \text{ نو موږ لرو :}$$

$$1 < 4 < 5 \quad \text{تابع f متمادي ده او لرو}$$

دا په دې مانا چې $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ شته، د کوم لپاره چې $f(c) = 4$ صدق کوي

د دې لپاره چې c پیدا کړو نو لرو

$$f(c) = 2 \sin c + 3 = 4$$

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

د گراف څخه څرگندېږي، چې f په اینتروال $[a, b]$ متمادي دی، $f(a)$ او $f(b)$ متضادي مخنښې (علامې) لري، نو c د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ د منځ ارزښت جملې له مخې د $K=0$ سره کم له کمه یو C د a او b ترمنځ شته، چې لاس ته ترې راځي $f(c) = 0$.

دا په دې مانا چې $x=c$ د $f(x) = 0$ مساواتو یو حل دی. انځور شته

$$\text{بیلگه ۶: وي دي } f(x) = x^3 + 5x - 23$$

وښايي، چې تابع f د x -محور په اینتروال $(2,3)$ کې غوڅوي.

حل: f پولینومتابع ده، نو f په اینتروال کې $[2,3]$ متمادي دی.

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

اود متضادو مخنښو (عالمو) سره $f(2) \neq f(3)$

له دې امله د $c \in (2,3)$ لرو چې $f(c) = 0$ دی

د څپرکي ټولگه " Chapter Summary "

پیژند: تابع $f(x)$ یو حد L لري، که x ترلپي یو حقيقي عدد c ته لار شي. دا په دې معني چې د $f(x)$ لپاره، چې ترلی و L ته ځي دا دی، چې x ترلی و c ته

لارشي او داسې یې لیکو: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

قصیه : که $f(x)$ همغه پوله ارزښت L ولري، که x د بنۍ یا کینې لور و c ته نږدې شي، نو پوله ارزښت شته او د L سره برابر دی.

د پوله ارزښت یا حد خوښونه :

که f او g توابع وي، L ؛ c او M حقيقي اعداد وي داسې چې $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

او $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ، نو لاندې لرو:

$$1) \lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$$

$$2) \lim_{x \rightarrow c} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$$

$$3) \lim_{x \rightarrow c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

$$4) \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}; (M \neq 0)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(د $f(x) \geq 0$ او x د ټولو ارزښتونو لپاره، چې c ته ور نږدې کيږي.

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

پېژند: f د یو تابع وي، چې د ټولو x لپاره په یو واز انټروال کې چې $x = c$ ولري، تعریف وی، نو وایو چې f په $x = c$ کې متمادي، د لاندې شرایطو لاندې:

1) تعريف دى $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 2) شته دى

$$3) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

که تابع د ټول $x \in (a, b)$ لپاره متمدی وي، نو تابع په ټول انټروال (a, b) (کې متمدی ده.

پېژند: وایو چې یو تابع په یوه بند انټروال $[a, b]$ کې متمدی ده، که تابع له بني لور په $x = a$ کې متمدی وي او له کین لور په $x = b$ کې او د واز انټروال (a, b) په هر ارزښت کې متمدی وي.

د متمدی توابعو خویونه: که f او g په $x = c$ کې متمدی وي، نو دا لاندې توابع هر یو په $x = c$ کې متمدی دی.

اول) د جمعې $f+g$ تابع

دویم) د تفریق $f-g$ تابع

دریم) د ضرب $f \cdot g$ تابع

څلورم) د ویش تابع

د منځني ارزښت قضیه: که تابع f په بند انټروال $[a, b]$ کې متمدی وي او k د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ یو عدد وي، نو کم له کمه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې $f(c) = k$ باور لري.

ترینه

د $x \rightarrow \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت (حد)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^\pm$$

اول:

د ۵ وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت (منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت (منفي) عدد ورکوي یانې $\square\square$.

گراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته گراف ته ور نږدې کیږي.

دویم :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^\mp$$

د ۳- وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت (منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت (منفي) عدد ورکوي یانې $\square\square$.

گراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته گراف ته ور نږدې کیږي.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x^2 - 2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$$

دریم :

په مخرج کې فقط x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لاري هر عدد مثبت کیږي. که ۵ په یوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، یانې

گراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط له پورته لور ور نږدې کېږي سره .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x^2 - 2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^-$$

څلورم :

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت میږي.. د ۳- وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې $\square$ - .

گراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط کښته گراف ته ور نږدې کیږي.

د پربښودنې - یا ترې صرفنظر کونې اصول

اول :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm$$

په صورت کې د x توانونه، په مخرج کې د x^2 توانه په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پریښول کېږي، صرف نظر ترې کېږي) او بیا x لنډېږي. که ۱ په ډېر لوی مثبت (منفي) عدد ووبښل شي. نو $\square\square$ ترې لاس ته راځي.

څیره G_f پروت اسیمپټوت (مجانېب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنژدې کېږي.

دویم

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

- په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیونو او له ټولو ثابتو تېرېږو (صرفنظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول پوله ارزښتونه $\square\square$ لاس ته راځي.

څیره G_f مایله اسیمپټوتي راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د ۱ په اندازه ستره ده.

دریم :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

په صورته او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تېرېږو او بیا یې د x^2 سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه $-2/3$ راکوي.

څیره G_f پرته اسیمپټوت راکوي ، چې $y = -2/3$ ده.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 2x - 1}{3x^3 + 2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{3x} = \frac{-2}{\pm\infty} = 0^\mp$$

څلورم :

په صورت کې د x^2 څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تېریږو (صرف دظر پرې کوو) . که په ووبشل شي ، نو یو کوچنی مثبت یا منفي عدد یانې $0^\mp$ ترې لاس ته راځي.

څیره G_f یو پروت اسیمپټوت $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته لور ورنزدې کیږي.

شمیرنیز حلونه

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} =$$

دویم :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{0^\pm}{1} = 0^\pm$$

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو (قوسونو) راوستې او بیا د x^2 سره لنډونې وروسته مخرج د ۱ په لور ځي او صورت د $+\infty$ په لور ، نو

ترمونه $2/x$ او $1/x$ و صفر ته نږدې کیږي.

څیره G_f یوه مایله اسیمپټوت لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په ۱ لویه ده.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x} =$$

دریم :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(-2 - \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(3 + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2 - \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{2}{x}} = -\frac{2}{3}$$

- که x^2 له نوکانو راووبستل شي او بيا لاند شي، نو صورت د صفر په لور ځي يا صفر ته نژدې کيږي؛ مخرج، ۱ ته نژدې کيږي، ځکه ټول ترمونه د او و صفر ته ځي په صورت فقط ترم د صفر مخخېنه ټاکي.

څېره پرته اسيمپټوت لري له پورته او کښته نژدې کيږي سره.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 + 2} =$$

څلورم:

په صورت او مخرج کي هغه د لوی توان x يعني x^4 له نوکانو دباندې نيسو او بيا په ترتيب شمېر نيزه عمليه مخ ته بياوو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 \left(\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}{x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0^-}{1} = 0^-$$

ټوليز ځويونه :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1} = \pm\infty$$

اول :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3x - \frac{2}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

په پورته بیلګه کې داسې مخ ته تللي ی، چې په صورت کې له ټولو عددونو تېرېږو، چې د خپلواکي متحولې توان له ۱ کوچنی یعنی صفر وي او په صورت کې له ټولو آه ۲ څخه کوچني توان څخه تېرېږو. گورو، چې په صورت کې پاتې کېږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي نابای په لور ځي.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = 0^\pm \quad \text{دویم:}$$

په پورته بیلګه کې په صورت کې له ۱ او مخرج کې له ۲ څخه تېرېږو او بیا صورت او مخرج په x ویشو، چې لاس ته رانه یې یو یې د یوه ثابت عدد وېشل وي په x . چې د x سره تابع و $0^\pm$ ته ځي.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x} = \quad \text{بیلګه ۳: لرو:}$$

په صورت کې له ۲ او مخرج کې له $2x$ څخه تېرېږو او د x^2 سره لنډونې وروسته د x^2 سره لنډیږي او په دې ډول لاندې پایله لرو:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2} = 0^- \quad \text{بیلګه ۴:}$$

په صورت کې له ۱ او مخرج کې له اوو څخه تېرېږو او بیا له لنډونې وروسته یو ثابت عدد په ناپای وېشل کېږي، چې پایله یې 0^- دی، یعنی لرو:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2} = 0^-$$

۱۹. ۵. تمرینونه

۱. د بلواکو پولی

۱. ۱. لاندې پولی وټکی

1.1.1.a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$

1.1.2.a) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{1 + x}$

1.1.3.a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

1.1.4.a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{1 - \sqrt{x + 1}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

1.1.5.a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 - \cot x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x - 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 + x}{32 + x^5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a + 1)x + a}{x^3 - a^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 25} - 5}$

d) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{\cos x}{x} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

$$k) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$$

۱.۲ په ورکړشو ځایونو کې د لاندې بلواکو کین او ښی یولی وټاکي

$$a) f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{für } x = 0$$

$$b) f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad \text{für } x = 0$$

$$c) f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}} \quad \text{für } x = 1$$

$$d) f(x) = \frac{x}{1+e^x} \quad \text{für } x = 0$$

$$e) f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} \quad \text{für } x = 0$$

$$f) f(x) = \frac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}} \quad \text{für } x = 1$$

$$g) f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}} \quad \text{für } x = 1$$

$$h) f(x) = \frac{\frac{1}{2^x} + 3}{\frac{1}{3^x} + 2} \quad \text{für } x = 0$$

$$i) f(x) = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}} \quad \text{für } x = 1$$

$$j) f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x = 1$$

$$k) f(x) = \frac{x}{x+1} \quad \text{für } x = -1$$

$$l) f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} x \quad \text{für } x = -1$$

۲. ناپریکيدونکی بلواک : لاندې بلواک د کوم لپاره پریکيدونکی ځایونه لري، دا د کوم ډول ډګاو که ممکن وي، په کومه توګه دا له منځه وړ اېکیدی شي.

$$a) y = \frac{|x-1|}{x-1}$$

$$b) y = \frac{x+2}{|x+2|} \cdot x$$

$$c) y = \frac{1-x}{1-|x|}$$

$$d) y = \frac{x+2}{x+2} + \frac{1}{x+1}$$

$$e) y = \frac{x-3}{\sqrt{1+x}-2}$$

$$f) y = \frac{x-4}{\sqrt{x-2}}$$

$$g) y = \sin \frac{1}{x}$$

$$h) y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

$$i) y = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$j) y = \frac{\sin x}{x}$$

$$k) y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$$

$$l) y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$$

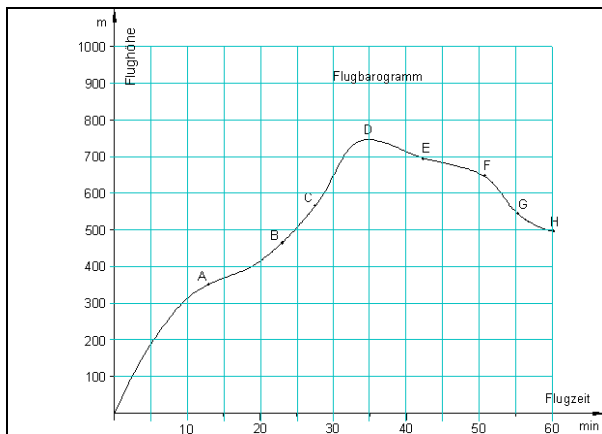
۲۰ . مشتقشمیرنه (رابیلیدنه)

II.1. د تابع تغیر منخ ارزښت (منحنی قیمت) Average rate of change

د کتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو، تر څېړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه د یوه یادښت په څېر راوړم:

که له یوه ځای څخه بل ځای ته د تابع د تغیر منخ ارزښت $\text{Average rate of change}$ څخه غږیږو، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جگوالی، میل او یا تانجنت دی او دا دریو اړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وېه ګورو، چې همداسې د تفاضل وېش (Difference quotient) هم.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل (جګړدنه)



په الوتکو کې د الوتنې د لیک (الوتنلیک) الی (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل د الوتنې جگوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جگوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واورو، نو د لیک بکس به ورته ووايو.

په پورته گراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونو جگوالی ښوول شوی.

-ایا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جگوالی زیات دی؟

-ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جگوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جگوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

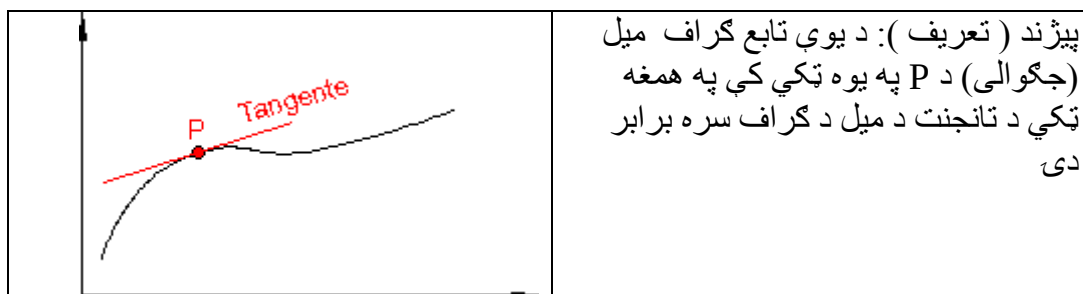
-ایا د یوې کرښې او منحنی جگوالی هر چېرته توپیر لري او که نه؟

لاس ته راوړنه :

۱ - گورو، چې په یوه منحنی کې د گراف جگوالی هر چېرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په گوته کړو، چې هلته میل څېړل کیږي.

۲ - په لاندې بېلگه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده) کرښې میل هر چېرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جگوالی څخه غږیږو.

برښي چې لاندې پېژند یا تعریف عاقلانه دی:

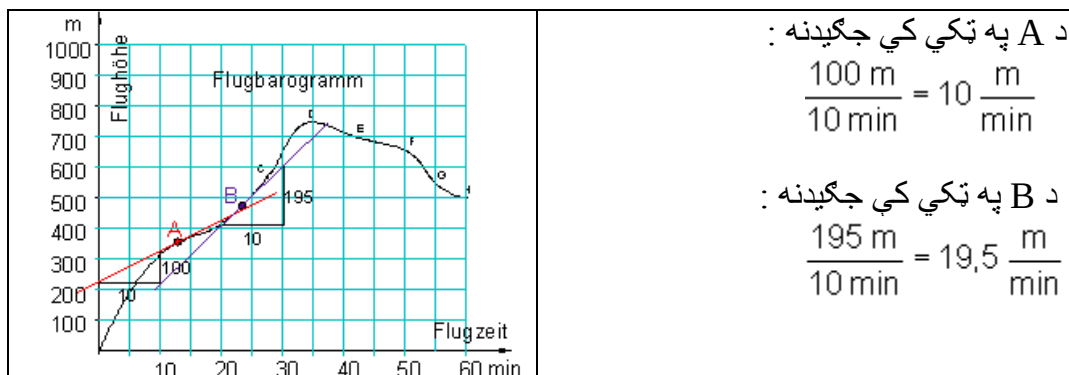


لیدل کیږي چې دلته یو تانجنټ د کرښې تعریف لري، چې د لمستکي (مماس) په چاپېریال کې د امکاناتو سره سم لمستکي (مماس) ته ښه وړ نږدې کیږي.

ددې پېژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه گراف میل د یوې کرښې میل دی.

د گراف د جگیدني ټاکلو لپاره د A او B په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنټ) انځوروو، چې گراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.

د میل یا جگیدني مثلث په مرسته جگیدنه په شل یا ساده ډول شمیرل کېدی شي:



زموږ د بیلګې لپاره میل یا جګیدنه په یوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

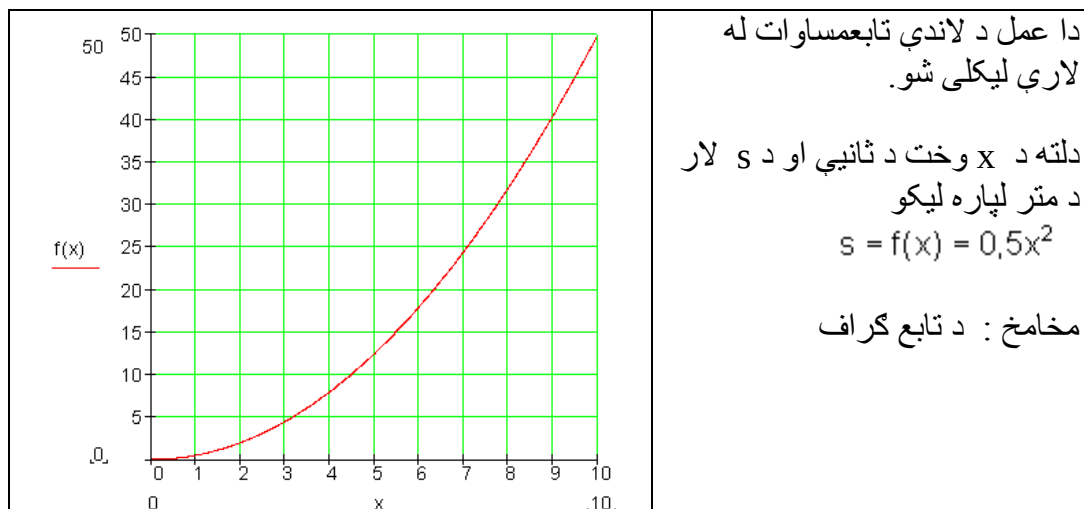
د A په ټکي کې : د الوتنې وخت نږدې 12,5 min ، د میل یا جګیدنې چټکتیا (سرعت) نږدې $10 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ ده

د B په ټکي کې : د الوتنې وخت نږدې 23,0 min ، د جګیدنې چټکتیا (سرعت) نږدې $19,5 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدنې له مخې تعریف شوی ، چې د لمستګي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د گراف میل د A او B په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

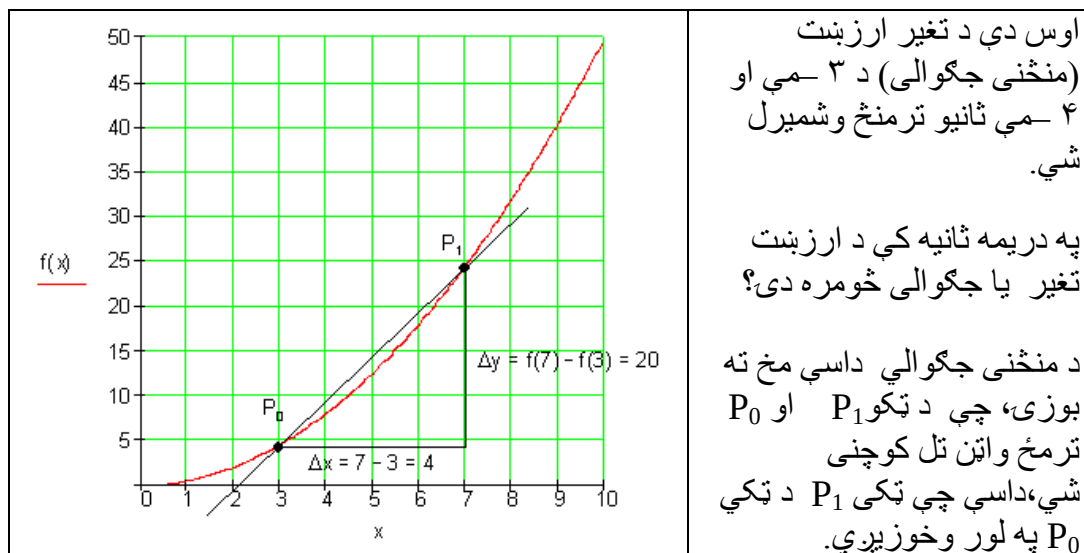
II.2 په یوه ټکي کې د تابع دگراف میل (جگیدنه):

معلومه ده ، چې یو ریلګاډی د تمخای څخه له خوزېدو (حرکت) وروسته خپله چټکتیا (سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي. وهلي لار (د تمخای څخه لږوالی) تل زیاتېږي. د تمخای څخه لږوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې ده .



اوس باید منځنی ارزښت (منځنی جگوالی) **Averagerat of change** د ۳ مې او ۷ مې ثانيې ترمنځ وشمیرل شي.

ددې لپاره اړونده سیکانټ انځور و او د هغې جگوالی شمیرو.



د ۳ مې او ۷ مې دقیقې ترمنځ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{24,5 - 4,5}{7 - 3} = \frac{20}{4} = 5$$

منځنی تغیر ارزښت (جگوالی) دی:

د ۳-مې او ۴-مې دقیقې ترمنځ

منځنی تغیر ارزښت (منځنی جگوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{8 - 4,5}{4 - 3} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنزدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3; x]$	$[3; 4]$	$[3; 3,1]$	$[3; 3,01]$	$[3; 3,001]$
$\Delta x = x - 3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x) - f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په گوته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوږي یا ورنزدې شي، نو د تغیر ارزښت (جگېدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنزدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیر ارزښت (لحظوي جگیدنې) ته تل ورنزدې کیږي.

که موږ فیزیکی لویي (واحدونه) په خپله بېلګه کې وکاروو، نو د تغیر ارزښت (جگوالی) لپاره m/s باور لري. دا د چټکتیا لپاره یوون (واحد) دی

دا په دې مانا دی، چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په گوته کوي.

II.3 د لحظوي (د سترګو رپ) تغیر ارزښت شمیرلو ته

شمیرنیزه تګلار

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینتروال $[3; \Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت جگوالی:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5[9+6\Delta x + (\Delta x)^2] - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} \\ &= \frac{0,5 \cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3 + 0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0,5\Delta x\end{aligned}$$

دا $3 + 0,5\Delta x$ د منځنی تغیر ارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅيږي ($\Delta x \rightarrow 0$)، نو د منځنی تغیر ارزښت $3 + 0,5\Delta x$ د 3 به لور هڅيږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترگو رپ) تغیر ارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو: د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره باور رې: $3 + 0,5\Delta x \rightarrow 3$

یا

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 + 0,5\Delta x) = 3$$

II.4 کمښت ویش (د تفاضل (؟) ویش) Difference quotient

په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څېړنې لاندې نیسو.

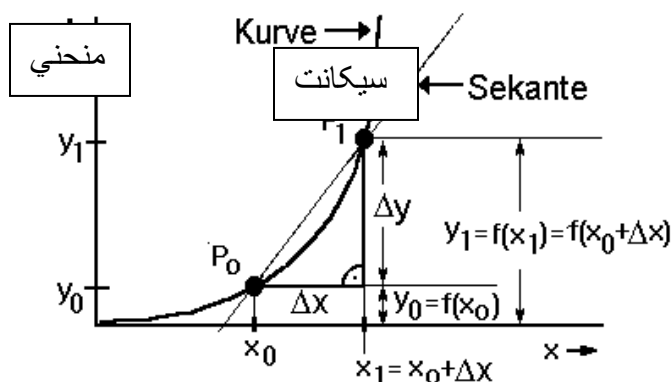
د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکل کېدی شي:

کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کرښې د جگیدني فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د قاطع (seccence) پیژند: قاطع هغه کرښه ده، چې منحنی د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي (لاندې څیره وگورئ)



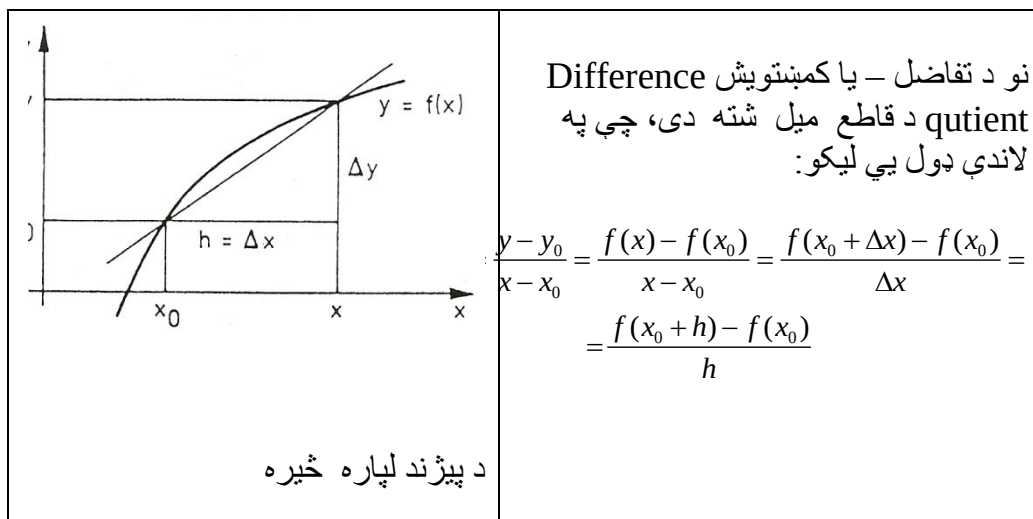
پایله: د قاطع (غوڅوونې secant) میل یا جگیدنه (جگوالی): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو،، میل (جگوالی)،، یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کېږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پیژند (تعریف)

د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی (مخامخ څیره دې وکتل شي).



د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. دا فرمول د f په گراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د ميل شمېرنه ده. دا ټکي د x – محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي. د كمبنت وېش يا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعريف لپاره په کار راځي.

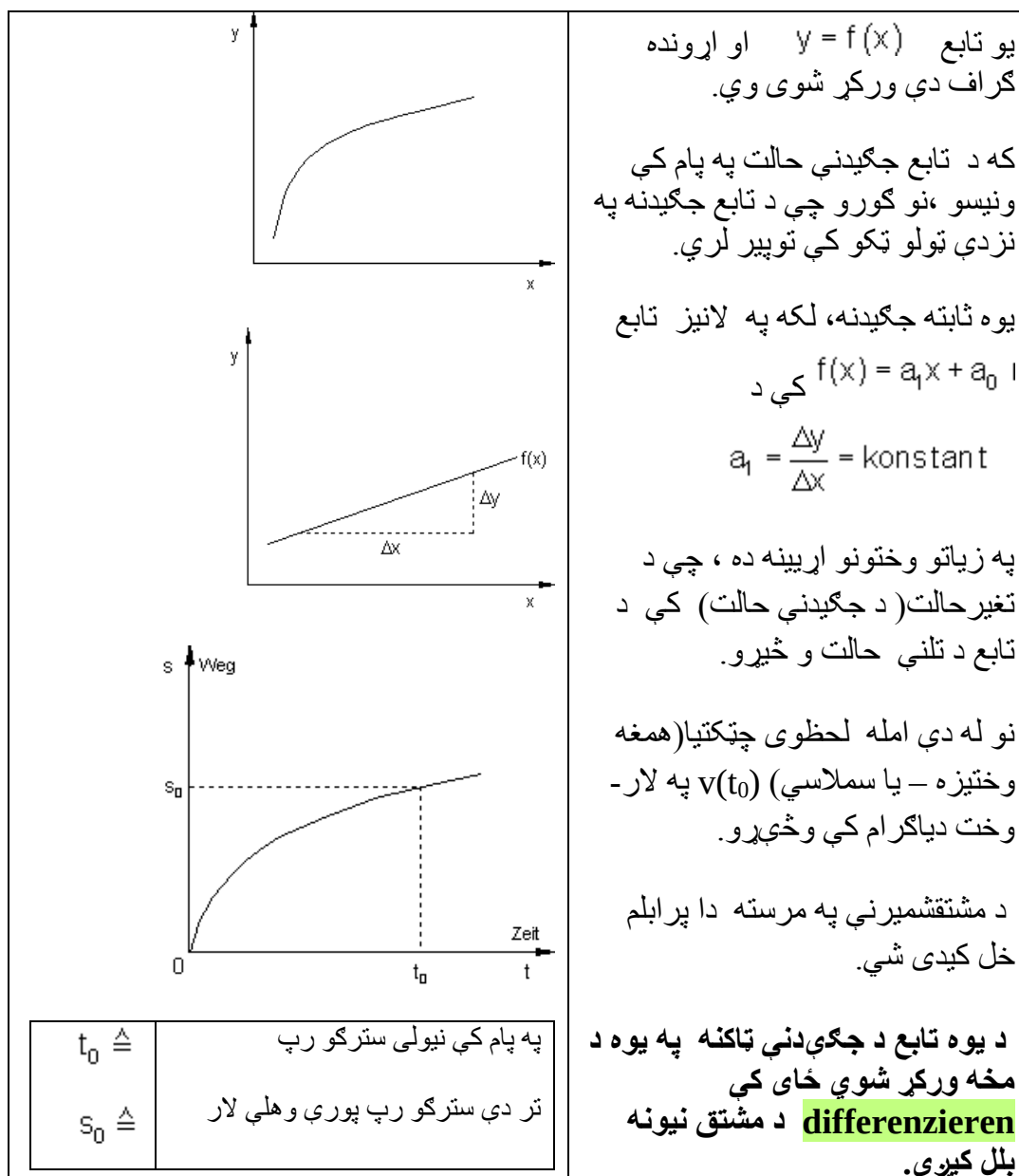
بېلگه:

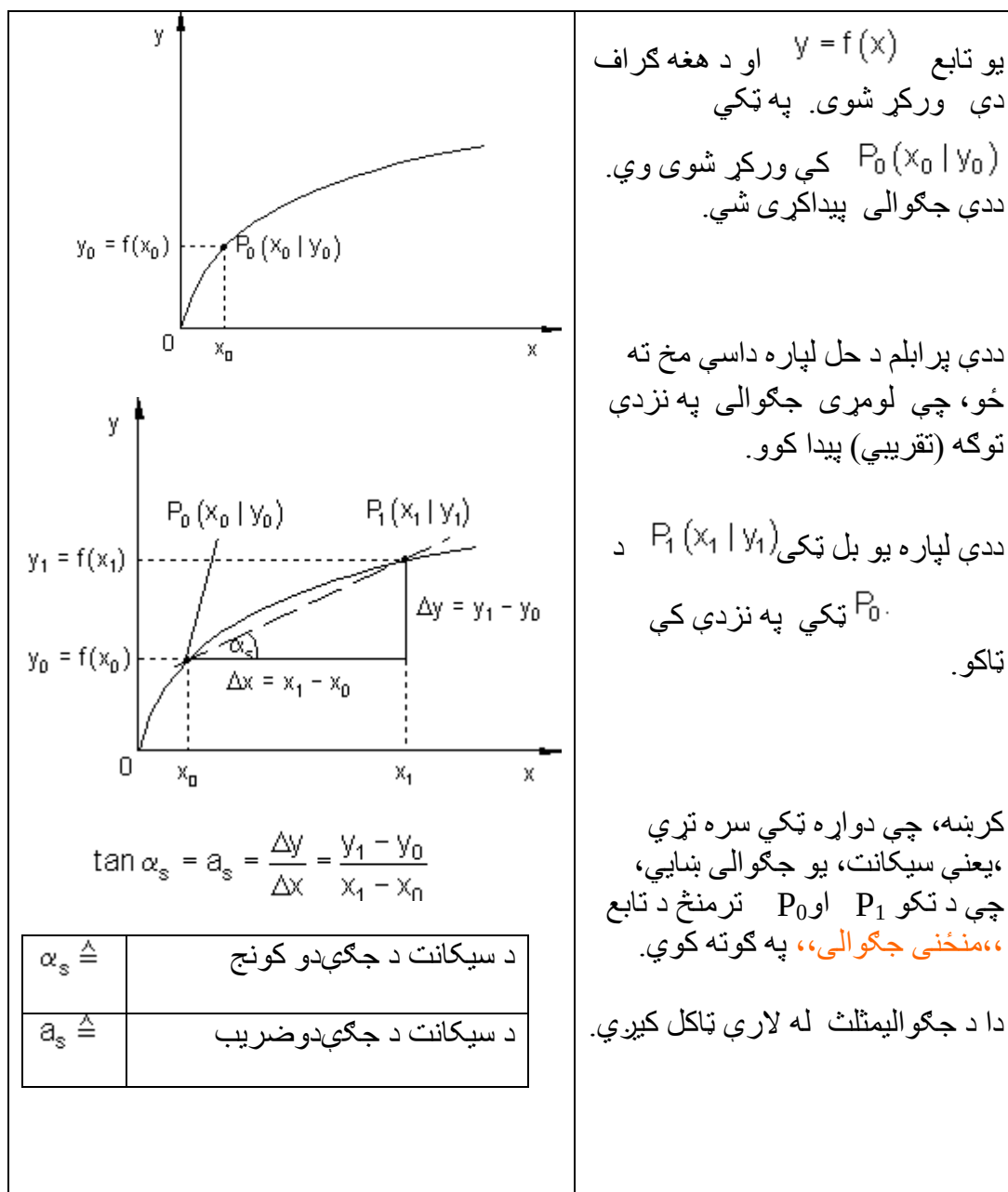
د $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع كمبنت ویش (د تفاضل

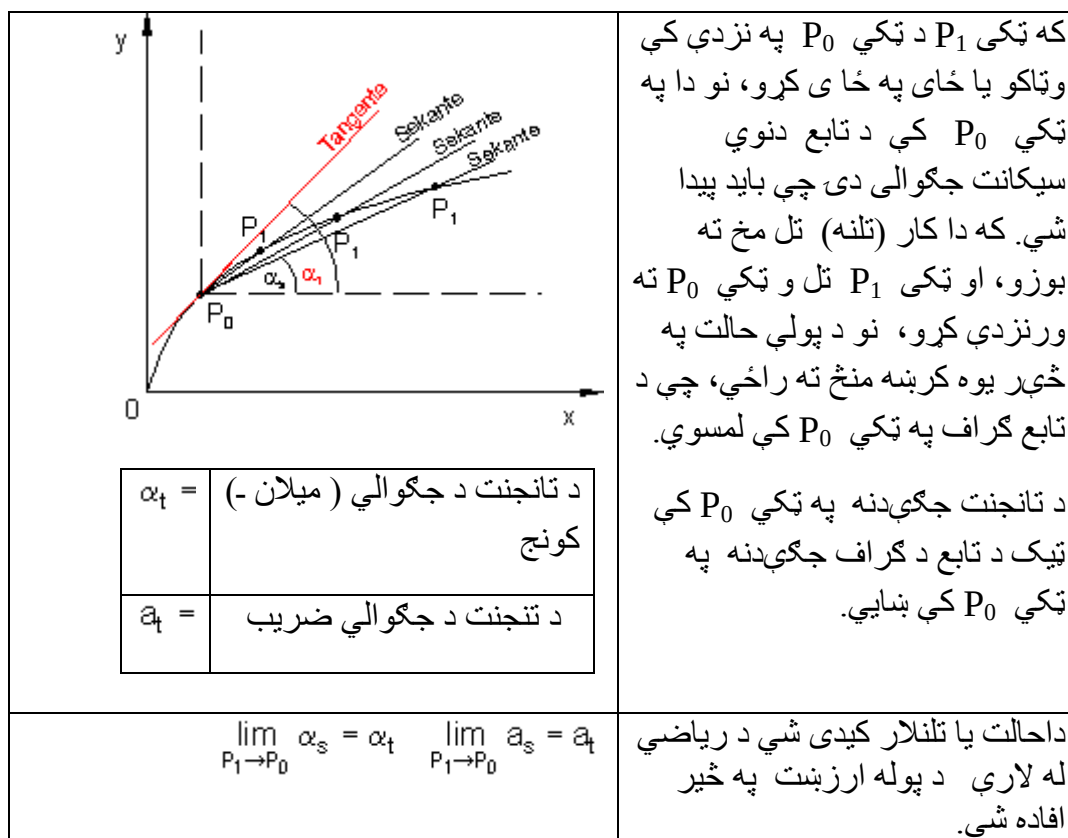
$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4 - (3x^2 - 5x + 4)}{h} \\ &= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h} \\ &= \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} \\ &= 6x + 3h - 5 \end{aligned}$$

وېش) پيدا کړئ.

II.2.1 د غوڅوونې (تقاطع) جگوالي څخه و د تانجنت جگوالي یا جگیدنې ته







II.2.2. کمښتویش او مشتق Difference quotient and diferentialquotien

د سیکانت جگېدنه (منځنی تغیر

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

ارزښت)

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کړو

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

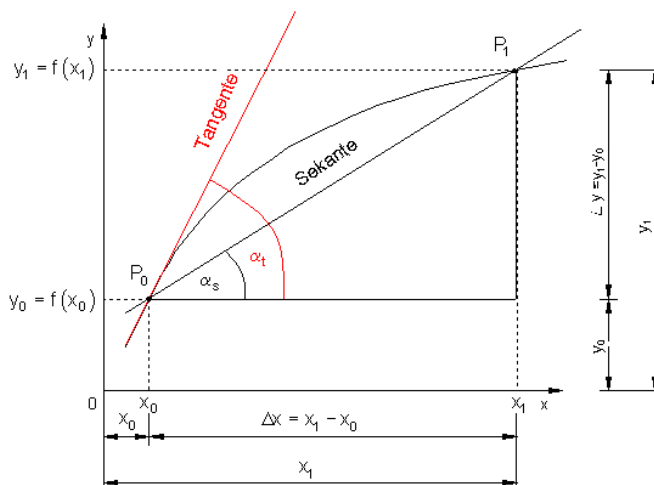
د تنجنت جگېدنې سره د حد (پوله ارزښت) له لارې لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي – یا د سترگو رپ تغیر ارزښت دی

$$a_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

یا لنډ:



په ورته توگه د كمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څیرني لاندې نیسو:

د یوې کرښې میل یا جگیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.

کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

د دې کرښې د جگړدني فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

II.6 د غوڅوونې (قاطع seconce) پیژند:

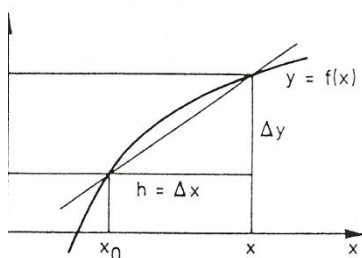
قاطع هغه کرښه ده، چې منحنی د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

پایله: د قاطع میل یا جگړدنه (جگوالی secant): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل (جگوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کېږي.

په لاندې کې m_s د جگوالي لپاره لیکل کېږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

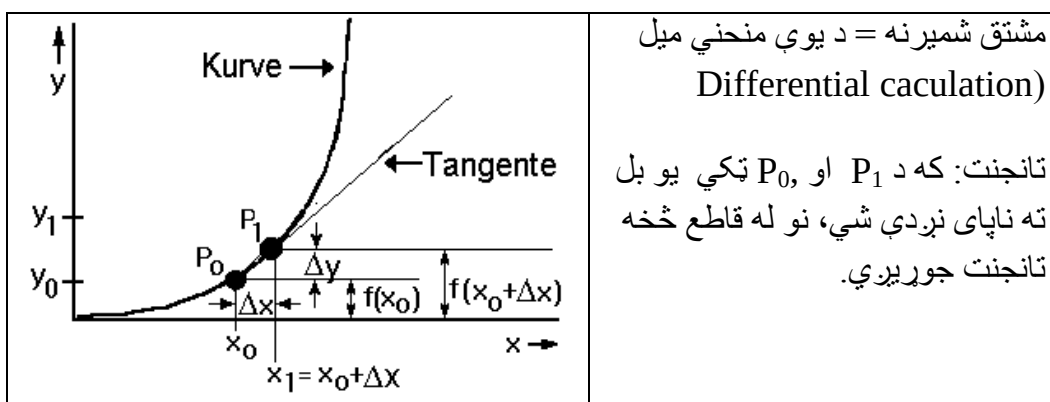
د پیژند لپاره څیره



پیژند (تعریف): د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوبښه یا په زړه پورې ځای دی (مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference quotient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

د f تابع غوڅي ميل لپاره فرمول: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. دا فرمول د f په گراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د ميل شمیرنه ده. ټکي د x - محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي. د کمښت وېش يا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعريف لپاره په کار راځي. د يوه تابع د ميل يا جگیدني ټاکنه په يوه د مخه ورکړ شوي ځای کې د تابع د مشتق نيوونه بلل کيږي.



پایله : د تانجنت جگیدنه : د تانجنت جگیدنه د قاطع د جگیدني ، حد ، دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پام: لکه د مخه مو چي گوته ورته ونيوله، د derivative کلمه نوي ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نيسو : derivative د رابیلیدني په مانا دی، چي موږ يې تراوسه مشتق بولو، چي همدا معنا لري يعنط له اشتقاق سره تړاو لري.

تعريف: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل وېش) $x > x_0$ او (همداسي) $(x > 0)$ او يا په (همدې ډول) $(x < 0)$

$h > 0$ لپاره یو حد ولري، نو د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت لري اود دې لپاره لیکو:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}; \dots$$

دا حد یا پوله داسې بنایو

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{x=x_0} = f'(x);$$

د x_0 ځای کې د $y = f(x)$ تابع له مشتق (Derivativ) یا رابیلدني څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابيله وو.

د مشتق ساده شمیرني لپاره یوه بېلگه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمښتوېش په لاندې ډول دی:

$$\begin{aligned} \frac{y - y_0}{x - x_0} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x} \\ &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= 2x_0 + \Delta x - 3 \end{aligned}$$

او د لیمیت $\Delta x \rightarrow 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

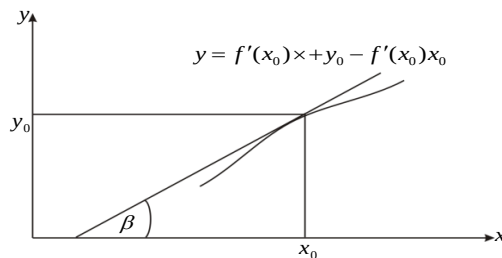
د دې لپاره دا لاندې پیژند وړکوو:

پېژند 2:

که یو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځای کې مشتقوړوي، نو هغه لاندې کرښه چې د (x_0, y_0) ټکي څخه تیرېږي او میل یا جگوالی یې $f'(x) = \tan \beta$ دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0, y_0) په ټکي کې د ورکړ شوي منحنی $y = f(x)$ تانجنت بلل کېږي (پرته له مخامخ شکل)



موږ اوس د څو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیړنې لاندې نیسو.

بیلگه ۱:

د یوې ثابتې مشتق:

موږ د لاندې تابع لرو، چې ارزښت یې یو ثابت دی

$$y = f(x) = c = \text{Const} \quad \text{ثابت}$$
نو د هر x_0 ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

بیلگه ۲:

یوه $f(x) = x$ خطي (کرښیزه) تابع لرو.

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} & \Rightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

نو $f'(x_0) = 1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0) = 1$ د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابته ده.

بیلگه ۳ : د $y = f(x) = c \cdot u(x)$ ډوله تابع مشتق د $c =$ ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د (ثابتې $c =$) سره ضرب شوی وي. یعنې

له $y = f(x) = c \cdot u(x)$ څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

ثبوت:

$\begin{aligned} f(x_0) &= c u(x_0) \\ f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot u(x_0 + \Delta x) - c \cdot u(x_0)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \cdot \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \Leftrightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{c}_{c} \cdot \underbrace{\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)} \\ \Leftrightarrow f'(x_0) &= \underline{\underline{c \cdot u'(x_0)}} \end{aligned}$

پېژند (تعریف): دفرنخیالوېش

$$\text{Der Differentialquotient } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$$

heißt Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0

د x_0 په ځای کې د تابع $f(x)$ مشتق یا رابیلیدنه بل کیږي

تعریف (پیژند): د تابع لومړی مشتق یا رابیلیدنه د x_0 په ځای کې د تانجنت جگېدنه ورکوي، چې د تابع گراف یې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرگ د تابع د گراف جگېدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سړی د تابع جگېدنه هم بولي.

تانجنتجگېدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې

Tangentensteigung in $P_0(x_0 | y_0)$

$$a_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بېلگې څخه کار اخلو

بیلگه:

تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.

غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانگړې توگه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی

کمښتویش (د تفاضل وېش) پیداوو.

$x = x_0 :$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

اوس د لیمیت د لاس ته راوړلو له لاری د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د په ځای کې د تابع لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی

چې تابع د په ځای کې میل یاجگوالی 4 لري.

اوس د لیمیت د لاس ته راوړلو له لاری د مشتق ضریب ته راځو:

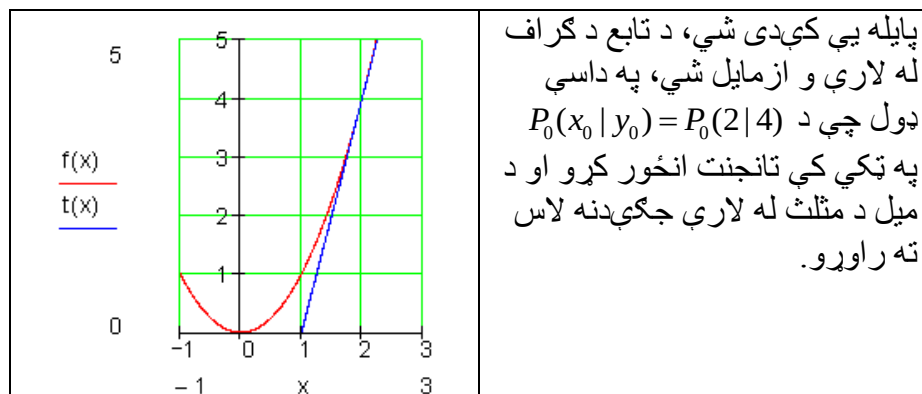
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی

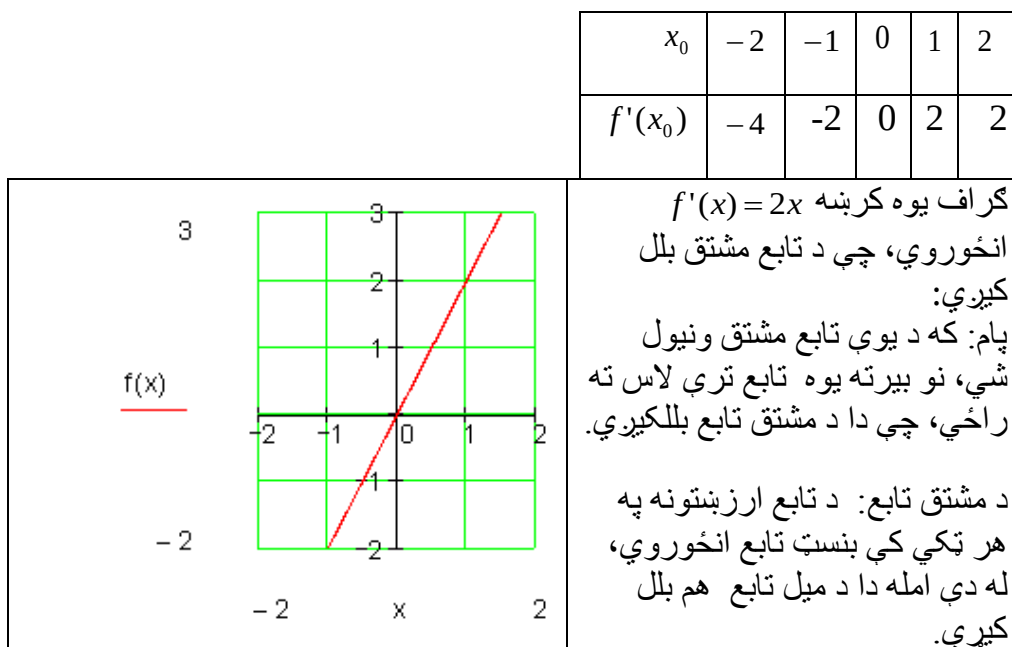
چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجگوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یی:



لکه پورته بېلگه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداوو:

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$



بیلگه: د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی دی.

فعالیت: گران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق گراف وروسته له حلې
 رسم کړي.

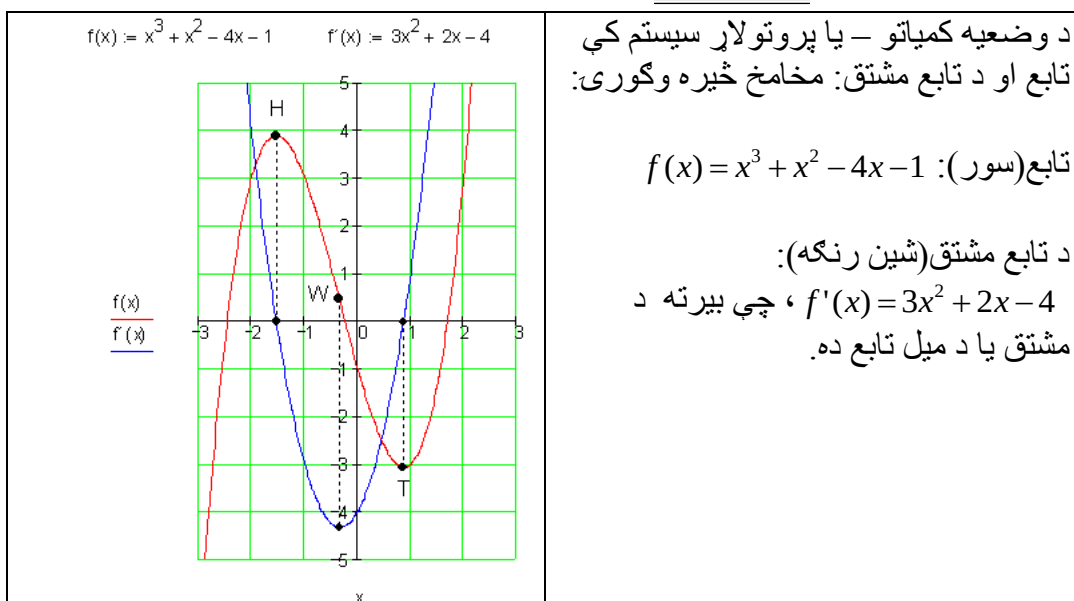
موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} & \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f'(x_0) = 3x_0^2$ د تابع $f(x) = x^3$ مشتق دی په خای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $f'(x_0) = 3x_0^2$



بیلگه ۴: یوه تابع $f(x) = \sqrt{x}$ دې ورکړ شوې وي.

د x_0 په خای کې د تابع مشتق پیدا کړئ او د مشتق تابع.

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}
 \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی.

او د مشتق تابع ده $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

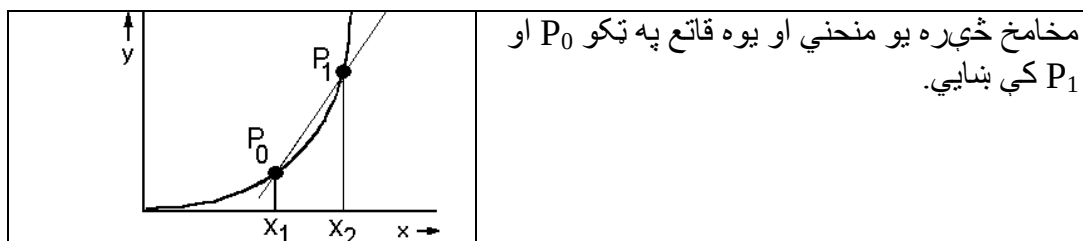
تابع	د مشتق تابع	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f'(x) = 2 \cdot x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -x^{-2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

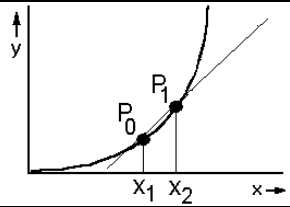
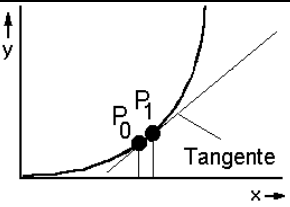
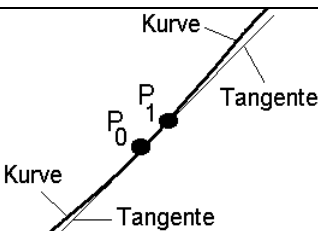
که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو گومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

بیلگه:

د تانجنت تعریف او خویونه:



	اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1 په لور و خوځيږي. پام: ددې سره قاطع خپل ميل تغيروي
	بالاخره غواړو، چې P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي
	چې دا پوره وپېژندلی شو د ټکو P_1 او P_0 په شاو خوازوو يا لويه وو: که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي P_0 کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحنې په P_0 ټکي کې.

د دې خويونو غوره غوره والی يا لاس ته راوړنه (پایله):
 ومو ليدل، چې د تانجنت ميل په P_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحنې ميل هم دی. له دې دا پایله لرو، چې که څوک غواړي د منحنې ميل په P_0 ټکي پيدا کړي، بسيا کوی، چې د تانجنت جگوالی يا ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړي.

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ گراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ گراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود يا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات:

د سره لیکو:

دا چې $P(x_0, f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لږ:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) \\ = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحنی سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود خُغلي.
د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)} \\ \Rightarrow n(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)}}$$

بیلگه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود (نورمال) پیدا کړئ:

حل: په لاندې توگه د تابع مشتق نیسو او گراف یې (خپره لاندې کښل شوي) کارو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل په ټکي x_0 کې د میل ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2, -5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x, P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځای کې دا لاندې لرو:

.

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x, \quad P(2 | f(2))$$

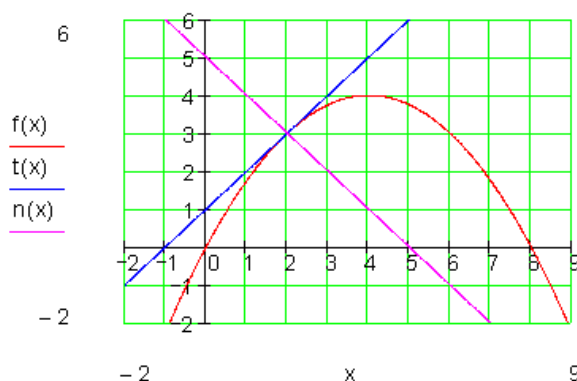
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لاندې راځوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x - 2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x + 5}}$$



د تانجنت او عمود عمومي مساوات

بیلگه: تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

د تانجنت میل: د یوه تابع د گراف میل په ټکي $P(x_0 | f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.
مور $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

$$\text{مور } f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \text{ مربع تابع لرو}$$

$$\text{د تابع مشتق } f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

ارزبستجدول:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزبستجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککړی ټکی دی:

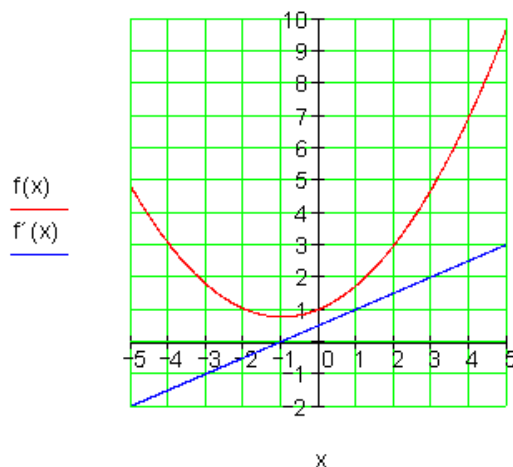
$$S(-1, 0.75) \text{ د } x = -1 \text{ ارزبست لپاره } f'(-1) = 0 \text{ د میل تابع ارزبست دی:}$$

دا دا معنی لري، چې په ککړی ټکي کې د $f'(x)$ میل صفر دی.

تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت (افقي) ځغلي؛ یعنې د $-x$ محور سره غبرگ ځغلي.

گرافونه:

$$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \quad f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned}
 & \text{بيلگه: تابع لرو: } f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \\
 & \text{تانجنت دې پيداكړی شي، چې د } f(x) \text{ گراف د } P(-2, f(-2)) \text{ په ټكي كې لمسوي،} \\
 & f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 14x + 1 \quad P(-2 | f(2)) \Rightarrow x_0 = -2 \\
 & t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
 & f'(x_0) f'(-2) = 24 - 28 + 1 = -3 \\
 & f(x_0) = f(-2) = -16 + 28 - 2 - 7 = 3 \\
 & \Rightarrow t(x) = -3(x + 2) + 3 = -3x - 6 + 3 = \underline{\underline{-3x - 3}}
 \end{aligned}$$

لاس ته راوړنه(پايله):

د $f(x)$ تابع گراف كې تانجنت او عمود په $P(x_0, f(x_0))$ ټكي كې لاندې بڼه لري.

$$\begin{array}{ll}
 \text{د عمود مساوات} & \text{د تانجنت مساوات} \\
 n(x) = -\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جگينه}}}(x - x_0) + f(x_0); \quad f'(x_0) \neq 0 & t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{جگينه}}(x - x_0) + f(x_0)
 \end{array}$$

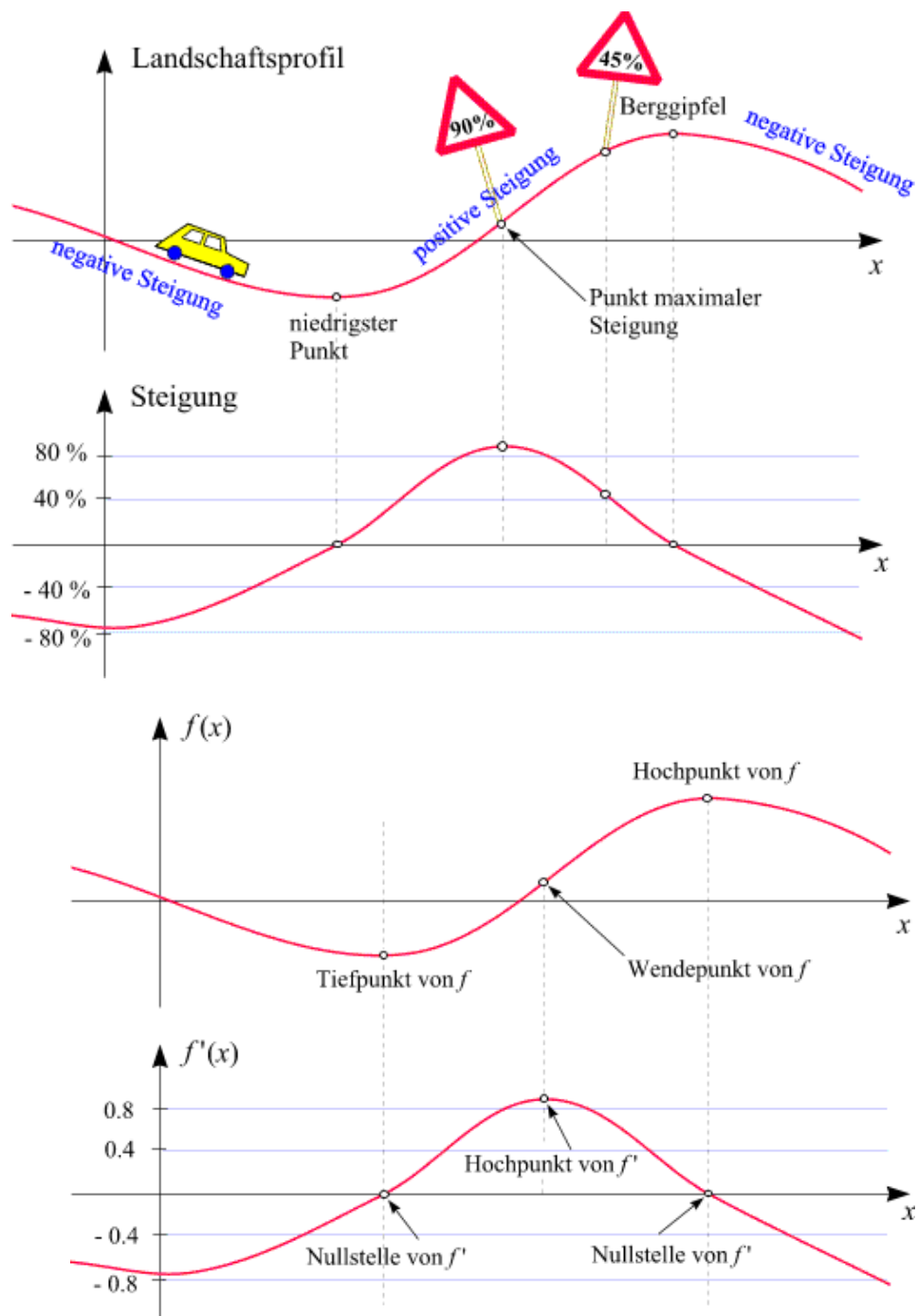
په بيديا كې جگوالی Steigungen in der Landschaft

لاندې د د تابع گراف د سرک په څير په فکر كې راولو، چې په بيديا كې جگ او ټيټيري يا

كښتپورته خعلي، نو په بڼه توگه يې رسمولی شو، چې د گراف خويونه د مشتق سره په اړيكو كې راځي:

دپورته څيرو پښتو: له كين لور كښته بڼي لور ته: بيديا يا كرونده، منفي جگوالی، جگوالی،(بله كړبڼه) خورا ټيټ ټكي،(شي لورته بله كړبڼه)مثبته جگينه، (پسې كړبڼه) د غره څوكه، د خورا جگي جگيني ټكي، (اخره) كميز يا منفي جگينه.

د سرک كښته يا لاندې لور ته د ځانگړي دياگرام سره د سرک جگينه په هر ټكي كې انځور ده، د کومې سره چې يوه دويمه منحنی ورکوي.



دپورته پښتو: له پورته کښته له کین وښي لور ته: د f جگ ټکی، د f ټیټ ټکی، د f اوړونټکی یا د انعطاف ټکی، د f'' جگ ټکی، د f' صفرخای، د f'' صفرخای.

دیاگرامونه په کره توره وگوری او وهڅیرئ، چې د دویمې منحنی خویونه د لومړۍ منحنی له خویونو را برسیره کړی.

چیرته چې سرک خورا ټیټ ټکی لري، هلته د جگیدني ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځایه تیرېږي په افقي اړا پراته ډول ځغلي او په همدې توره که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي. دا ټیک هغه ټکی دي، د کومو په چاپیریال کې چې منفي او مثبت جگیدنه یو بل سره رابندوي یا پولې لري.

د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چې هلته جگیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلگه کې 90%).

همدې ته ورته په دویمه منحنی (کږې) کې یو ه څوکه لري، مگر دا په دې بیدیا کې هغه ستره،، څوکه،، نه ده، مگر که څوک غواړي، نو یوه د،، جگیدني څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې یا منحنی په ورسره بلده یا معمول ریاضیکي ډول لاندې شکلونه لري:

لومړۍ منحنی د $f(x)$ گراف دی، دویمه منحنی یا کږه د مشتق تابع $f'(x)$ گراف دی.

دا دواړه گرافونه بیا هم ټیک وگوری او وهڅدږی، چې وپوهدږی، چې دا په هره برخه کې یو د بل سره څنگه اړیکې لري.

د $f(x)$ گراف دوه ځانګړي ټکي مو سترگو ته راځي: په یوه کې $f(x)$ مینیمال (خورا ټیټ ټکی) په بل کې $f(x)$ ماکسیمال (خورا جگ ټکی) دی.

په دې ځایونو کې $f(x)$ صفرخایونه لري.

هغه ټکی چې هلته د $f(x)$ گراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اوړونټکی بلل کیږي.

دا چې په دې ټکي کې د $f(x)$ مشتق خورا جگ دی (په دې بیلگه کې $0,9$)، دا د $f'(x)$ عظمي نقطه ده.

د ازادې سترګې سره د هغه ځای له لاندې منحنی څخه ښه څرګندېږي، نسبت و پورته منحنی ته.

موږ د دې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولای شو یا ګومان راوړی شو: که یوه تابع $f(x)$ ولرو، نو د دې $f(x)$ تابع په هکله د $f(x)$ له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لاس روړی شو. دا موږ ته د ماکسیمم او مینیمم په هکله (چې دا دواړه د افراطي ارزښت تر نامه یادېږي) او په دې هکله چې ګراف چېرته خور یا ستوغ دی، پوره کتور معلومات راکوي.

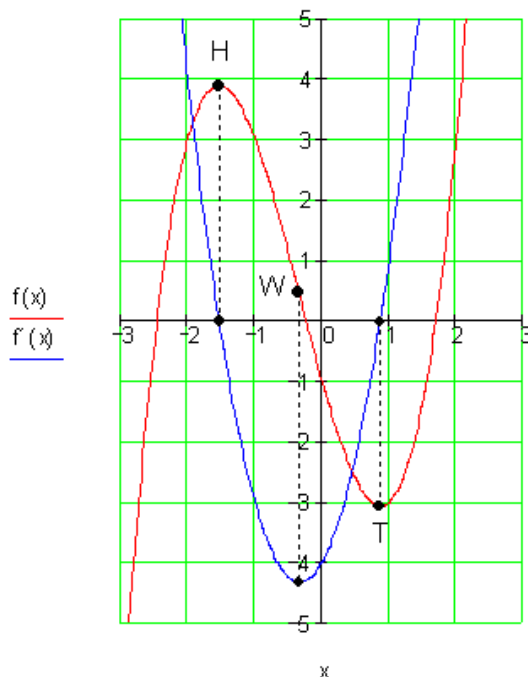
په کوارډینات (یوه پروت - ولاړ) - سیستم کې تابع اود تابع مشتق:

$$\text{تابع: } f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

$$\text{مشتق: } f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږ دا د مشتق تابع او یا د جګیدني (میلان) تابع بولو

$$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \quad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$$



د دواړو توابعو گراف په یوه قیمتې وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع $f(x)$ یو جگ ټکی (H) همداسې ټیټ ټکی (T) لري گراف د مشتق تابع x -محور کې غوڅوي، په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع $f(x)$ پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د $f(x)$ جگېدنه صفر ده.

د مشتق تابع $f'(x)$ هلته مینیموم لري، چېرته چې د $f(x)$ جگېدنه د H او T ترمنځ په پام ونيول شي د مطلق قیمت له مخې خورا لویه ده.

II.3. د مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعي یا زیاتون قاعده یا لار):

که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعي څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعي څخه جوړ دی، یعنې:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\left[\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \right]}_{u'(x_0)} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\left[\frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \right]}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \underline{\underline{u'(x) + v'(x)}}$$

بیلگه:

د دې ورکړ $f(x) = 5x^2 + 3x$ ، $u(x) = 5x^2$ ، $v(x) = 3x$ توابعو شتق وشمیرئ.

ښوونه:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 + 3x & u(x) &= 5x^2 & v(x) &= 3x \\ \Rightarrow u'(x) &= 10x & v'(x) &= 3 \\ f'(x) &= u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}} \end{aligned}$$

د جمعې قاعدې ټولیزه کونه:

که چیرې $f_1, f_2, \dots, f_n$ توابع او $k_1, k_2, \dots, k_n$ ثابت عددونه وي نو لرو (بې له بنوونې):

$$\begin{aligned} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)]' \\ = k_1 f_1'(x) + k_2 f_2'(x) + \dots + k_n f_n'(x) \end{aligned}$$

قضیه (د ضرب قاعده یا لار):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x)' \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x)'$$

$$\text{ښوونه: } \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

له پورته څخه لاس راځي، یعنې که د دواړو لورو لیمیت نیسو:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)
 \end{aligned}$$

بیلگه:

که $g(x) = x^2 - 1$ او $h(x) = \sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x) = g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه: په لاندې توگه مخ ته ځو:

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}, f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښايو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښايو (ثبوت کړو).

لومړۍ لار:

لومړۍ لار یا طریقه یې په لاندې کې ښايو او دویمه لار دې گران زده کوونکي وښايي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \right]
 \end{aligned}$$

غواړو $f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)$ صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \\
 &= \frac{1}{g(x)g(x)} \left[\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
 &= \frac{1}{[g(x)]^2} \left[g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
 &= \frac{1}{[g(x)]^2} [g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}
 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{یعنې لرو:}$$

دویمه لار: د $\frac{1}{g(x)}$ مشتق غواړو پیدا کړو او ښایوچي دی:

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = - \frac{g'(x)}{g^2(x)} \quad (*) \quad (f(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

که $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ کېږدو نو لرو:

$$\begin{aligned}
 (f(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{-\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$ وېش ولرو او وغواړو چې مشتق یې پیدا کړو، نو له پورته بنوونې، د (*) اړیکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \left[f(x) \frac{1}{g(x)} \right]' \\ &= f(x) \left(\frac{1}{g(x)} \right)' + \frac{1}{g(x)} f'(x) \\ &= f(x) \left(\frac{g'(x)}{(g(x))^2} \right) + \frac{1}{g(x)} f'(x) \\ &= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

بیلگه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ تابع (د $x^2 - 4 \neq 0$ سره) مشتق غواړو پیدا کړو.

حل: که چیرې $g(x) = x^2 - 4$ او $h(x) = x^2$

$$g'(x) = 2x$$

$$h'(x) = 2x$$

وضع شي نو لرو:

او د ویش قانون له مخي لرو:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2} \\ &= \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{[x^2 - 4]^2} \\ &= \frac{-8x}{[x^2 - 4]^2} \end{aligned}$$

بیلگه:

د $y = \sin x^2$ تابع یوه په لاندې توگه ورکړ شوی ځنځيري تابع ده:

$$y = \sin z, \quad z = x^2$$

دا دواړه توابع په هرحای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d \sin x^2}{dx} = \frac{d \sin z}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \cos z \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$$

بیلگه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2, \quad z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هر چیرته مشتق وړ دي. نو له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d \sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} \cdot \frac{d \sin x}{dx} = 2z \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

بیلگه:

د $f(x) = (x^5 + 4)^8$ تابع مشتق وشمیرئ!

حل: هرکله چې $g(x) = x^8$ او $h(x) = x^5 + 4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$h'(x) = 5x^4 \quad g'(x) = 8x^7$$

$$f'(x) = 8(h(x))^7 5x^4 = 40(x^5 + 4)^7 \cdot x^4$$

د مثلثاتي فنکشن تابعگانو مشتق

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots I$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots II$$

قضیه: د ساین تابع $y=f(x)=\sin x$ مشتق غواړو وښایوو چې
 $f'(x)=(\sin x)' = \cos x$ دی:

ددې قضیې د ښوولو له پاره پورتنی په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y=f(x)=\sin x$ ساین تابع د هر x لپاره تعریف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} \\ &= \frac{2}{h} \cos \frac{2x_0 + h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2} = \cos \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \end{aligned}$$

د لیمیت د برخې په پام کې لرلو سره لرو:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) = \cos x_0.$$

د ساین تابع په هر ځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري یا مشتق‌ور ده:

$$\left(\frac{d \sin x}{dx} \right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \cos x_0, \quad (\text{په لینده کچ یا رادیان})$$

قضیه:

همداسې بنوول کيږي چې کوساین تابع هم په هر ځای کې مشتق‌ور ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left(\frac{d \cos x}{dx} \right)_{x=x_0} = f'(x_0) = -\sin x_0, \quad (\text{په لینده کچ یا رادیان})$$

ثبوت: لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$= \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \cdot \sin \frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \frac{-2 \sin \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$= - \left[\sin \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right]$$

د د پولې او د پولې یا حد د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي:

$$-\lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه لیکو:

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

قضیه: غواړو وښایو چې د تانجنت تابع $f(x) = \tan x$ مشتق ورته او د مشتق تابع

$$\text{یې } f'(x) = \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ ده.}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) \\ &= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$= 1 + \tan^2 x, x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

بیلګه: غواړو د $y = \cos \frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پیدا کړو.

حل: ږدو: $f(x) = \cos x$ او $g(x) = \frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندي توګه لیکلی شو:

$$y = f(g(x)) \text{، نو د زنجیري قاعدې په بنسټ لرو:}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
 &= \cos'(g(x)) \cdot \left(\frac{\pi}{180} \cdot x\right)' \\
 &= -\sin(g(x)) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin \frac{\pi x}{180}
 \end{aligned}$$

بیلگی :

۱ - د $f(x) = \sin x$ تابع لومړي څلور مشتقونه دې پیدا شي.

$$f''(x) = \cos x ; f'''(x) = -\sin x ; f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

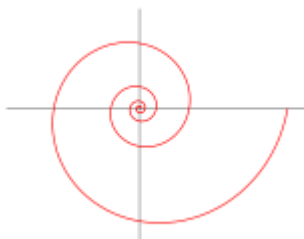
۲ - د $f(x) = x \cdot \sin x$ تابع مشتق پیدا کړئ
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x$$

۳ - د $f(x) = \sin \frac{1}{x} ; x \neq 0$ تابع مشتق پیدا کولو له پاره د ځنځیر قانون څخه نار اخلو.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} \quad \text{برږدو } z = \frac{1}{x^2} \text{ او } u(z) = \sin z \text{ ته راجي: } f'(x) = -\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2}$$

د لوگارېتم مشتق



قضیه :

د لوگاریتم تابع مشتق:

قضیه: هر د لوگاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b \neq 0, x>0$ سره، مشتق وړ دی

$$\text{او صدق کوي: } f'(x) = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x \cdot \ln b}$$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یواځې د $x>0$ لپاره پیژندل لري یا تعریف دی. په هر ځای کې چې $x>0$ وي، نو دا لاندې باوري دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\log_b(x_0 + h) - \log_b x_0}{h} = \frac{1}{h} \log_b \frac{x_0 + h}{x_0} = \log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخې دا لاس ته راځي:

$$\log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \left[\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}} \right]^{\frac{1}{x_0}} \rightarrow e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \log_b e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \log_b e$$

د لوگاریتم تابع په ورکړ شوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کې د مشتق قابلیت لري.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_b e \quad \text{همداسې} \quad f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln e}{\ln b} \quad \text{دا چې } \ln e = 1 \quad \text{نو صدق کوي:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln b} \quad \text{خه چې د بنوولو وو.}$$

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx} \right)_{x=x_0} = \frac{1}{x_0} \quad \text{پای.}$$

بیلګه:

$$f(x) = \log \sqrt{x^3} \quad \text{د مشتق وشمېری.}$$

بنوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

$$f(x) = \log \sqrt{x^3} = \log_{10} x^{3/2} = \frac{3}{2} \log_{10} x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10}$$

$$= 0.6514 \cdot \frac{1}{x}; D(f') = \underline{\underline{IR^{>0}}}$$

بیلگه:

د $y = \ln \frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیدا کړئ

حل:

موږ لیکلای شو :

$$y = \ln \frac{x-2}{x+2}$$

$$= \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y' = (\ln(x-2))' - (\ln(x+2))'$$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو: $f(x) = \log_2(x)$

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$

مشتق د $x_0=16$ په ځای کې
 حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x \cdot \ln 2)$
 اوس د $x_0=16$ په ځای کې مشتق ټاکو:
 $f'(x_0) = 1/(16 \cdot \ln 2) = 1/(16 \cdot 0.69) = 0.09$
 پای

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 1-20 کې غیر مستقیم خوندې یا په بل عبارت دننه ده.

موږ غواړو د لاندې شکل تابع یا بلواک مشتق ونیسو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

د ځنځیر قاعدې له مخې ترخیرني نیول کیدی شي، $y = e^z$, $z = g(x) \ln(f(x))$
 لاندې بلواک $u = \ln f(x) = \ln v$, $v = f(x)$ مشتق هم د ځنځیری قاعدې له مخې را پیدا کیدی شي. دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

او

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot (g'(x) \ln f(x) + g(x) u') \\ &= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

د ځنځیری قاعدې د نیونو په نظر کې نیولو سره او د جملې 10-20 له مخې لاس ته راځي

جمله 10-20 که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

هم د لاندې مشتق سره مشتقور دي

بیلگه : تابع یا بلواک $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره مشتقور دی. دا دې په (20-57) کې داسې

$$f = x, g = x \text{ د } x > 0 \text{ په } f' = 1, g' = 1 \text{ له دې امله اوس د } x > 0$$

لپاره لرو: $dx^x / dx = x^x (\ln x + 1)$

(دا وروسته د ایمپلیسیت توابعو مشتق کې هم په هماغه توګه روارول شوې ده)

بیلگه: د $y = (x^2 - 1) \ln x$ د مشتق سره باید د $g = \ln x$ له امله وغوښتل شي چی

$$x > 0 \text{ او } f = (x^2 - 1) > 0 \text{ له امله باید باور ولري } x^2 > 1 \text{ او له همدې امله } |x| > 1$$

پس کیدی شي چی فرمول (20-57) د $x > 1$ لپاره د $f = x^2 - 1$ او $g = \ln x$ سره استعمال شي:

بیلگه: د $f(x) = x^3 \ln 4x$ ($x > 0$) مشتق دې پیدا شي

$u(x) = x^3$ د $u'(x) = 3x^2$ سره، $v(x) = \ln 4x$ د ځنډیري قانون له امله لرو:

$$v(x) = 4 \cdot \frac{1}{4x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2 \ln 4x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \ln 4x + x^2 = x^2 (3 \ln 4x + 1)$$

بیلگه: د $f(x) = (x^2 + 2) \lg x$ ($x > 0$) مشتق غواړو پیدا کړو

د ضرب قانون: $v(x) = \lg x$; $u(x) = x^2 + 2$; $u'(x) = 2x$ او

سره $v'(x) = 1 / x \cdot \lg 10$

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2) \frac{1}{x \cdot \lg 10} = \frac{1}{\lg 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

د اکسپوننشل توابعو مشتق

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقور دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f(x) = b^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b^{x-x_0} - 1}{x - x_0}, \quad x - x_0 = h$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b(1+k) \end{cases}$ او لاس ته تري راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b(1+k)}$$

د لوگارېتم قانون څخه لرو: $n \cdot \log x = \log x^n$ او لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
 &= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_b(1+k)} \\
 &= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b[\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}]} , \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e
 \end{aligned}$$

له پورته لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
 &= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} , \log_b e = \frac{1}{\ln b} \\
 &= b^{x_0} \cdot \ln b ; \quad x_0 \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}^{>0} \\
 \Rightarrow f' : f'(x) &= b^x \cdot \ln b ; D(f) = \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}^{>0} \\
 f'(x) &= b^x \cdot \ln b
 \end{aligned}$$

قضیه : د $y = f(x) = e^x$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

$$e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} e^{\Delta x} \quad \text{مون دا لرلي په پام کې نیسو:}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \quad \text{مون د تل کوچنیکیدونکي } \Delta x \text{ ارزښت لپاره څیړو}$$

	Δx				
Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمیرني په بنسټ دا مهنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_1 = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که x_0 د x په ځای ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f(x) = e^x \text{ und } f'(x) = e^x$$

اکسپوننشل فنکشن e^x ټیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

لرو:

اکسپوننشل فنکشن یو فنکشن دی، په کوم کې چې فنکشن او د تابع مشتق سره برابر دي

e - تابع بیرته د مشتق له لارې تولیدیږي یا لاس ته راځي.

بل بدیل یا الترناتیو: که ولرو $y = f(x) = e^x$ ، نو $y' = f'(x) = e^x$ لاس ته راځي.

په پورته جمله کې مو وښوول: که ولرو $y = b^x$ دو $y' = y \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$ دی.

که $b=e$ کړدو، نو لرو:

$$f'(x) = b^x \cdot \ln b = e^x \cdot \ln e \Rightarrow \ln e = 1$$

$$= e^x; x \in \mathbb{R}$$

$$f: f(x) = e^x; D(f) = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{f': f'(x) = e^x; D(f) = \mathbb{R}}$$

گورو چې $f(x) = e^x; D(f) = \mathbb{R}$ یواځنی تابع دی، چې مشتق یې پخپله

$$\underline{f'(x) = e^x; D(f) = \mathbb{R}}$$
 دی

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

د $x \in \mathbb{R}^+ \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ سره.

فرمول

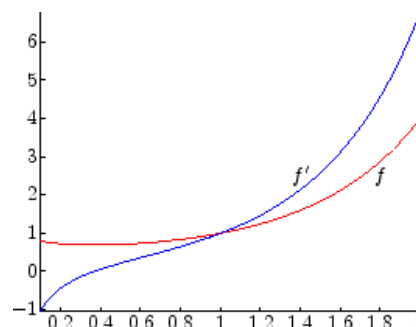
$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

کیدى شي د $y = g(x)^{h(x)}$ بنې تابع چې $g(x) > 0$ دی، د مشتق لپاره وکارول شي

لاس ته ترې راځي:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} (h(x) \ln g(x)) .$$

لیکونکى: (App/Höllig) اپپ ، هیولیک



د $x \rightarrow 0$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د 0 په لور هڅیږي، پس f د 0 په لور. نو تابع په صفر کې بني لوریزه متمادي ده. د مشتق لپاره یې دا حالت ده دی.

د $x^x \rightarrow 1$ او د $\ln x + 1 \rightarrow -\infty$ له امله د $x \rightarrow 0$ لپاره د f تابع په صفر کې یو عمود تانجنت لري.

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي:

$$g'(x) = x^{\ln x} \frac{d}{dx} (\ln x)^2 = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x}.$$

(لیکونکي اپې او هیولیک)

په طبیعت کې یې څیرنه:

د اکیونشنل توابعو مشتق

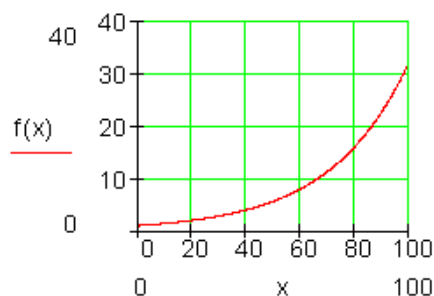
د تابع مساواتو جوړښت

کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوتي ویش (حجره وېش) له لارې زیاتیری. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو

کي ځان تجزیه کوي. د غه عملیې لپاره یو ارزښت جدول :پر، او گراف یې کارو. دلته د x اووښتونې (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده. د y متحوله د باکتریا گانو د تعداد لپاره ده.

$x = \text{Minuten}$	0	20	40	60	80	100	دقیقې
$y = \text{Bakterienzahl}$	1	2	4	8	16	32	د بکتریاگانو تعداد

پورته جدول کي : $x = \text{دقیقې}$ $y = \text{د بکتریاو تعداد}$



بیلگه: لرو : $f : f(x) = b^{3x^2-10}$; $D(f) = \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = \mathbb{R} \Rightarrow D(f') = \mathbb{R}$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}; z \in \mathbb{R}$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x; x \in \mathbb{R}$$

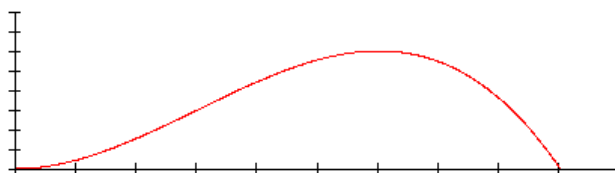
$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}}}; D(f) = \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}^{>0}$$

- د مشتق استعمال په طبیعي علومو

په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کيږي، چې د یوې متحولې (اوښتونې) x په واک کې وي.

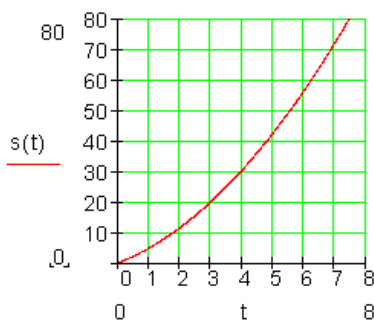
په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څیړو، چې د وخت په واک کې وي.

لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلي لار (دا وروسته روښانه کيږي)



بیلگه: د یوه په برابر ډوله بیرې (تعییل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنۍ سرعت) $v_0 = 4 \frac{m}{s}$ او $a = 1,8 \frac{m}{s^2}$ بیرې (تعییل) سره د لار-وخت-قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

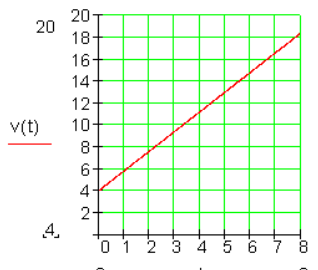
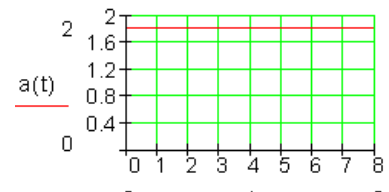


حل: د پورته ورکړ شوي د v_0 ارزښت لپاره

باور لري: $S(t) = 0,9t^2 + 4t$
(s په ثانیه، $s(t)$ په m (متر))

منځنۍ چټکتیا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ (ده)

لحظوي (سملاسي) چټکتیا په لاندې ډول ده:

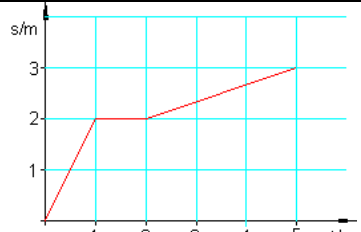
	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$ $v = s'(t) = 1,8t + 4$
	په $v-t$ - دیاگرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتېږي. دا دلته ثابت جگېدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a = 1,8 \frac{m}{s^2}$ بیرته (تجیل) ده.
	د بیرې یا تجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي: $v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$

پام : د یوه برابر ډوله په بیرته (تجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور

$$\left| s(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \right| \quad \boxed{v(t) = s'(t) = at + v_0} \quad \boxed{a(t) = v'(t) = a} \quad \text{لري:}$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t) = s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t) = s'(t)$ هم لیکو.

فعالیت:

	(۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاگرام ورکړ شوی. الف: دا خوزښت تشریح کړی. ب: دې پورې اړونده د چټکتیا - وخت - دیا گرام وکارئ.

(۲) یوه تیره د پیل چټکتیا $v_0 = 7 \frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاره) پورته غورځول کيږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10 \frac{m}{s^2}$ (را ټولي؟؟؟) کړدې شوې) سره.

(الف) د کوم وخت وروسته د تیرې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

(ب) خورا جگ د میل جگوالی وشمیرئ.

(۳) تابع د یوه خوزبنت د لار-وخت-دیاگرام بڼایی.

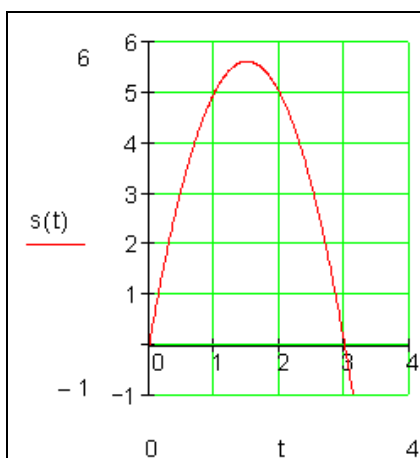
(الف) د ورځني ژوند څخه یوه بې‌لگه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي.

د منحنی تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

(ب) د خوزبنت لپاره د لار-وخت-دیاگرام

په لاندې ډول دی. $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$

a او v_0 وټاکئ



(پ) د اړونده بیړي – وخت-دیاگرام وکارئ او دا تشریح کړئ. یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

(۴) یو تن (جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي، چې د t وخت کې $S(t) = 5 \cdot t^2$ لار وهي.

په وختونو $t=1; 2; 3$ کې لحظوي چټکتیا (سرعت) وښایی.

۴ – حل:

لحظوي چټکتیا د سملاسي تغیر ارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1 + \Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \rightarrow 10$

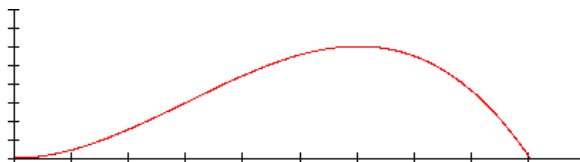
$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2 + \Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره باور لري: $20 + 5\Delta x \rightarrow 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3 + \Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره باور لري: $30 + 5\Delta x \rightarrow 30$

تمرین : لاندې د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$; $x > 0$ تابع گراف او په ورنزدي توگه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحنی بنایي، چې لاندې څیره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف: توپ کوم خورا جگ (ماکسیمال) جگوالی لري او د وهلتکي (شوت شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب: د توپ وهلتکي (شوت شوي ټکي) څخه توپ څومره لرې بهر ته ځمکې ته راځي؟

پ: د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جگ دی. ایا توپ له دې څخه جگ الوزي؟

ت: توپ د تور لاین (د x محور) څخه په ۲ متره جگوالي الوزي. له کول څخه په کوم لږهوالي دا ازاده شوت وهل شوی دی؟

د جگو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاسته راځي. د $f''(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتق تابع په نامه یادېږي.

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \quad \text{بیلګه:}$$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

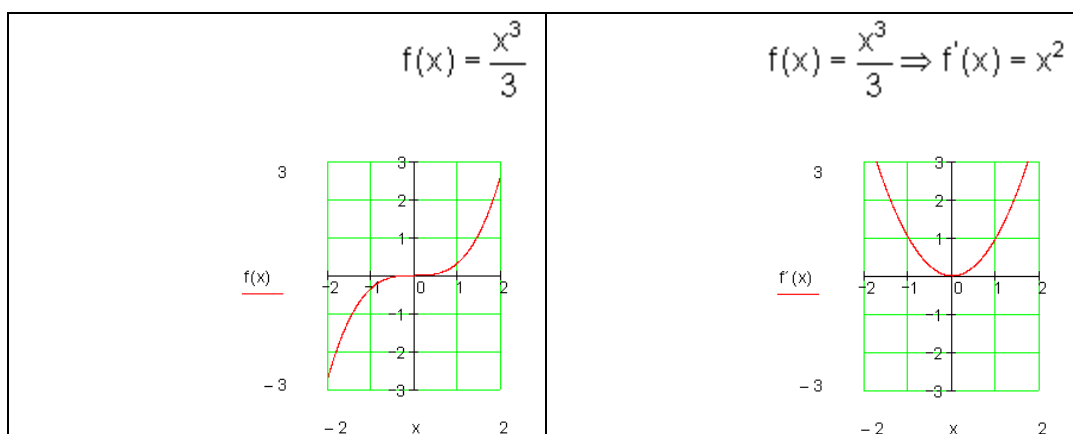
$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

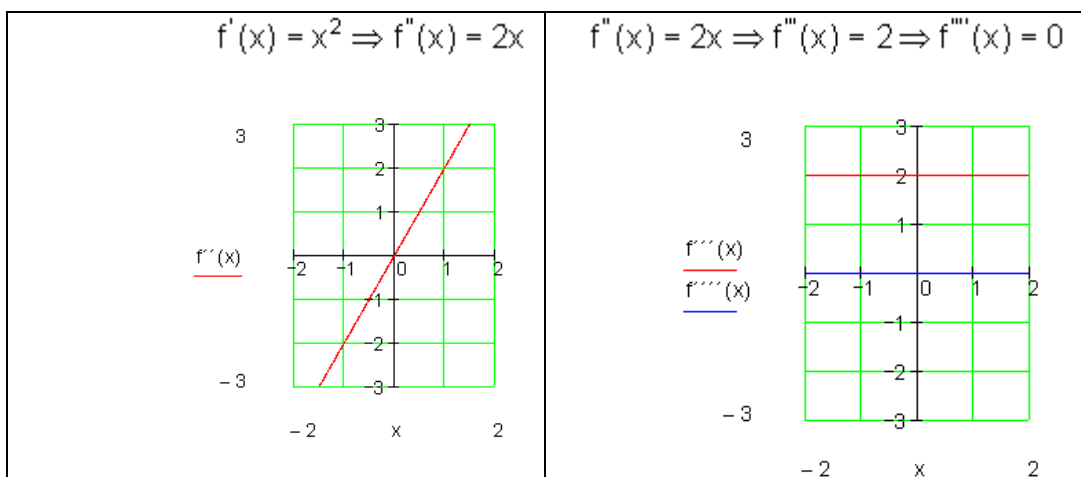
د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونيول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 0$$

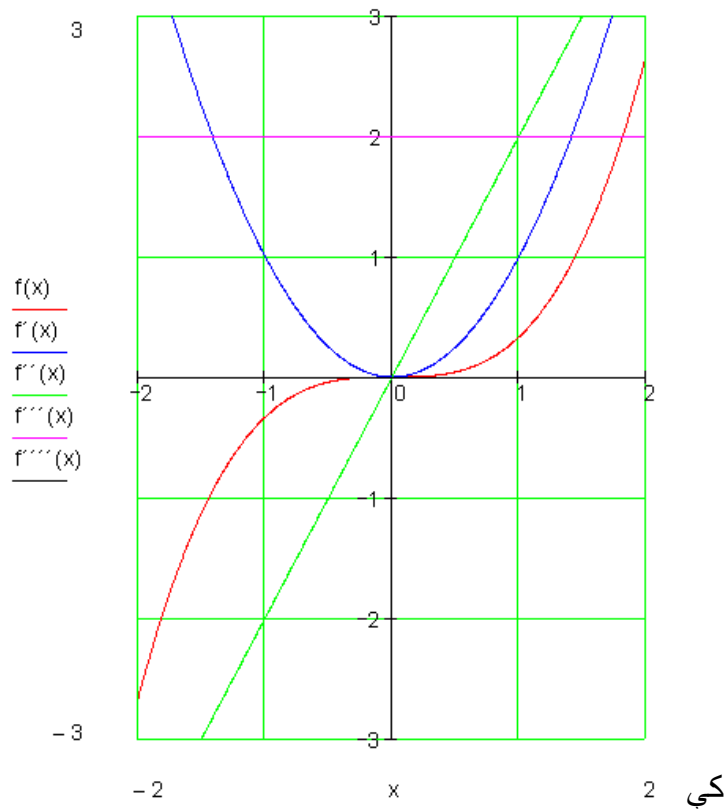
د تابع گراف:

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره





د ټولو توابعو گراف په يوه پروت ولاړ سيستم



بیلگی:

اول:

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 24x - 4$$

$$f'''(x) = 24$$

دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$

$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

تولگه: د $f(x)$ لومړی مشتق د $f(x)$ مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده:

د $f(x)$ دویم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$ دریم مشتق د $f'''(x)$ مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانگړي ډول: یو په خوسه ویاند تابع $f(x)$ په خوښه د مشتق قابلیت لري.

- - د ایمپلیسیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د $f(x)$ تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیسیت Explicit ډول، که تابع متحوله د برابرېون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

یا داسې: که یوه تابع $y = y(x)$ په ایمپلیسیته توګه ورکړ شوې وي، دا په دې معنا چې په x او y کې یوه مساوات له لارې ورکړ شوې، نو کیدی شي دا مساوات یل برابرېون تړلی یې په x پسې مشتق ونيول شي. دلته په ځانله توګه کیدی شي په $y = y(x)$ ځنډیري قانون وکارول شي.

د دې لپاره لاندې بیلګې راوړو:

$$Y = 3x^2 + 7x \quad \text{بیلګه:}$$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړه انځورونه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیسیت Implicit ډول د بیلګې په توګه $Ex^2 + 7x + y = 0$ فعالیت: که $Ex^2 + 7x + y = 0$ ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟ قضیه: یوه تابع په ایمپلیسیته بڼه $x^2 + xy - y^2 = 1$ لرو، غواړو dy / dx پیدا کړو. بنوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy - y^2) = \frac{d}{dx}(1) \quad (1)$$

$$2x + (1 \cdot y + x \frac{dy}{dx}) - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + y = \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx}$$

$$2x + y = \frac{dy}{dx} (2y - x)$$

$$\frac{2x + y}{2y - x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{-x + 2y} \quad \vee \quad \frac{2x + y}{2y - x}$$

ایمپلیخیت مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیخیت یعنی د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیخیت یعنی د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیخیت یا څرگند ډول ورکړ شوی وي، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

بیلگه: د $f(x) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتقوانینو نه شي نیول کېدی، ځکه چې په بنسټ او جگ اکسپوننت کې یې متحولي پرته دي. د لوگاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منځه وړل کېدی شي: $\ln f(x) = x \ln x$

اوس ایمپلیخیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{d(\ln f(x))}{dx} = \frac{d(x \ln x)}{dx}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{d(\ln y)}{dy} f'(x) = \frac{d(x \ln x)}{dx}$$

دلته $y = f(x)$ دی. د لوگاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x}$$

که په $f(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

بیلگه: دایره د r وړانګې سره مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ لري. له دې ځنې برخې د $y = f(x)$ تابع د گراف په څیر لیکل کېدی شي. د دې مشتق د ایمپلیخیت مشتق له لارې په لاندې توګه حل کېدی شي

په تعریف شوي مساوات کې $y = f(x)$ ځای په ځای کوو:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

د دې مساوات د مشتق له لار لرو: $2x + 2f(x)f'(x) = 0$

د $f(x)$ پسې د حل له لارې لاس ته راځي:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

د دې مساوات سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي، چې په دایرې تانجنت په ټکي (x, y) کې جګوالی $-\frac{x}{y}$ لري.

بیلګه: د بیلګې په توګه د $E: x^2 + 3y^2 = 7$ له لارې ورکړ شوي ایلیپسي (هګی یا بیضوي) له لارې لرو:

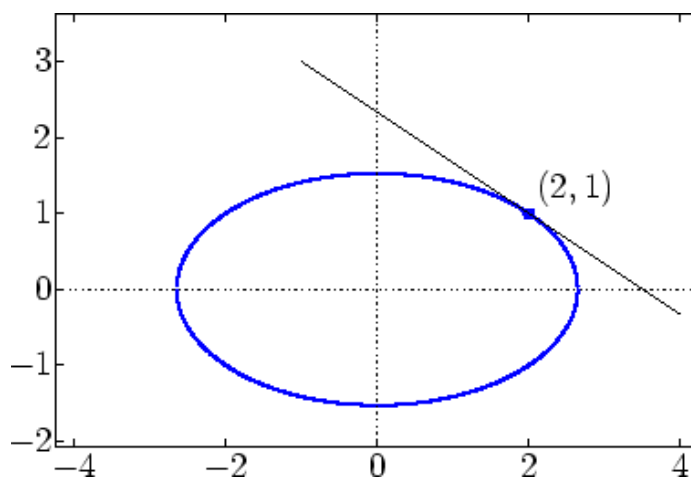
$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3y^2) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{x}{y}.$$

له

دې سره کیدی شي په E باندې په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي. د بیلګې په توګه د $(2, 1)$ لپاره لاس ته راځي

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$



په ورته توگه کیدی شي لور يا جگ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول يا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx} (2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}.$$

بیرته په E د یوه ټکي د کواوردینات ایښوولو او همدا اوس د $y'(x)$ ټاکلي ارزښت له لارې څرگند ارزښتونه وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د بستیزو مشتقونو جدول

Nr	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.X^{n-1}$	$n = 1, 2, 3, \dots$
3	X^n	$n.X^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r X^{r-1}$	r rational, $x > 0$
5	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n} . x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx} \sqrt[n]{x}$	$n = 1, 2, 3, \dots, x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0$, a reell
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0$, $a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چي کم له کمه په فورمال ډول ، په خوبه د هرې شننيزې يا سپرنيزې (تحليلي) ويښې يا افادې مشتق په شننيزه توگه لاس ته راوړي شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نیونی په نظر کي ونيسي.

ټولگه

کمښتوېش **Differenzenquotient** (د سيکانت جگېدنه) يا منځنی تغير ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق **Differetialquotient** (د تانجنت چگوالی يا لحضوي تغير ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتې قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) \text{ mit } c = \text{constant}$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعې قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانون

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

د وېش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

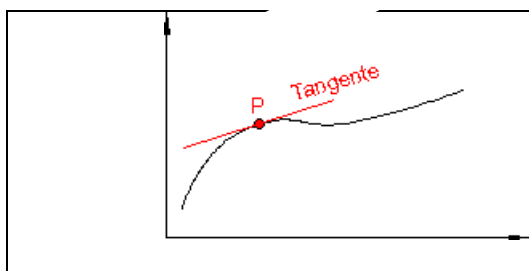
$$\boxed{f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

د ځنځیر قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دا پورته الماني په پښتو شي (دا کمپیترست سرته رسوم)



پیژند (تعریف): د یوه تابع گراف میل (جگوالی) په یوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د میل یا جگوالي گراف سره برابر دی

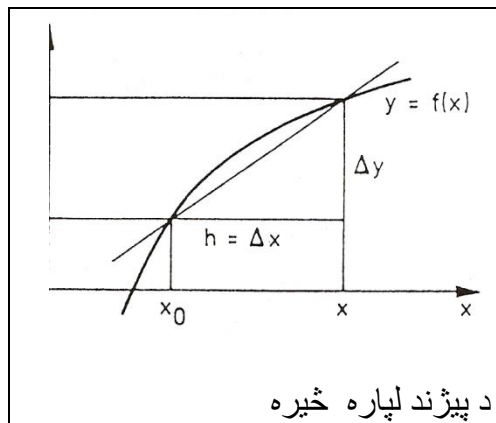
د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient

د یوې کرښې جگړه د یو له مشتق نیونې ټاکل کېدی شي:

$$\text{کرښه } y=f(x) = mx+a \text{ لرو}$$

د دې کرښې د جگړدني فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



د پیژند لپاره څیره

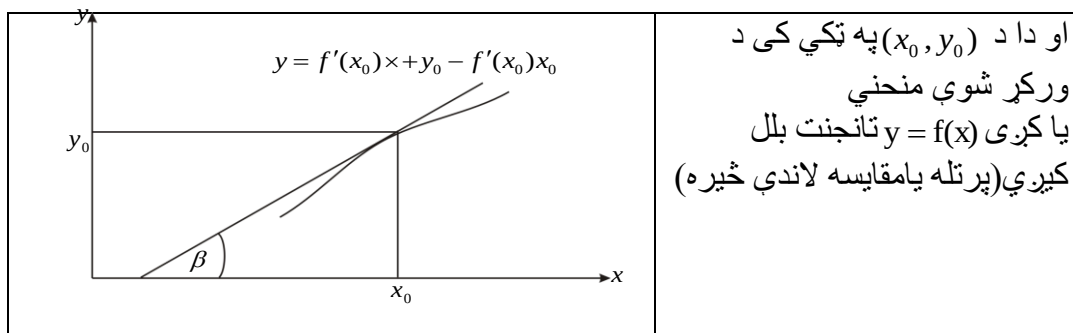
پیژند (تعریف 1-2)

$y = f(x)$ دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوی تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال یو په خوښه یا په زړه پورې ځای دی (مخامخ څیره دې وکتل شي). پس د تفاضل یا کمښت ویش Difference quotient د سیکانتی میلان یا جگوالی شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\end{aligned}$$

پیژند: که یو تابع یابلواک $y = f(x)$ د x_0 په ځای کې د مشتق وړ (قابل اشتقاق، رابیلیدور) وي، نو هغه لاندنۍ کرښه چې د (x_0, y_0) څخه تیريزي او میلان یا جگوالی $f'(x) = \tan \beta$ یی دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$



لومړۍ د تیرو جملو له مخې د دیفرنسیشن قاعدې د فورمال قاعدو په څیر بیا راټولوو یا رایوځاي کوو، بی له دې چې نیونی ورکړو. په استعمال کې یی بایددا نیونی کلکې تر پام لاندې ونیول شي. د لته د $f(x)$ او $g(x)$ بلواک په f او g لندیري. د مشتق نیونو یا رابیلدنو مشتق قاعدو جدول

فرمول	گڼه د قاعدې نوم
	۱ د ثابتې سره ځل (ضرب) قاعده
$(cf)' = cf'$	۲ د زیاتون – کمون قاعده
$(f \pm g)' = f' \pm g'$	۳ د ځل (ضرب) قاعده
$(f \cdot g)' = f' \cdot g'$	

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ $y = f(z); \quad z = g(x); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$ $y = f(x); \quad x = f^{-1}(y); \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$	گڼه د قاعدې نوم ۴ - وېش قاعده ۵ - د زنځیروني قاعده د په څټ یا برعکس قاعده

قضیه: هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقور دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

قضیه: هر د لوگاریتم تابع $y = f(x) = \log_b x$ د $b > 0, b \neq 0, x > 0$ سره، مشتقور دی او صدق کوي: $f'(x) = \frac{1}{x} \log_e = \frac{1}{x \cdot \ln b}$

--- د یوې تابع د مشتق قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځای کې تعریف نه ده، په هر ځای کې حد نه لري او همداسې په هر ځای کې متمادي یا ناپېرېکیدونکې نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري. تابع $f(x) = |x|$ په ۰ ځای کې تعریف نه ده:

$$\text{د ټولو } x > 0 \text{ له پاره باور لري } f(x) = x$$

$$\text{او له دې سره } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

د ټولو $x < 0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x) = -x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

دا چي کين- او بنی اړخیز حد یو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راورل شوي ځای کې مشتقور نه ده.

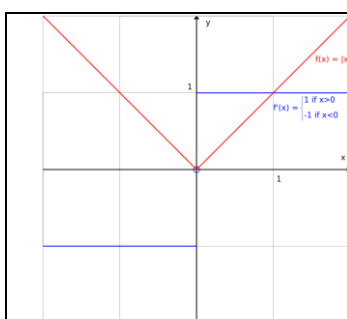
د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځایونو کې تر اوسه تل ورکړ شوې.

په صفر ځای کې سره له دې یو بنی اړخیز مشتق ورکړ شوی، یعنې لرو:

$$f'_{+}(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = 1$$

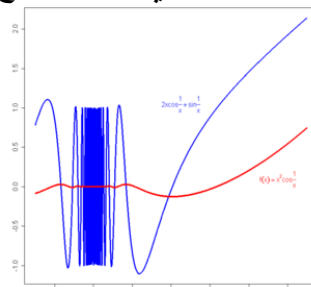
او یو کین اړخیز مشتق هم:

$$f'_{-}(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$



که مخامخ گراف ته وگورو، نو وبه پوهیږو، چي یوه مشتقور تابع باید گوډه نه وي یا په کوم ځای کې ماته نه وي یا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.

د یوه نه متمادي مشتقور تابع لپاره بېلگه:



یو تابع متمادي مشتقور بلل کېږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که یوه تابع هر چېرته مشتقور وي، باید نه دی چې مشتق دې یې هم متمادي وي.

د بیلگي په توگه:

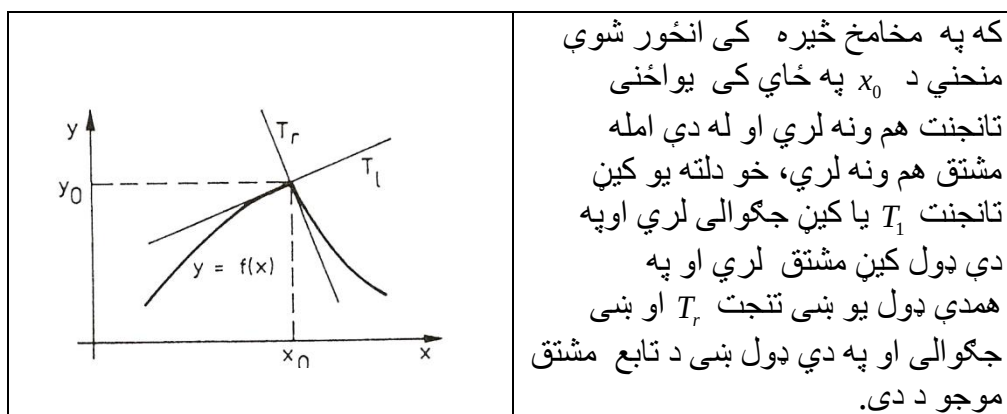
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د $x = 0$ سره مستقر دی. مشتق

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

بي ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نيوونيوا فرضيو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې
لیمیت (پولی) ته تگ ممکن وي يعني چیرته چې د تفاضل ویش یو لیمیت د $x \rightarrow 0$ لپاره
ولري.

که کومه منحنی چیرته راماته وي (څپره 4)، گورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنگه
جگیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع
ځانگړي خوي دی.



یوه نامتمادي (پرېکیدونکي) تابع کې د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناه ده.

اړین یا ضروري شرطونه:

دا دلته انځور شوی پر اېلم یا مسأله اوس د شمیرني د ټيک فرمول لاندې راوړو.

ولیدل شو چی په یوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا څرگنده ده چی هره متمادي تابع باید ضرور مشتقورنه وي. د بیلګي په توګه که تابع زاویه یا کونج ولري.

دې ته اړتیا ده چی وښایو، چی یواځي متمادي (نه پرېکیدونکي) توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چی هره تابع چې مشتقور وي باید لږ تر لږه متمادي (نه پرېکیدونکي) وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چی متمادیت د مشتقوروالی لپاره اړین یا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځای کی مشتقور وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه: د د مشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیت یا پوله یواځی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \rightarrow x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x) - f(x_0) > 0$ لاړ شي.

نو باور لري: $f(x) > f(x_0)$ د $x \rightarrow x_0$ لپاره.

دا د متمادیت یا ناپرېکړدنې پیژند دی.

دا تفاضل یا کمښت وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړخوي دی یعنی په یو ځای $x = x_0$ کی تعریف دی. لکه څنګه چی په متمادیت کی (لومړي څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینټروال ته وغزول شي.

تعریف: د $y = (x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a, b) کې، د اشتقاق قابل (مشتقور) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) ; a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a, b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a, b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځای کې بنی اړخیز اود b په ځای کې کین اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلگه: د توان تابع $y = x^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ په هرځای کې د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y = \sin x$ او کوساین تابع $y = \cos x$ په هرځای کې مشتقورده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

په یوه واز انتروال کې $y = f(x)$ مشتقور تابع مشتق بیرته $y' = f'(x)$ تابع ده، نو په دې ډول یې د مشتق قابلیت اود متادیت قابلیت پوښتنه کېدی شي.

پېژند: په یو د $x = x_0$ چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدور بلواک) $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري (رابیلیدور دی)، که د هغې

اشتقاق (رابیلیدنه) $y' = f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري (رابیلیدور وي). سری د $f'(x)$ مشتق د تابع (رابیلیدنه د بلواک) $y = f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=x_0} = f''(x_0) = \left(\frac{df'(x)}{dx} \right)_{x=x_0}$$

یو په یوه واز اینتروال کې مشتق کېدونکې تابع $y = f(x)$ هلته دوه واره مشتقور بلل کېږي، که د هغه مشتق $y' = f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.

ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

بیلگه ۲. ۷ :

لاندې توابع $y = c; y = x^n; y = \sin x; y = \cos x$

هر چیرته دوه واره مشتقور دي، د لاندې مشتقونو سره:

$$\frac{d^2 c}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \quad n \geq 2,$$

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x.$$

دا په ۲. ۴ کې تعریف شوي کیلمې کیدی شي چی په ساده ډول په خوښه پراخه شي یعني داکسپوننت مشتقونو ته واړول شي ($n - m$ مشتق (رابیلیدنه) یی وشمیرل شي).

د $y = f(x)$ تابع دلته n - واره مشتقور ده، که $n - m$ مشتق ولري یعنی

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}, \dots$$

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځای کې **مشتقور وي**، نو هلته ضرور متمادي یا ناپېرېدونکې ده.

ښوونه : د مشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چې پوله یا حد شته دی

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

پوله یا حد یواځی هلته کیدی شي چې موجود وي، چې د $x \rightarrow x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یا $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$ لار شي. نو باور لري: $f(x) \rightarrow f(x_0)$ د $x \rightarrow x_0$ لپاره. دا د ناپرېکړني یا متمادیت تعریف یا پیژند دی.

دا کمښت یا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دي:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړوند یا تړلی خوي دی یعنې په یو ځای $x = x_0$ کې تعریف دی. لکه څنګه چې په ناپرېکړنه یا متمادیت کې (۱۹ - څپرکي دي وکتل شي) کیدی شي چې د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف :

د $y = f(x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a, b) کې، د اشتقاق قابل (مشتقور) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x); a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a, b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a, b]$ کې مشتقور بلل کیږي، که دا سربیره پر دې د a په ځای کې ښی اړخیز اود b په ځای کې کین اړخیز مشتقور هم وي.

--- د معکوس تابع مشتق invers funktion

د یوه گراف به مرسته تابع او د هغه په څت تابع د بیلگې به توکه یوه مربع تابع.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرني لاندې ونيول شي. دلته دې ونيول شي، چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جگیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0) < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعنې $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x > x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y > y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy} \right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy} \right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_0}}$$

که په د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سری بیرته یو د تفاضل یا کمښت ویش لاس ته راوړي چی د هغه سره د

مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

جمله:

د معکوس تابع مشتق: که $y = f(x)$ د x په یوه چاپیریال کې د $x = f^{-1}(y)$ سره معکوس او هملته د $|f'(x)| = 0$ سره مشتق وړ وي، نو معکوس تابع د $y = f(x)$ سره مشتق وړ دی او باوري دی

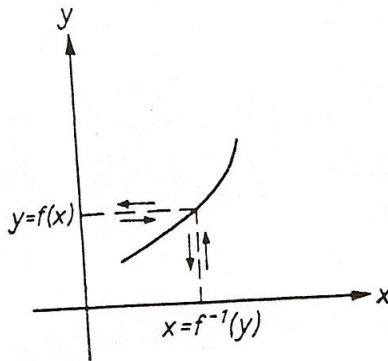
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کیدی چي د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له $x > 0$ او هم $y > 0$ او معکوس څخه، د $y = f(x) - f(x)$ سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

بلاخره لرو:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



بیلگه: د $y = f(x) = x^n; n = 1, 2, 3, 4, \dots$ تابع لپاره که $x \geq 0$ و ټاکل شي او په دې $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ توگه معکوس تابع، نو لرو:

شته دی او لاندې ارزښت لري

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{د } x > 0 \text{ لپاره. له دې امله د } y > 0 \text{ لپاره د معکوس تابع مشتق}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي

$$dx^{1/n} / dx = (1/n) \cdot x^{n-1}$$

بیلگه: دا $y = x^{\frac{m}{n}}$ تابع د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعنې د خوښي کسري اکسپوننت یا په «جگ عدد» کیدی شي چی د مخه څپرلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق نیول شي، چې د $x > 0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{m/n} = z^m, \quad z = x^{1/n}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m \cdot z^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, \quad x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

په لاندې جدول کې لاندې د بنسټتابع مشتق ځای په ځای شوی. له کین و ښي لور ته اول درځ نمره ده دویم درځ یی تابع $f(x)$ ښای او په دریم درځ کې یی مشتق $f'(x)$ ځای په ځای دي او په څلورم درځ کې د راپیداشوې پارامتر او د متحولې x نیونی ځای په ځای شوي. که چیرې د واریابلی یا پارامتر لپاره نیونی نه وي شوي نو په خوښه نیول کیدی شي.

جدول د بنسټابعو مشتق

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	وړاند نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n \cdot X^{n-1}$	$n = 1, 2, 3, \dots$
3	X^n	$n \cdot X^{n-1}$	$n \text{ ganz, } x \neq 0$
4	X^r	$r \cdot X^{r-1}$	$r \text{ rational, } x > 0$
5	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot x} \sqrt[n]{x}$	$n = 1, 2, 3, \dots, x > 0$
6	x^a	$a \cdot x^{a-1}$	$x > 0, a \text{ reell}$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	

12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} (Z)$
15	$\text{Arc sin } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
16	$\text{Arc cos } x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
17	$\text{Arc tan } x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
18	Arc cot	$-\frac{1}{1+x^2}$	

د جدول 20-2 او همدارنګه د جدول 20-1 په مرسته کیدی شي چي کم له کمه په فورمال ډول ، په خوبه د هرې شننيزې يا سپرنيزې (تحليلي) ويښي يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړي شي، سره له دې هم باید سړی همغه نښونې په نظر کي ونيسي.

بیلګه 20-18: د زیاتون قاعده کیدی شي د حل قاعدې په مرسته د یوې ثابتې سره یوځای یا ګډه شي او ډیرو زیاتونکو یا د جمعي اعضاو باندې استعمال شي. لکه لاندې

$$y = f(x) = 3\sin x + 4e^x - 7\tan x - 6\sqrt{x^3}$$

$$= 3\sin x + 4e^x - 7\tan x - 6x^{\frac{3}{2}}$$

دلته $\tan x$ یوځای د $x \neq (2k+1)$ او د x^3 له امله یوځای د $x > 0$ لپاره رابیلیدوړ دی او ددې بندیزونو (محدودیتونو) له امله لاس ته راځي.

$$\begin{aligned} dy/dx = f'(x) &= 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 6.(3/2).x^{(3/2)-1} \\ &= 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 9\sqrt{x} \end{aligned}$$

لکه چی بنسټیز بلواک او له دوي ټولی راجوري شوي سپرنيزې افادې هرچيرته متمادي يا ناپريکيدونکې وي، چيرته چې تعريف شوي وي. نو د جدول 20-2 له مخې بنسټیز بلواک يواځې تعريف ډيري کې رابيليدوردي، په دې کې کوم تغير نه راځي که په دې بلواکو څلور بنسټيزې عملي استعمال شي. يعني لاندې جمله باوري ده .

جمله 20-8: د بنسټيز بلواکو د څلورو بنسټيزو عمليو له لارې جوړې شوي شننيزې (تحليلي) افادې د دوي تعريفډيري په دننه کې رابيليدور ده.

که څوک ځنځيري بلواک جوړوي نو دا وينا بايد نوره هم رابنده يا محدوده شي

$$y = \sqrt{(x-1)^2(x+1)} = (x^3 - x^2 - x + 1)^{1/2} \text{ دا بلواک 19-20 بيلگه}$$

د $0 < (x-1)^2(x+1)$ ، پس د $x+1 > 0$ يعني $x > -1$ تعريف دی او هلته هم نه پريکيدونکې يا متمادي (د $x = -1$ په غاړه طبعاً بنی اړخيز) ده.

دا په ځانگړي توگه د $x=1$ لپاره هم ناپريکيدونکې يا متمادي دی (20-7 دې وکتل شي) د پيژندډېرۍ يا تعريف ډيرۍ دننه $x > -1$ دی، او هلته تابع يا بلواک په واقعيت کې نه پريکيدونکې يا متمادي دی. اوس نو مخ ته پروت تابع يا بلواک ترلی (ځنځيري) ورکړ شوی:

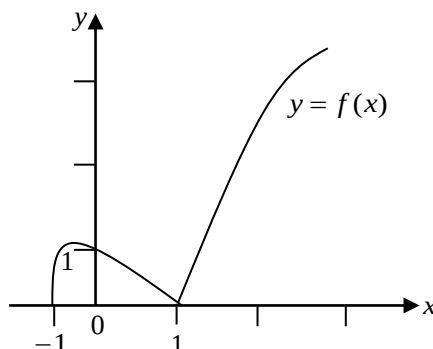
$$y = f(z) = \sqrt{z} = z^{1/2}$$

$$z = g(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$z = g(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

بلواک $z = g(x)$ د ټولو x لپاره مشتقور يا رابيليدور دی، تابع $y = f(z) = z^{1/2}$ له دې امله ځنځيري قاعده يواځې د $z > 0$ لپاره صدق کوي، پس د $x \neq -1$ ، $x > -1$ لپاره. هلته باور لري.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 - 2x - 1) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2 \cdot \sqrt{(x-1)^2(x+1)}}$$



د یو ځنځیري تابع مشتقوروالی د هغه x ارزښتونو لپاره باور لري یا هلته ډاډور دی، کوم چي د د ننني تابع یا بلواک په دننه کی پراته دي او په هغو کی د دننني تابع ارزښت د دباندني تابع د د تعریف ډیری په دننه کي پروت وي. که د x ارزښتونو ډیری د بند تعریفډیری دننه وښايي، نو لاندې جمله باور لري.

جمله 20-9: هره یوه شننیزه یا تحلیلي افاده د خپل بند(محدود) تعریفډیری په دننه کی رابیلدور ده.

بیلگه 20-20: ځنځیري قاعده هم استعمالیدونکی ده، که په یوه ترلي بلواک کی د ننني بلواک پخپله یو ترلي بلواک وي، پس (د لازمه وړاند نیونو لاندې) باور لري

$$y = f(z), \quad z = g(u), \quad u = h(x)$$

$$y = f(g(h(x))) \quad \text{پس د}$$

ځنځیري قاعده

$$dy/dx = (dy/dz)(dz/du)(du/dx)$$

فنکشن یا بلواک یا تابع

$$y = \text{Arc sin } \sqrt{1-x^2}$$

یو داسې تابع دی. دلته لرو:

$$y = f(z) = \text{Arcsin } z, \quad z = g(u) = u^{1/2}, \quad u = h(x) = 1 - x^2$$

دلته $h(x)$ رابیلیدور دی، $g(u)$ یواځې د $u > 0$ لپاره رابیلید وړ دی، پس د -1 ، $x_2 > 0$ او یا $x_2 < 0$ یاد $|x| < 1$ ، او $f(z)$ د $|z| < 1$ لپاره، پس د $1 - x_2 < 1$ لپاره پس د $1 - x_2 < 1$ لپاره ۱ لپاره په دې مانا چې $x_2 > 0$ د $|x| > 0$ لپاره.

رابیلیدور والی یواځې د لاندې چاپیریال لپاره تضمین دی

$$0 < x < 1 \iff 0 < |x| < 1 \quad \text{او یا}$$

$$0 < x < 1 \iff |x| < 1 \quad x \neq 0 \quad (20.53)$$

دپیژندډېری یا تعریفیرونه دننه $|x| < 1$ دی. د تعریفیرونه محدودیت (20-53) دی.

فنکشن یا بلواک (20-52) یواځې هملته تعریف او د (20-51) له مخې باور لري:

$$\begin{aligned} \frac{d \text{Arcsin } \sqrt{1-x^2}}{dx} &= \frac{d \text{Arcsin } z}{dz} \cdot \frac{du^{\frac{1}{2}}}{du} \cdot \frac{d(1-x^2)}{dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{x^2} \sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x| \sqrt{1-x^2}} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{for } 0 < x < 1, \\ +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{for } -1 < x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

اوس دي يوه بله د ډيفرنسيشن قاعده ورکړل شي کومه چی په جدول 1-20 کي غير مستقيم خوندي يا په بل عبارت دننه ده. دا د لاندې شکل بلواک ډيفرنخيشن دی

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دي امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

د ځنځير قاعدې له مخی ترڅيرني نيول کیدی شي، $z = g(x) \ln(f(x))$ ، $y = e^z$ د لاندې بلواک $u = \ln f(x) = \ln v$ ، $v = f(x)$ مشتق هم د ځنځيری قاعدې له مخی را پيدا کیدی شي.

دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{او}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot (g'(x) \ln f(x) + g(x)u') \\ &= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

د ځنځيری قاعدې د نيونو په نظر کی نيولو سره او د جملی 10-20 له مخی لاس ته راځي

جمله : که $f(x)$ او $g(x) > 0$ د $f(x)$ سره د مشتق قابليت لري ، نو $y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقور دی.

بيلگه : تابع $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره رابيليدور دی. دا دي داسی $f = x$ ، $g = x$ ځاي په ځاي شي او له دي سره $g' = 1$ ، $f' = 1$ له دي امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو:

$$dx^x / dx = x^x (\ln x + 1)$$

بیلگه: د $y = (x^2 - 1)^{\ln x}$, $x > 1$ دیفرنسیشن سره باید د $g = \ln x$ له امله وغوښتل شي چی $x > 0$ او د $f = (x^2 - 1) > 0$ له امله باید باور ولري $x^2 > 1$ او له همدې امله $|x| > 1$ پس کیدی شي چی د $x > 1$ لپاره د $f = x^2 - 1$ او $g = \ln x$ سره استعمال شي:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x^2 - 1)^{\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x} \ln(x^2 - 1) + \frac{(\ln x) \cdot (2x)}{x^2 - 1} \right) \\ &= (x^2 - 1)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(x^2 - 1)}{x} + \frac{2x \ln x}{x^2 - 1} \right), \quad x > 1\end{aligned}$$

بیلگه یا تمرین: د $y = f(x) = x^n$; $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ تابع لپاره که $x \geq 0$ وټاکل شي او په دې توگه $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$; $y \geq 0$ یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

، نو لرو: $\frac{dy}{dx} = f'(x)nx^{n-1}$ د $x > 0$ لپاره له دې امله د $y > 0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي.

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

بیلگه -- د $y = x^{\frac{m}{n}}$, $m, n \in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعنې د خوښي کسري اکسپوننت

یا په «جگ عدد» کیدی شي چی د مخه څپرلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق ونيول شي، چې د $x > 0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{\frac{m}{n}} = z^m, \quad z = x^{\frac{1}{n}}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m \cdot z^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

بیلگه : یوه بډای چی په یوه ټاکلي وخت کی ټولست (ټولډیری) M تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لگښتونه F ترلي دي. کیدی شي چي سملاسی د دې تولید په ټولست (ټولډیری) M کی تولید کړي، په یوه زخیره ځاي (زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته د زېرمتون (زخیره کونې) لگښتونه راپید کيږي (ددې د زخیري لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته ورورل شي. دلته نو د زخیره کولو لگښتونه منځ ته نه راځي. مگر تل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لگښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لگښتونه یی بولو. کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لگښتونه پرې وشي؟ د زخیري لگښت د چمتووالی لگښت سره متناسب دی، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمتووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وځوري یعنی. ټول لگښتونه

لگښتونه دي، L د زخیري لگښتونه او R د چمتووالی لگښتونه دي. دا ازاده لویه x د $y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي، چیرته چی F ثابت (همغه) یا په کلکه اینول شوي

تولیددیری M څخه نه شي سترېدلی، لونیډلی یا غټیډلی. له دې امله صدق کوي $0 \leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = \text{Min!} \quad (0 \leq x \leq M)$$

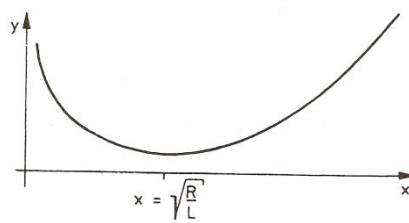
(لمړی $f(x)$) دوه واره دیفرنځیال کیري یا یې دوه واره رابیلیدنه

نیول کیري:

$$f'(x) = L - R/x^2, \quad f''(x) = 2R/x^3$$

د مینیموم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$ ، پس لرو $x = R/L$ ؟؟؟

د $x \geq 0$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کړي تگلار په څیره ۲۰. ۱۵ کی انځور شوی.

څرگنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = (R/L) > M$ وي، نو یو مینیموم په څنډه $x = M$ لرو.

نامساوت $x = R/L < M$ دا مانا لري $R/L < M^2$ په همدې ډول $R^2 < M^2L$. پس مخ ته لرو: $x = R/L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو: که د چمتوالي لگښتونه R ، زخیري لگښتونه L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د زخیري لگښتونه د چمتووالي لگښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلگه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي:

$$R = 1000 < M^2L = 108 \cdot 10 = 109$$

ستر يا غټ ازاد لگښت دی

$x = R / L = 1000 / 10 = 100 = 10$ ازاد a دلته ۱۰ یوونه باید ورزیات شي، چی ۱۰۰۰۰ یوونه تولید کړي د $M = 10, R = 1000, L = 1$ لپاره صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده. یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

د رول قضیه (Rolle)

ننوتنه :

که د f یوه تابع په بند اینتروال $[a, b]$ کې متمادي او د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد k د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ شته، داسې چې $f(c) = k$ دی

د وایر شتراس قضیه Weierstrass

که د f یوه تابع په بند اینتروال $[a, b]$ کې متمادي یا ناپربکیدونکي وي، نو په دې اینتروال کې لږ تر لږه یو جگ ارزښت (اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت (اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کيږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي. کیدی شي چی یو یو غریز (monoton مونوتون یا جگټیټ)

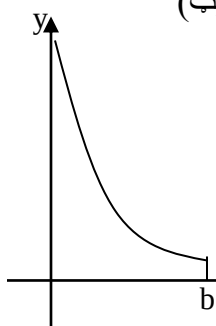
ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.

د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه

حتمي دی. د بیلگې په توگه د $y = f(x) = \frac{1}{x}$ تابع

په نیم بند اینتروال $(0, b]$ کې متمادي ده،

مگر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې

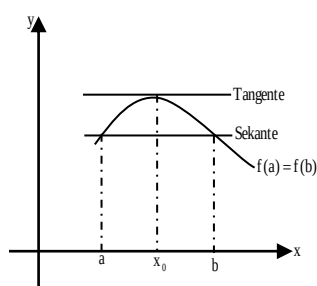


توگه اعظمي ټکی نه لري.

۳. د مشتق منځ ارزښت قضیې

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق — او تفاضل ویش ترمنځ داسې نږدې اړیکې وجود لري، کومې چې د انالیزې په منځ ارزښت قضیو کې تشریح کېږي. د تابع او انحرافي ارزښتونو څخه لومړۍ پسی تړلې لاندې د رول قضیه لاس ته راځي

د رول (Rolle) قضیه:



یوه د f تابع دې په بند اینتروال $[a, b]$ کې متمادي وي د $f(a) = f(b)$ سره او په واز اینتروال (a, b) کې مشتقور، نو لږ تر لږه یوځای $c \in (a, b)$ شته دی د $f'(x_0) = 0$ سره.
حل:

- (۱) که f ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0) = 0$
- (۲) که f ثابت نه وي، نو د وایر شتراس د قضی له مخې لږ تر لږه د تابع یوخورا لوي او یوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپیر لري، ځکه چې f ثابت نه دی. نو له دې کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د $f(a) = f(b)$ سره نامساوي دی. په دې اساس د اینتروال په دننه کې یو مونوټون (جگتیت) ځای x_0 موجود دی. د مشتقور توابعو مونوټوني (جگتیت ارزښت) شتون د اړین یا ضروري شرطونو قضی له مخې لاس ته راځي: $f'(x_0) = 0$

تر اوسه مو وښوول، چې د لازمو شرایطو لاندې یوې افقي قاطع ته یو افقي تانجنت هم شته دی.

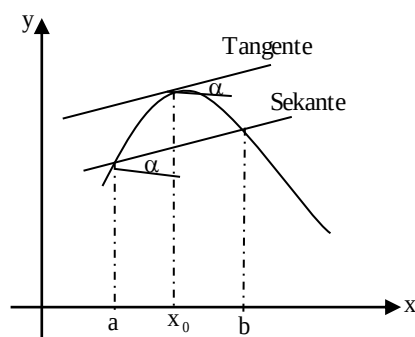
دا هندسي پرابلم کیدی شي چې عمومي شي.

پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ایا یوې مایټلې قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه میل (جگوالي) سره جوړیدلی شي؟

ځواب یی لاندې قضیه راکوي

د مشتق د منځني ارزښت (وسطی قیمت) قضیه:
که $y=f(x)$ تابع په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادی او په واز اینټروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته یوځای $x \in (a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$



(څیره ښه نه ده انځور شوي ټیک دي)
د الفا د کونج لاندې ضلعي باید د x محور سره غبرګي وي)
حل:

دا پرابلم په یوه مرستندوي تابع داسی تعریفیږي، چې د رول قضیه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامنځ ته کوو:

$$y = g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

د مرستندوي تابع په څیر د مشتق تابع جوړیږي:

$$h: h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a),$$

نو باور لري: $h(a)=h(b)=0$. برسيره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په $[a,b]$ کې متمادي ده. له دې سره د رول د قضیې وړاند نیونه (فرضیه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چې یو ځای $x \in (a,b)$ شته دی د $h'(x)=0$ سره، چې له هغې لرو:

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ یعنی } h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

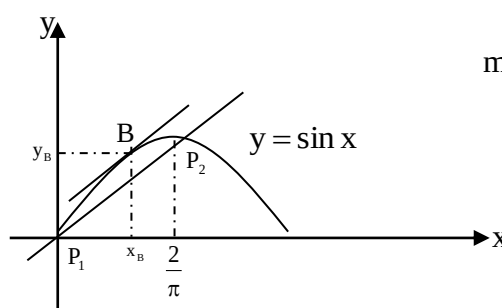
پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بېلگې نوره هم روښانه کړي.

بیلگه :

د $f(x)=\sin x$ یوه تابع دې داسې ورکړ شوي وي، چې په یوه ټکي $B(X_B, Y_B)$ کې تانجنت د منحنی مماس وي، اوکوم چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2}, 1)$ ټکو کې همغه میل یا

جگوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوڅي) میل یاجگوالی:



$$m = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}$$

د منحنی میل د $B(x_B : y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B) = \cos x_B = \frac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي: $x_B = \arccos \frac{2}{\pi} = 0,88$ او $f(x_B) = f(0,88) = 0,77$

لمس ټکی: $B(0,88 : 0,77)$

د تانجنت مساوات: $y = \frac{2}{\pi}(x - 0,88) + 0,77$

د منح قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

پراخه شوې یا غزېدلې منځفضیه :

که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اینټروال $[a, b]$ کې متمادی توابع وي او په واز اینټروال (a, b) د مشتق وړ او $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x \in (a, b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0 \in (a, b)$ وجود لري چې لاس ته تری راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او $v = g(x)$ مساوات د x په لور معکوس

کېدنه ورکوي، یعنې $x = g^{-1}(v)$

که f په تابع کی هم نوې متحوله ځای پر ځای شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته تری راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیري قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

که په $u = h(x)$ تابع د $v_1 = g(a)$ او $v_2 = g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د ځای $v_0 \in (v_1, v_2)$ په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2) - h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

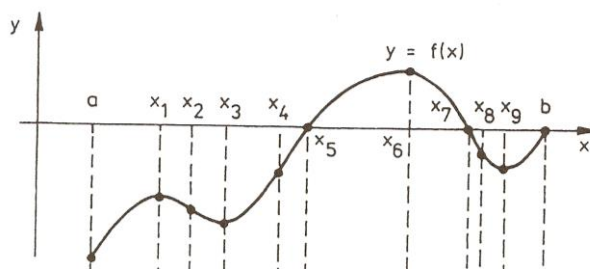
له دې څخه د $h(v) = f(x), v = g(x)$ او $x_0 = g^{-1}(v_0)$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

•
•
•
•
•

یو غریزی توابع (Monotony) (یونانی: یو غریز، برابر ډوله)

جگیدونکی (متزاید)، ټیټی دونکی (متناقص) توابع (جگ-ټیټی دونکی توابع)



که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره f یوه تابع په یوه اینتروال کې $f(x_1) \geq f(x_2)$ یا $f(x_1) \leq f(x_2)$ وي، نو تابع په دې اینتروال کې مونوټون جگیدونکی (- ټیټیدونکی) بلل کېږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) > f(x_2)$ یا $f(x_1) < f(x_2)$ کره یا ټینگه مونوټون جگیدونکی (همغریز ټیټیدونکی) بلل کېږي.

لاندې قواعد، چې له همغریزووالي په لاس راځي، د همغریزووالي حالت لپاره گټور دي.

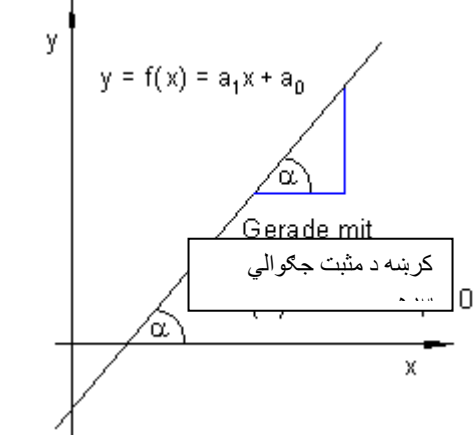
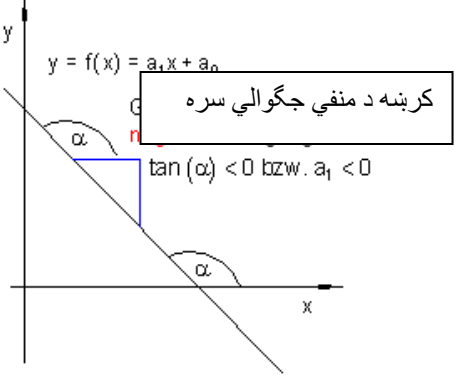
f یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو (ساحه) D کې مونوټون جگیدونکی ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د f یو تابع ټیک هلته په D کې مونوټون ټیټی دونکی ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

یو غریزوالی (یکنواخت) Monotony جکیتیتوالی، د جکیتیتوالی جملی

 $y = f(x) = a_1x + a_0$ Gerade mit کرنه د مثبت جگوالی	۱. $f(x) = a_1x + a_0$ کرښیز (خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې لپاره مسئلې یې ثابتې جگېدنه یا ثابت میل، $a_1 = \tan(\alpha)$ دی، چېرته چې α د کرښې او مثبت لوریز د x-محور ترمنځ زاویه (کونج) ده. په مخامخ شکل کې: کرنه د مثبت میل سره $\Leftrightarrow \tan \alpha > 0 \Leftrightarrow a_1 > 0$
 $y = f(x) = a_1x + a_0$ کرنه د منفي جگوالی سره $\tan(\alpha) < 0$ bzw. $a_1 < 0$	که $0 < \alpha < 90^\circ$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې مانا چې $a_1 > 0 \vee \alpha > 0$ همداسې ($\Leftrightarrow$)، نو کرنه جگړي. دا دا معنی لري، چې د جگړدونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت هم جگړي. په مخامخ شکل کې: کرنه د منفي جگړدنې سره: $\tan \alpha < 0$ همداسې ($\Leftrightarrow$) ($a_1 < 0$) داپورته داسې دی: $\tan \alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

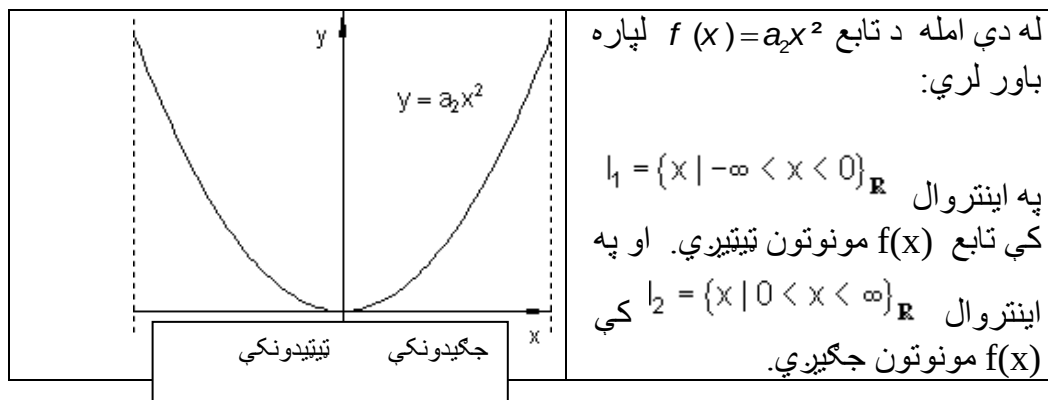
که $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې

$a_1 < 0$ ، نو کرنه ټیټیږي یا لویږي. دا په دې معنی، چې د جگړدونکي x سره د تابع

ارزښت $f(x)$ کوچنی کیږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغریزې تابع (یا د جگ-ټیټېدونکي تابع) غریزو او له یوه مونوتون جگړدونکي تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې مونوتون ټیټېدونکي تابع څخه، که $a_1 < 0$ وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کيږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په تولیزه توگه د منحنی د گراف په هر ټکي تانجنت اېنسول کېدی شي.



لکه د کرښې په گراف کې، چې جگیدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جگیدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحنی له یوه ټکي څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جگیدنه $0 <$ ← منحنی مونوتون جگيږي

د تانجنت جگیدنه $0 >$ ← منحنی مونوتون ټیټیږي

د تانجنت جگیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کيږي.

روښانه ده چې د $f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع میل (جگوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضیه په لاندې ډول فرمولوو .

قضیه: د $f(x)$ تابع دې په اینتروال I کې مشتق وړ وي.

۱ که د $f(x)$ تابع په اینتروال I کې مونوتون جگیدونکي وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$ لپاره

که $f(x)$ په اینتروال I کې مونوتون ټیټیدونکي وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ لپاره.

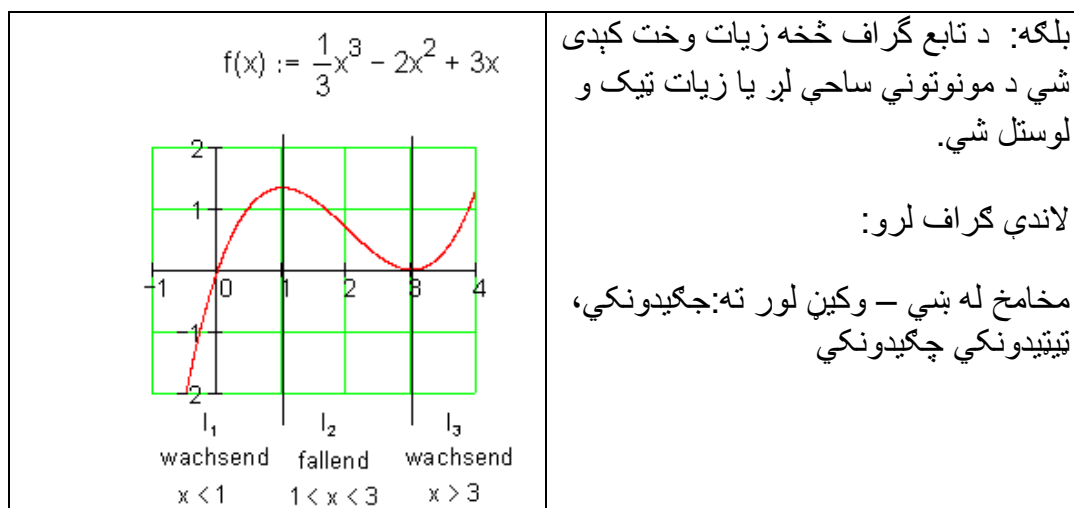
۲. که $f''(x) \geq 0$ وي، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې مونوټون جگیدونکي ده.

که $f''(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په ایتروال I کې مونوټون ټیټیدونکي ده.

۳. که $f''(x) > 0$ وي، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه مونوټون جگیدونکي ده.

که $f''(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه مونوټون ټیټیدونکي ده.

د مونوټوني پیژند ورشو (تعریف ساحو) ټاکنه:

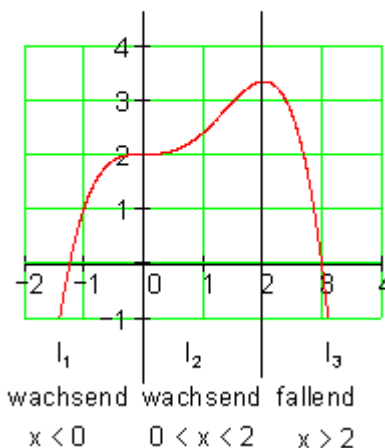


د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوټون جگپدونکي دی.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$ مونوټون ټیټپدونکي ده.

د $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوټون جگپدونکي ده.

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



بیلگه:

پورته له بني – وکين لور ته: جگيدونکي، جگيدونکي، ټيټيدونکي

له گراف څخه لاندې مونوتوني ساحي لوستل کيږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج گيډونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونجگيډونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون ټيټيډونکي ده.

ځای اړونده افراطي ټکي

يادونه: که په ليکنه انحرافي ټکي گوري، نو هغه افراطي ټکي دي.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x) = 0$ ولرو نو یو نسبي تیت ټکی مخ ته لرو.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x) = 0$ او $f''(x) > 0$ ولرو نو یو نسبي تیت ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x) = 0$ او $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي (تیت ټکي یا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x) = 0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه $(+ , -)$ ، په دې پریکړه کوي چې ایا یو تیت ټکی (اصغریټکی) او که جگ ټکی (اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

۱ - دا اړیکي یواځې د x_0 لپاره ارزښت لري چې د تعریف سټ په دننه کې پروت وي او هلته د $y = f(x)$ تابع پوره څو ځلي مشتقور وي، د غاړو (څنډو) او د هغو ځایونو له پاره چې هلته $f(x)$ تابع کم یا هیڅ مشتقور نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲ - شرایط چې $f'(x) = 0$ وي (مشتقور تابع) یواځې د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط).

۳ - شرایط $f'(x) = 0$ او $f''(x) \neq 0$ د بحراني ټکي لپاره یواځې پوره کیدونکی دی او نه ضروري (بیلګه:

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع ګراف وکارئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل: د بیلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د $x=0$ په ځای کې خورا تیت ټکی (اصغري-) لري.

گراف: که گراف دې گران لوستونکي وباسي

د انحراف ټکي له پاره اړيکين شرطونه:

۱ - د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرخاي لري، يعنې دلته يو پحراني ټکي پروت دی.

۲ - د تابع دويم مشتق: $f''(x) = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکي مخ ته لرو.

بيلگه: د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

گورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوی دی.

د پورته شني څخه لاندې پېژند ته راځو:

پېژند: د $x = x_0$ په چاپېريال کې د $y = f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جگټکی په همدې ډل نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) > f(x_0)$$

جمله: (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کې مشتقور تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲ دې مقايسه شي): چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځاي په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حتمي نه ده چې $y = f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کې دوه واره مشتقور تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جگ ټکی مخ ته پروت دی، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له بنی لور انحنا یا کوږوالی اوله کین لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینتروال کې د مشتقور تابع f دویم مشتق $f'' > 0$ وي، نو په دې اینتروال کې گراف کین کوږ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع گراف بنی کوږ یا بنی انحنا لري.

دوه څیرې (د لاندې بېلگې څیره و باسی ؟)

بیلگه:

ټول گونگتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو (ساحه) کې کینکوږدی (کینه انحنا لري) (ننوتی یا مقعر دی) او په کومه ورشو کې بنی کوږ دی (بنی انحنا لري) (محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق)

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

د $6x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کین گوروال (کینه انحن (ننوتی یامقعر)

د $6x - 4 < 0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره بنی کوروالی (بنی انحن) وتلی یامحدب))

بیلگه: د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ گراف یو های پارابول دی. د های پارابول کومه ځانگه کینه کړه ده یا کینه انحن لري (مقعر)، او کومه یوه یی بنی کوروالی یا بنی انحن لري (محدب)؟

$$\text{دویم مشتق: } f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}; f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول ځانگه بنی کوروالی یا انحن لري (وتلی یا محدب).

د لپاره $x > -2$ د مخرج او همداسې ټول کسر (مات) مثبت دی.

های بارابول کینکور دی یا کینه انحن لري (ننوتی یامقعر).

بیلگه: د دواړو توابعو $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{x^3}$ کوروالی (انحن) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

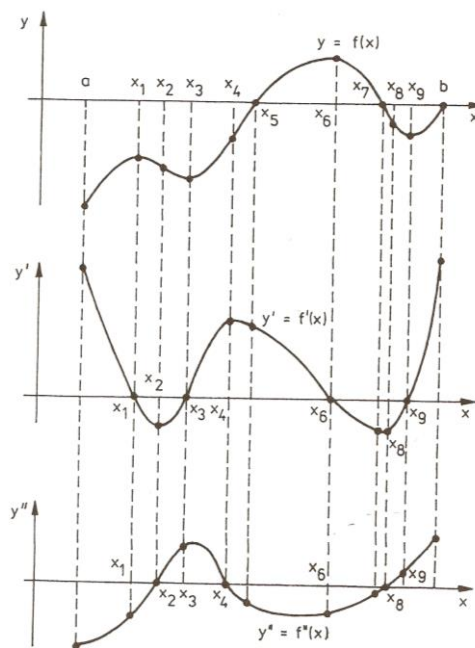
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & g'(x) &= \frac{\sqrt{x^3}}{2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} & g'' &= \frac{3}{4\sqrt{x}} \end{aligned}$$

دویم مشتقونه د $x \in R^+$ پاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده گراف بنی کوروالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $f''(x) > 0$ دی. اړونده گراف کین کور دی یا کینه انحنا لري. اړونده گراف یو کین کوروالی یا کینه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي (اړونټکي)



یادونه: ولې اړونټکی؟

وبه گورو، چې په دې ټکي کې گراف خپله لور اړوي، نو مور له پورته څیرې اټکل کولی شو چې : که د x_0 ځای کې دا لاندې ولرو $f''(x) = 0$ (او $f'''(x) > 0$ ، نو یو بنی-کین- انعطاف ټکی (اړونټکی)

مو مخ ته پروت دی.

برعکس (په څټ):

که وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) < 0$ نو یو کین - بنی - د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د انعطاف‌ټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x) = 0$ وي ، داچی دا بنی - کین - او که کین- بنی - انعطاف ټکی (اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

۴ - شرایط $f''(x) = 0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یا ضروري دي.

د $y = x^4$ لپاره $f''(0) = 0$ دی، مگر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

۵ - شرایط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ د انعطاف‌ټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

گورو چی $y = f(x) = x^5$ تابع د $x = x_0 = 0$ ځای کی یو انعطاف‌ټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4, \quad f'(0) = 0$$

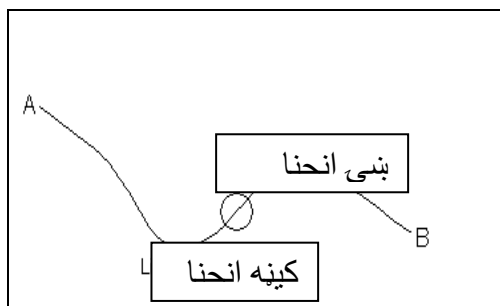
$$f''(x) = 20x^3, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2, \quad f'''(x) = 0$$

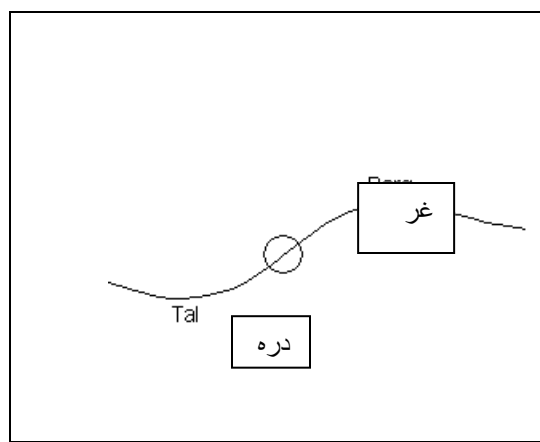
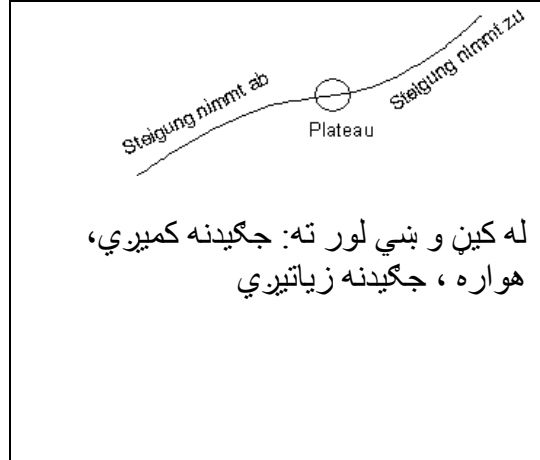
گورو چي دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفر څخه کوچنی او نه لوي دی.

تر مخ راوړني او د کلمي روښانه وني:

د دې کلمي د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توگه مخ ته ځو:

	د بایسکل خُغاستي چي له A څخه خُغلي د منحنی څخه تیرېږي او B ته رسيږي. د همغه وخت د بایسکل خُغاستي د انډل حالت د خُغاستي په وخت کي په پام کي ولری. د کیني منحنی (د کین لوري د انډل حالت) څخه وروسته د بنی لوري منحنی کي خُغلي.

د کیني- او بنی منحنی (کړي) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولاړ وي (عمود وي)، چي دا د انډل بدلون دی له کیني لوري و بنی لوري ته. دا د کیني او بنی منحنی ترمنځ اوړیدنه یاد **انعطاف ټکی** بلل کیږي.

	تاسو له بایسکل سره په یوه غونډی خُغلي. وروسته له هغې، چي له تالي څخه تیرېږي، نو لار په جگې دو پیل کوي. په لومړي سر کي نرم او بیا په نیغه جگېږي، بیا په دې پسي جگوالی بېرته کميږي، چي پاس د غونډی په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چیرته په غونډی پورته صفر ارزښت ته رسيږي. یو چیرته په لار جگې دغه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.
 له کین و بنی لور ته: جگیدنه کميږي، هواره، جگیدنه زیاتیږي	د بایکل خُغلوونکي بل حالت، چي له څنګ دیاگرام څخه یې رانیسو: په غره د بایسکل خُغاستمیل یا جگې دغه لومړی کميږي، چي له سره بېرته جگه شي. ددې ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جگوالي سره (یوه نسبتاً هواره). دې نسبتاً هوار ځای کي د توبه کرښي جگې دغه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی (د انعطاف ټکی) پروت دی.

پوهیرو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جگوالی تابع دی، چې له گراف څخه یې جگوالی لوستل کیږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوی یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنلار همغسې ده، لکه د پیل تابع $f(x)$ لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع $f'(x)$ باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکې له دې چې یو لړ جملې د بحراني (جگ – ټیټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیرو، غواړو چې دا کلیمې تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کې سره را غونډې شي.

پېژند ۲۰. ۶ : په یوه چاپیریال $x = x_0$ کې مشتق‌ور تابع $y = f(x)$ یو کین-بنی-انعطاف‌ټکی په همدې ډول بنی-کین-انعطاف‌ټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جگ‌ټکی (عظمي نقطه) په همدې توگه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله ۲۰. ۱۱ : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق‌ور تابع $y = f(x)$ اکسټریموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي (یادونه ۲ دې پرته شي): چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي، خو حتمي نه ده چې $y = f(x)$ دې یو بحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲۰. ۱۲ : (د اوږونټکي (انعطاف ټکي) لپاره اړین شرایط):

که په $x = x_0$ کې دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري (یادونه ۴ دې پرته شي): چیرته چی $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کیدی چي اوړونټکي موجود وي. مگر چیرته چی $f''(x) = 0$ وي ، اوړونټکی شته کېدلی شي، خو اړین یا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي. له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۲۰، ۱۳: د اوړونټکي یا انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه (که په x_0 کی دریوار مشتقور تابع $y = f(x)$ لپاره وي:

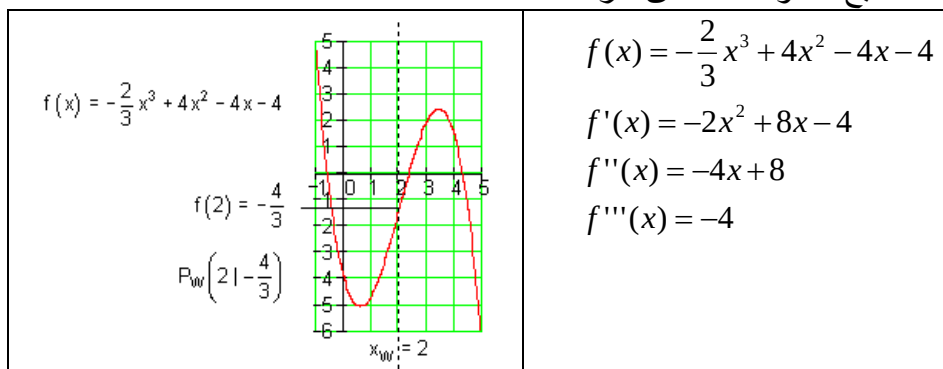
$$f''(x) = 0, \quad \text{او} \quad f'''(x) \neq 0$$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو یو کین-بني – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو بنی-کین-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

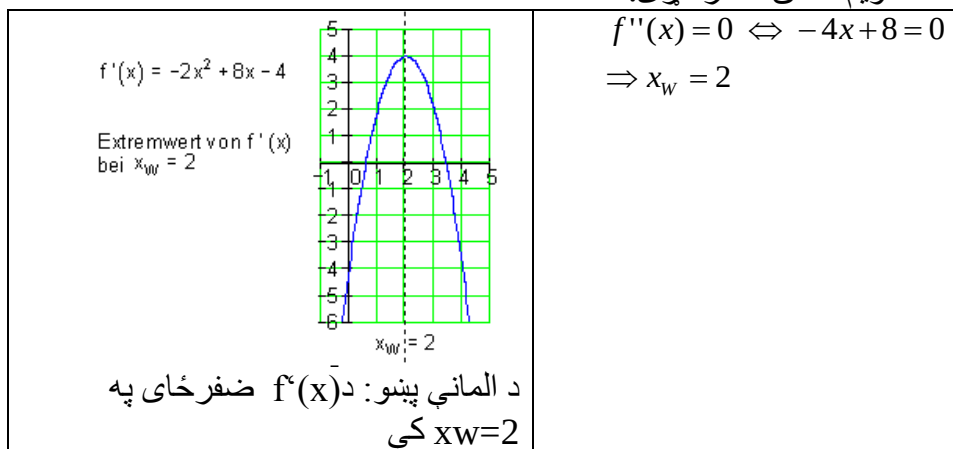
شننیزه یا تحلیلي بیلگه:

یادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف – یا اوړون ټکی په نښه کوو.

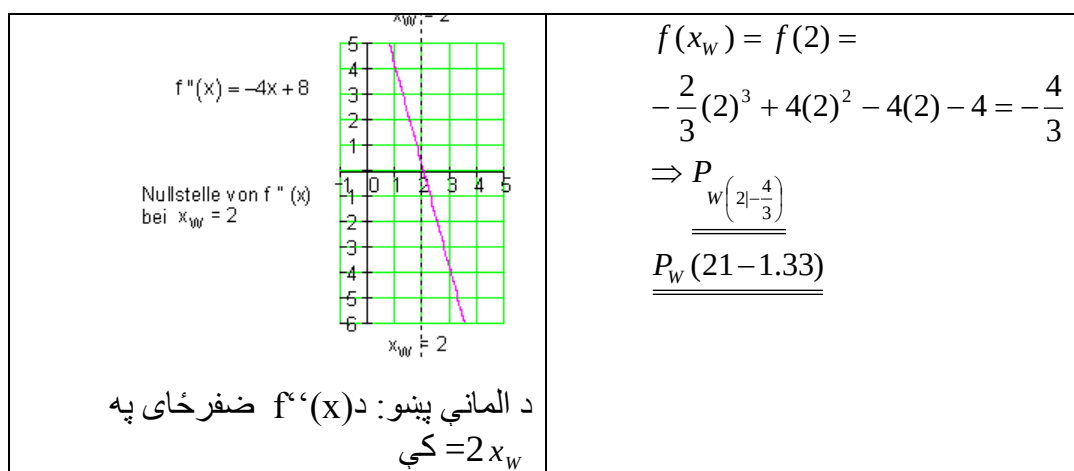
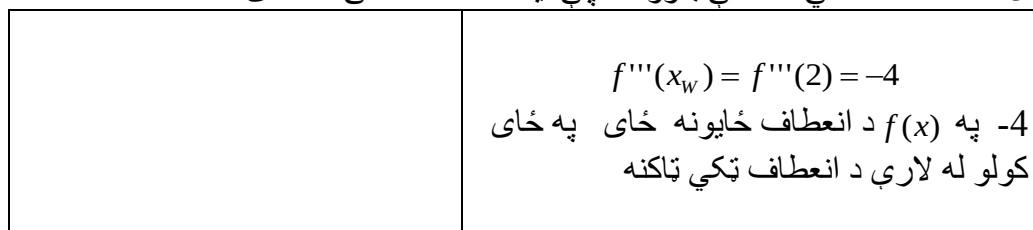
1- تابع مساوات د مشتق سره



۲- دویم مشتق صفر کری.



3- د انعطاف ټکي له مخي ښوونه، چي ایا د انعطاف ټکي شته دی؟



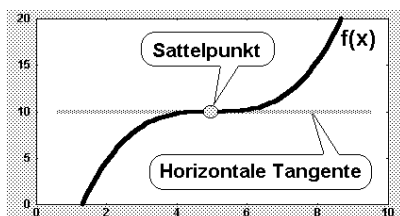
پام: په انعطاف‌خای x_w کې د $f(x)$ گراف کېږي.

په یوه په خوښه ټکي x_0 کې د کړونې (انحنا) لپاره باور لري:

$f''(x) > 0$ په دې معنی دی، چې $f(x)$ کین لور ته کېږي (انحنا لري) دی.

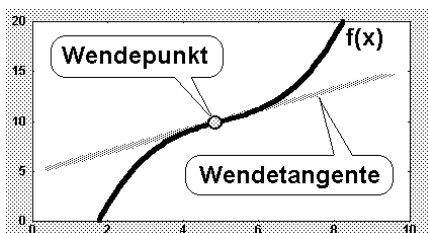
$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کېږي (انحنا کوي)

یو زینټکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

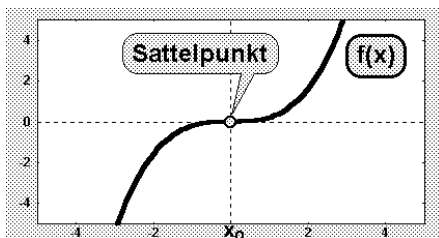


پېژند: د زینټکي (کله کله برنډې ټکي هم بلل کېږي) لاندې د انعطاف‌کي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطاف‌کي چې تانجنت یې افقي (پروت)

وي:



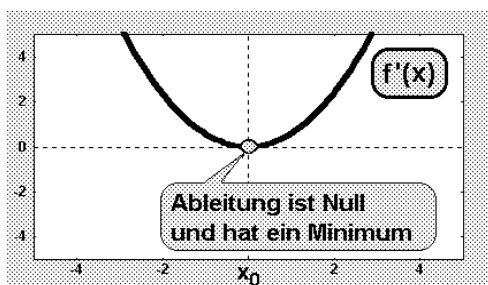
د پرتلي لپاره دې بیا یو “عادي”، انعطاف‌کي ورکړ شوی وي. دا یو مائل (نه افقي) تانجنت لري



توضیح: اوس فکر کوو، چې یو زینټکی څنگه د شمېرلو له مخې پېژندل کېږي شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چې یو زینټکی له ښي-و کینه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جگوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جگوالی کمیري، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جگړي.

یو زینتکي (د بني – کین – بدلون سره) په دې پېژندل کېږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي تیتکي (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینتکي (بني-کین-بدلون) $f'(x_0) = 0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنای، چې بل جگ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخنېبه له منفي و مثبت ته بدلېږي.

له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکي قضیه ومیندل شوه:

د زینتکي لپاره جمله (خوې ټاکنه) (د بني – کین – انعطاف سره)

الف: د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0) = 0$

ب: د x_0 په ځا کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعنې $f''(x) = 0$ دوم مشتق مخنېبه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.

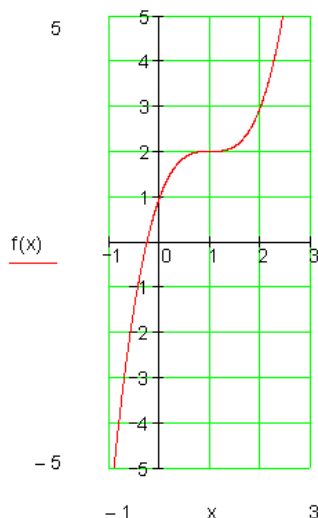
بل بدیل (د گرانو دوستانو وړاندیز)

؟

۱.

،

زینتکی Der Sattelpunkt



د انعطاف ټکي یو ځانگړی حالت زینتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جگیدني سره که د کین لور ورنږدې شو فکر کیري، چي، نسبي جگتکی مو مخ ته پروت که څوک د بني لور ور نږدې شي فکر کوي، چي یو نسبي ټیټکی مخ ته لرو. اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري څیړو: مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

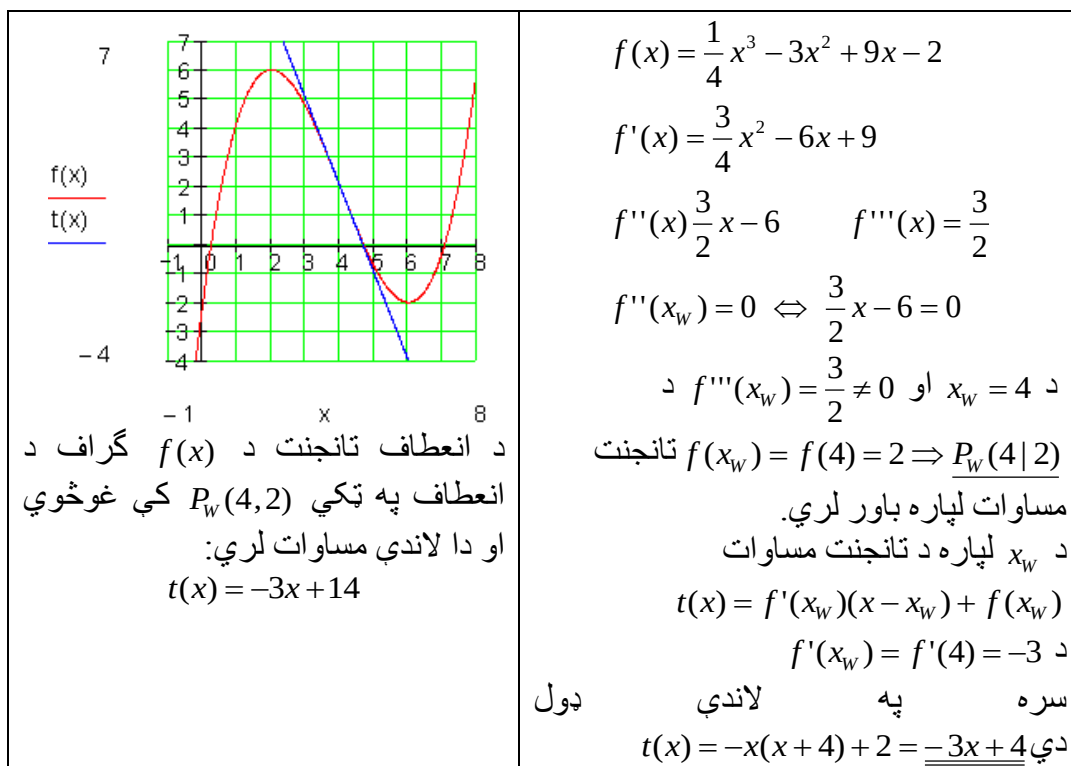
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

د $x=1$ سره زینتکی	د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي. دا چي د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینتکی دی.

د انعطاف ټکي پیداکونه:

د تابع گراف باندې انعطاف ټکي کي تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیري. د انعطاف تانجنت هم همداسي پیدا کیري لکه د تابع دگراف په یوه ټکي کي تانجنت، چي تانجنت مساوات ټاکل کیري.



د انعطاف- یا وړون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کېږي. د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کېږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ دلته تر څیړنې لاندې نه نیول کېږي.

د کرې یا منحنی بحث (Kurven Diskussion):

یوه تابع $y = x^3 + x^2 - 3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نڅه کېږئ، رښانه کړئ، چې انحنایېرته له کینې لور و بڼی لورې ته او له بڼی لورې و کینې لورې ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کری.
 - لاندې توابع رسم کری، جگ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکرئ.
 - $x^3 + x$
 - $3x^3 + x + 2$
- ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پېژنو. موږ دې بحث ته د منحنی بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.
- په لاندې ډول تلنه گټوره بلل شوې.

د تعریف ساحه: د تابع څېړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وړه ده.

Symetry تناظر : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$

د مرکزي تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = -f(x)$

په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅېړل شي.

په ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان (د پولینوم درجه) یې جفت (جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان (د پولینوم درجه) طاق (ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

Extrema بحراني ټکي : د نسبي بحراني ټکو ټاکل (جگټکی، ټیټټکی)

د جگټکی یا نسبي جگ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) < 0$$

انعطافټکی یا اوړونټکی : Inflection Point

د انعطافټکو او همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:

$$f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$$

زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.

د تابع تقاطع د x او y محورونو سره (د محورونو غوڅټکی):

$$P_{xi}(x_i | 0) \Rightarrow (x) = 0 \quad \text{د } x - \text{محور سره غوڅټکی}$$

$$P_y(0 | y_s) \Rightarrow f(0) \quad \text{د } y - \text{محور سره غوڅټکی (صفرځای) ټاکي}$$

دگراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې گراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځورېږي. دا راته په گوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمېرل کېږي.

د انحناء حالت او یو غبریزوالی:

د انعطاف په ټکي x_w کې د $f(x)$ گراف تغیر خوري.

په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحناء لپاره باور لري:

$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف کینه انحناء لري (کونوکس)

$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف ښی انحناء لري (کونکاو)

یو غبریزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوټون جگړي. که

د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوټون ټیټیډونکی دی.

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې کره غښتلي مونوټون جگړیډونکی ده.

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې غښتلي مونوټون جگړیډونکی ده.

د پېژند ورشو ژی ټکي:

د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشو کې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیت $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ او $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلگه:

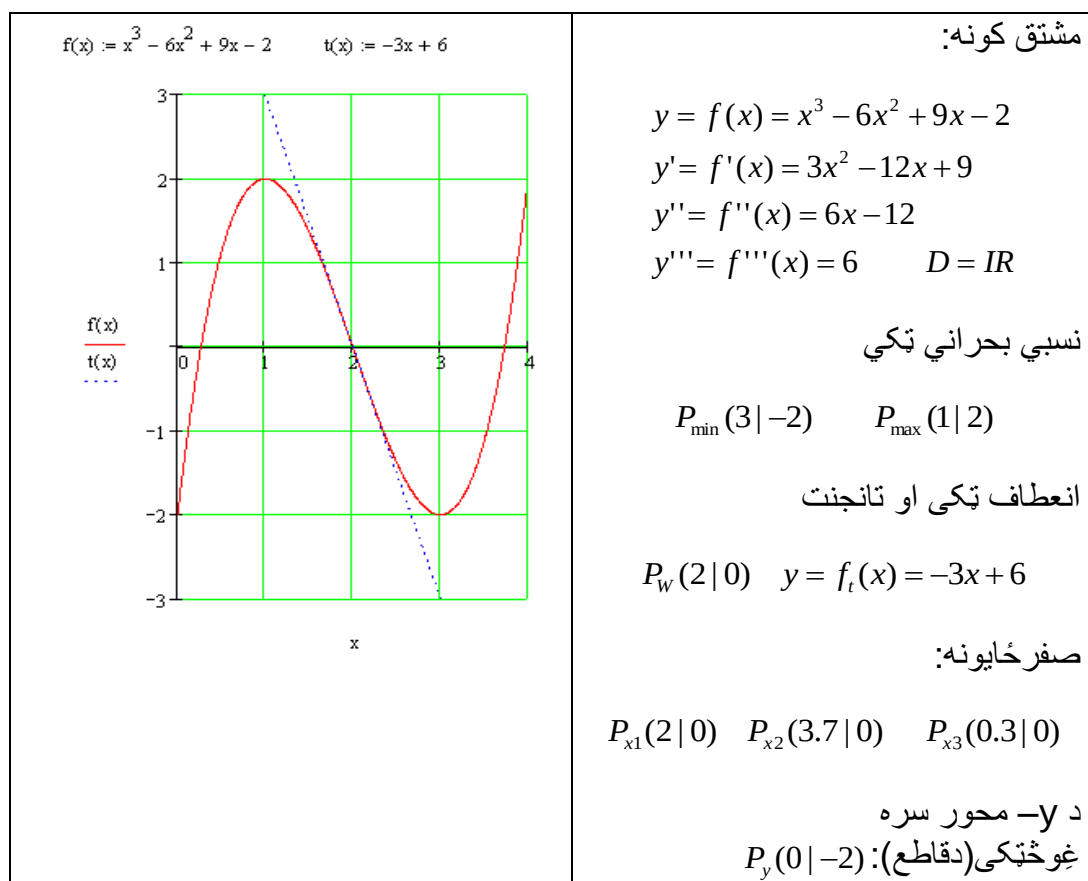
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

.

.

.

.



د تابع حالت په $x \rightarrow -\infty$ او $x \rightarrow \infty$ کې $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = \infty$ سیومتري: نه لري	یو غریزو والی (مونوټوني یاجگ - نیتوالی) په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$ کې یو غریز جگيري. په $I_3 = \{x \mid 3 \leq x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې یو غریز جگيري.

د کږوالي یا انحناء حالت:

بنی کږوالی یا انحناء (محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کین کږوالی یا انحناء (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

د افراطي د جگ-ټیټ ټکو جملې یعنې دا وروستي نومولی جملې اوس باید په یو لړ بیلگو استعمال شي.

دلته دې د ورکړ شوو توابعو، د پیژند سټ (- ډیری)، انعطافکي، جگ-ټیټکي (اکستريموم، قطبونه، اسیمپټوټی وینوول شي او په دې جوړ(ودان) دې د تابع تلنه وکښل شي. دې ښوونو یا څیړنو ته د کږو خبرې اترې یا - مباحثه ویل کیږي، یعنې دلته د کږو (انحناء) د مختلفو ډولونو په څوونو غږیږو.

موږ خپل تمرکز د افراطي ټکو(اکستريموم) او انعطافکي(اړونټکو) رامعلومو یا روښانو څیړنوته متوجه کوو او د «انحناء- خبرې اترې» د انحناء(کږې)-چنون « د لاندې شیمه له لارې مخ ته بیایو:

0 - د چمتووالي لپاره د تابع $y = f(x)$ د دریمې درجې پورې مشتق پیدا کیږي، بیا له ټولو هغو ارزښتونو x_i څخه سټ M جوړیږي (۴ ټکی) چی وروسته باید ځانگړې تر څیړنې لاندې ونيول شي.

په سټ M کی لومړی د غاړو ټکو اېسټیڅیز یا پراته ارزښتونه نیول کیږي. په دې پورې په ځانگړي ډول بیا تشخایونه (لوکی Lücke نیمگرتیا) او هم قطبونه اړه لري. د M سټ به وروسته په نورو ارزښتونو تکمیل شي.

۱ - د $f(x) = 0$ صفر ځایونو x_i سټ M0 لټول کیږي.

۲ - ټول ځایونه x لټول کیږي، چی هلته $y = f(x)$ د مشتق قابلیت نه لري او په ډیری M کی یی نیسي. بیا د ټولو ارزښتونو x_j ډیری M1 لټول کیږي، چیرته چی $f'(x) = 0$ وي، (دا د بحراني ارزښتونو لپاره په پوښتنه کی راځي) ، او د $y_j = f(x_j)$ تابع

ارزښتونه یی. ورپسې سړی د ټولو $x_j \in M_1$ ارزښتونه د $f(x_j)$ د دویم مشتق لپاره لټوي.

۳ - ټول هغه ارزښتونه x چېرته چې $y = f(x)$ دوه ځله مشتق‌وړ نه دی د M په سټ کې نیول کیږي.

ورپسې بیا سړی د ټولو x_k سټ M_2 لټوي، چېرته چې $f''(x) = 0$ وي (دلته نو د انعطاف ټکي پوښتنه کی رځي) او د هغه د تابع ارزښتونه $y_k = f(x_k)$.

بیا د ټول $x_k \in M_2$ لپاره دریم مشتق $f'''(x)$ ازمائیل کیږي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری M_{21} د کومو لپاره چې $f'''(x_k) < 0$ وي نو افقي (پراته) محور کین - بنی - انعطاف‌کی جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری، د کومو لپاره چې وي $f'''(x_k) > 0$ نو د پراته - یا افقي محور د بنی - کین - انعطاف‌کی جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ډیری د کومو لپاره چې $f'''(x_k) = 0$ وي او یا دریم رابیلیدونکی نه وي موجود نو په ډیری M کی نیول کیږي.

۴ - د تیرو درسونو تعریفونو او جملو سره سم په افراطي ټکو او انعطاف‌کی یا وړون‌کی باندې د ډیری M څیرنه د اصلي حالتونو لپاره اوس یو څو بیلگی راوړو

بیلگه : بلواک $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ هرچیرته پوره زیات مشتق‌وړ دی.

$$0 - f(x) = 3x^2 - 12x + 9, f'(x) = 6x - 12, f''(x) = 6$$

په سټ M کې یواځي $-\infty, \infty$ نیول کیږي د حد - یا پولي تیریدنو په موخه یا هدف $M = \{-\infty, \infty\}$:

$$1 - f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$M_0 = \{x_1, x_2\} = \{0, 3\}.$$

$$2 - f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$M1 = \{x3, x4\} = \{1, 3\}, y3 = 4, y4 = 0$$

$$f''(x3) = f''(1) = -6 < 0, \text{ Minimum (}$$

$$) f''(x4) = f''(3) = 6 > 0, \text{ maximum (}$$

$$M11 = \{1\}, M12 = \{3\}.$$

$$3 - f''(x) = 6x - 12 = 0,$$

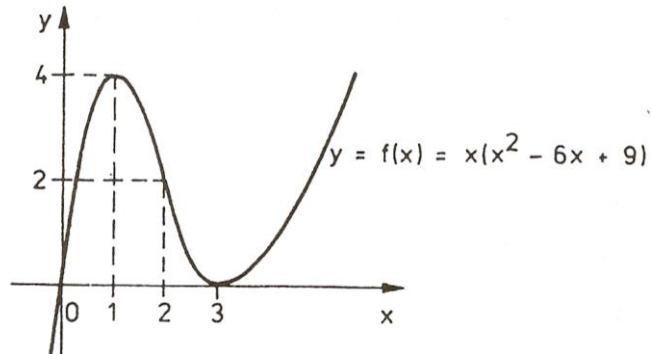
$$M2 = \{x5\} = \{2\}, y5 = 2$$

$$f'''(x5) = f'''(2) = 6 > 0 ($$

بنی - کین اوریدونتیکی. $M22 = \{2\}$.

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

په دې ډول د منحنی تگلار په لاندې څېره کې لاس ته راځي



بیلګه : تابع $f(x) = x^4 - 4x^3$ پوره په خوښه مشتق ورده.

$$0 - f'(x) = 4x^3 - 12x^2, f''(x) = 12x^2 - 24x, f'''(x) = 24x - 24$$

په سټ $M = \{-\infty, \infty\}$ یواځې $-\infty, \infty$ نیول کيږي: $M = \{-\infty, \infty\}$

$$1 - f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = 0$$

$$M_0 = \{x_1, x_2\} = \{0, 4\}.$$

$$2 - f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) = 0$$

$$M_1 = \{x_3\} = \{3\}, \quad y_3 = -27$$

دا چی د $x = 0$ لپاره دویم مشتق $f''(0) = 0$ دی، دا ارزښت د ۳ - لاندې څیرل کيږي

$$f''(x_3) = f''(3) = 36 > 0, \quad \text{Minimum, } M_{12} = \{3\}$$

$$3 - f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0$$

$$M_2 = \{x_4 - x_5\} = \{0, 2\}, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = -16,$$

$$f'''(x_4) = f'''(0) = -24 < 0$$

انعطاطکی (کین- بنی - انعطاطکی $M_{21} = \{x_4\} = \{0\}$,

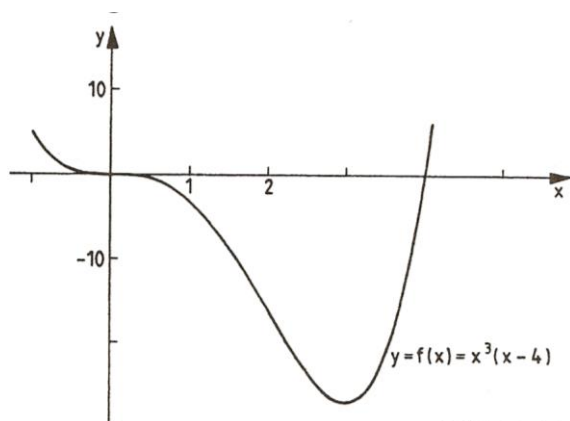
$$f'''(x_5) = f'''(2) = 24 > 0,$$

انعطاطکی (بنی - کین - انعطاطکی)

$$M_{22} = \{x_5\} = 2.$$

$$4 - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$$

د لاندې څیرې څخه د کړې تڼشکل لاس ته راځي .



بیلگه : تابع $y = f(x) = e^{x^3}$ پوره مشتقور دی:

صفر:

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$$

$$f''(x) = 3x(3x^3 + 2)e^{x^3}$$

$$f'''(x) = 9x^3 e^{x^3} (3x^3 + 2) + 6e^{x^3} (6x^3 + 1),$$

$$M = \{\infty, -\infty\}$$

۱ - تابع کوم صفرځای نه لري

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3} = 0 \quad - ۲$$

یواځې د $x_1 = 0$ لپاره ارزښت لري. مگر داچې $f''(0) = 0$ دی، نو $x_1 = 0$ د ۳ - لاندې څیرل کیږي

۳ -

$$f''(x) = 3x(3x^3 + 2)e^{x^3} = 0,$$

$$M_2 = \{x_2, x_3\} = \left\{0, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}.$$

بنی - کین انعطافتکی:

$$f'''(x) = f'''(0) = 6 > 0$$

$$M_{21} = \{x_2\} = \{0\}$$

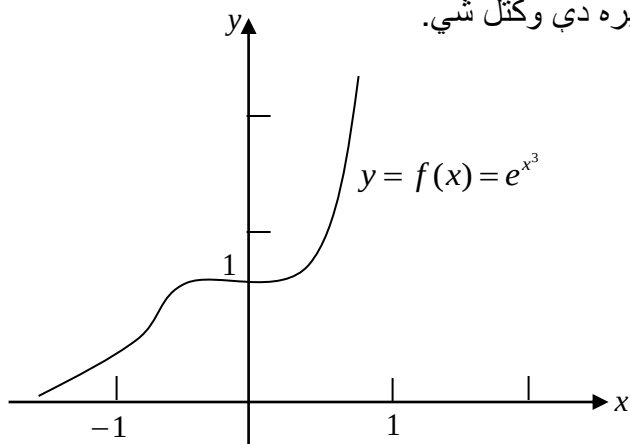
کین - بنی انعطافتکی:

$$f'''(x_3) = f'''(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}) = 0 + 6e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-6\frac{2}{3} + 1\right) < 0,$$

$$M_{22} = (x_3) = \left\{-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^3} = +\infty. \quad - \text{۴}$$

لاندي خبره دي وکتل شي.



بیلگه: تابع $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$ د ټولو x لپاره تعریف دی، مگر یواځې د $x \neq 0$ لپاره مشتقور دی

صفر - د $x \neq 0$ لپاره باور لري یا صدق کوي

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

دلته $f'''(x)$ ته اړتیا نه پېښیږي

د M سټ له $x = \pm \infty$ او $x = 0$ څخه جوړ دی

$$M = \{-\infty, 0, \infty\}$$

اول: $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2} = 0$

$$x = -\sqrt[3]{x^2}, x^3 = -x^2, x^3 + x^2 = 0$$

له امله د حل لپاره په پوښتنه کې $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ راځي. دواړه ارزښتونه، لکه ازماینه روښانه کوي، صفر ځایونه دي:

$$M_0 = \{x_1, x_2\} = (0, -1)$$

$$M_0 = \{x_1, x_2\} = \{0, -1\}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = 0. \text{ دویم:}$$

م - د دې مساواتو حلونه له لاندې لاس ته راوړني څخه لاس ته راځي:

$$1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = 0, \quad \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = -1, \quad \frac{8}{27x} = -1, \quad x = x_3 = -\frac{8}{27},$$

$$y_3 = f(x_3) = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{4}{27}.$$

$$M_1 = \left(-\frac{8}{27}\right).$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right) = -\frac{8}{9^3 x^4} < 0, \text{Maximum}$$

$$M_{11} = \left\{-\frac{8}{27}\right\}.$$

- ۳

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} = 0$$

د کوم له پاره شوونی نه ده.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}\right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \quad - ۴$$

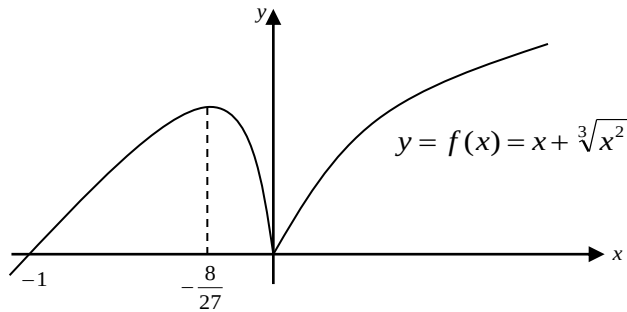
هغه ځای $x_1 = 0$ ، د کوم لپاره چې $f(x)$ مشتق ور نه دی او د کوم لپاره چې $f(0) = 0$ لرو ، باید تر اوس تر څیړنې لاندې ونیول شي

د $x > 0$ لپاره $f(x) > 0$ دی.

د $-1 < x < 0$ لپاره صدق کوي (د $x^2 > 0$ سره ضرب $-x^2 < x^3 < 0$) په همدې ډول
 $\Leftrightarrow$ لاس ته راځي او برعس) یعنې $0 < -x^3 < x^2$ او له دې امله $0 < \sqrt[3]{-x^3} < \sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) = x + \sqrt[3]{x^2} > 0, \text{ او له دې سره: } 0 < -x < \sqrt[3]{x^2}$$

له دې امله د $x_1 = 0$ سره یو نسبي ټیټکی (نقطه اصغري) مخ ته پروت دی. په دې توګه د کرې یا منحنی تلنلار د لاندې څیرې سره سم روښانه ده.



په لاندې بیلګه کې دې د x ارزښتونه د $f''(x) = f''(x) = 0$ لپاره هم د M په سټ کې ونیول شي.

بیلګه : تابع $y = f(x) = x^4 + x$ پوره زیات مشتق وړ دی.

صفر:

$$f'(x) = 4x^3 + 1,$$

$$f''(x) = 12x^2,$$

$$f'''(x) = 24x,$$

$$f^{(4)}(x) = 24,$$

$$f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = \dots = 0$$

په M کې یواځې د اېسڅیزې یعنی دېرته محور د غاړوټکې یعنی $\pm\infty$ نیول کېدې شي:

$$M = \{-\infty, +\infty\}$$

$$1 \quad f(x) = x^4 + x = x(x^3 + 1)0, \quad M = (0 - 1)$$

$$2 \quad f'(x) = 4x + 1 = 0$$

$$M_1 = \left\{ -1/3\sqrt[3]{4} \right\}, \quad y_3 = -3/4 \sqrt[3]{4} = \frac{3}{4 \sqrt[3]{4}}$$

$$f''(-1/3\sqrt[3]{4}) = 12(-1/3\sqrt[3]{4})^2 > 0. \text{Min}, \quad M_{12} = \left\{ -1/3\sqrt[3]{4} \right\}$$

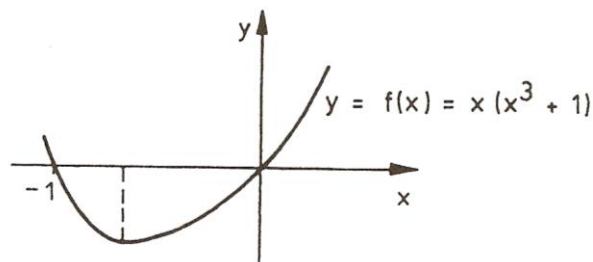
$$3 \quad f''(x) = 12x^2 = 0, \quad M_2 = \{0\}$$

$$f'''(x) = 0$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

د $x=0$ سره هېڅ اوږونټکی مخ ته نه لرو، ځکه چې $f'(x)$ هلته اکستريموم ارزښتونه نه لري، بلکې یو اوږونټکی $y = x^3$ (په ۴ غزول شوی او د ۱ سره و پورته لور ته خوځول شوی یا پورته شوی).

دا د څیړي ۲۰، ۱۳ سره سم د کړي تلنه ورکوي.



ناتاکلي حدونه یا پولې

یا د ناتاکلو افادو (وینو) حدونه یا پولې

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو حد پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وايي، ځکه چې مشتق یې نیول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش (د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کېدی شي.

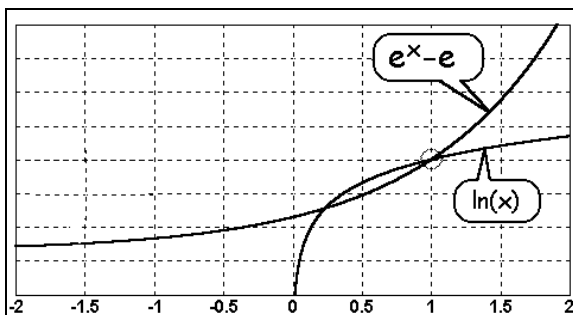
که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو، نود $x=0$ لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وایو.

پیل خیرنه:

د $\frac{0}{0}$ حالت

که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او مخرج یې دواړه د صفر په لور لاړ شي، نو دا پوله ارزښت، ناټاکلې افاده، بولو.

بیلګه: لاندې د الماني پښتو: صورت یا ماتېاندې، مخرج یا ماتلاندې



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\text{Nenner} \rightarrow 0}$$

په څیره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعنې د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه.

ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړ شي)

$$\frac{0 \rightarrow \text{صورت}}{0 \rightarrow \text{مخرج}}$$

$$0 \rightarrow \text{مخرج}$$

لیکندود (لیکندول): د افادي

لپاره په پوله شمیرنه کې لنډ لیکو:

$$\frac{0}{0}$$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مگر په ټولیزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناتاکلي افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناتاکلي افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ، ،
ناتاکلی، ، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمیرل کیدی. د
لورې ریاضي سره دا کار شمیرنه شونی شوه (دبیلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې،
چې پسې به وڅیړل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمیرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{0 \rightarrow 0}{0 \rightarrow 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\boxed{\text{مخرج}} \rightarrow 0}$$

۱ - که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د $x=1$ په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده $0:0$ به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u=f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

۲ - ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمیرلو لپاره یعنې د ناطق کسري توابعو پوله شمیرنه کې د چل یا د طریقي څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارولی، لکه په پورته بیلگه کې.

۳ - د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کې دی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د ۱ په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نږدې برابر شي. دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001} = 100$$

$$\frac{0.00000000100}{0.00000000100} = 100$$

لکه چې گورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نږدې برابر دي (دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مگر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعنې (100) دی،

د برنولي او د دي لو، پیتال قاعده Brnoully and de L,Hospital

د برنولي او د دي لو پیتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. دا حالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کېږي، چې مخرج او صورت (ماتېاندې او ماتلاندې) همغه صفر ځای x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{0}{0}$ موخه وره (هډمنده) نه ده. کیدی شي چې د ویش حد $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ وڅیړل شي، په کومو کې چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتنلو دي. د بېلګې په توګه تابع

$$f : y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$$

صورت او مخرج همغه صفر ځای $x_0 = -2$ لري، سره له دې هم پوله شته دی.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) = 0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتيجې څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضيي استعمال هم بلل کېږي.

د برنولي او د دي لو، پیتال قاعده :

که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځای کې مشتق وړ وي د $g'(x) \neq 0$ سره او د ټولو $x \in U(x)$ لپاره او f او g یو صفر ځای وي،

د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ترڅو په بني لور حد شته وي. په ورته توګه لاس ته راځي.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حل: تابع د پراخه شوي منح ارزښت قضي نیونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره

یو $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چی لرو

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0) = 0 \wedge g(x_0) = 0$ له امله لرو:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچی د $x \rightarrow x_0$ سره $x_m \rightarrow x_0$ هم هڅه کوي.

د $x \rightarrow \infty$ په حالت کی $x = 1/z$ ځای په ځای کوو. د زنجیري قضي په مرسته لاس ته راځي:

$$u = f(1/z)$$

د مشتق $du/dz = f(1/z) \cdot (-1/z^2)$ او مشتق $dV/dz = g'(1/z) \cdot (-1/z^2)$ سره

، داسی چی لرو :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

یادونه : که په پورته حالت کی $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$ هم وي ، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سړي n -ډولونو (قذمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چی $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع n - م مشتق په معنی دی.

ډول یا تیپ: 0 / 0

بیلګه:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

بیلګه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

بیلګه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = \frac{0}{1} = 1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان (جګعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^α د $x \rightarrow \infty$ لپاره په غښتلي توګه جګیري، نسبت لوګاریتم تابع $\ln$ ته

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$$

له دې $f(x) = \frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قاعدې د ډیر ځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلي جگيري:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

نور حالتونه کیدی شي په بڼه يا تيپ $\frac{0}{0}$ او يا $\frac{\infty}{\infty}$ بيرته وړول شي

له تيپ يا بڼې $\infty - \infty$ څخه و بڼې يا تيپ $\frac{0}{0}$ ته

ددې لپاره لاندې تابع بیلگه کیدی شي:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

د $x \rightarrow 0$ لپاره

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

داچې دلته مشتق بيرته د بڼې تيپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لويپتال قاعده استعمالیدی شي.

له تيپ يا بڼې $0 \cdot (\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تيپ $(-\infty)$ حالت د بيلگي په توگه تابع $f(x) = x \cdot \ln x$ د $x \rightarrow 0^+$ لپاره ښايي. په کوم کی چي ضرب د ویش په څیر انځور کړي، نو د لويپتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$$

له بڼې 0^0 څخه وښي e^0 ته:

دلته د بيلگي په توگه تابع $f(x) = x^x$ د $x \rightarrow 0^+$ لپاره تر څيرنی لاندې نیول کيږي.

د بني بدلون يا فورم بدلون و بنسټ e ته د يوې انځورونې په مرسته په بريالۍ توگه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \cdot \ln x} = e^0 = 1$$

له 1^∞ بني څخه و $e^{0.\infty}$ بني ته

د بنوونۍ ، د بيلگي په توگه د تابع $f(x) = (1 + \frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu \in R^+$ لپاره او x

$x \rightarrow \infty$ د $x \in R^+$ سره:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \ln(1 + \frac{\mu}{x})} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \ln(1 + \frac{\mu}{x}))}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{\mu}{x})}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{\mu}{x}} \cdot (-\frac{\mu}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\mu}{1 + \frac{\mu}{x}}} = e^{-\mu}$$

د $\mu=1$ له پاره لاس ته راځي

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بني 0 و بني $0.(\pm\infty)$ ته

دا کارونه په يوې بيلگي روښانه کوو:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\sin x \cdot \ln \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x \cdot \ln \frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \cdot (-\frac{1}{x^2})}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x - x \cdot \sin x} = 0$$

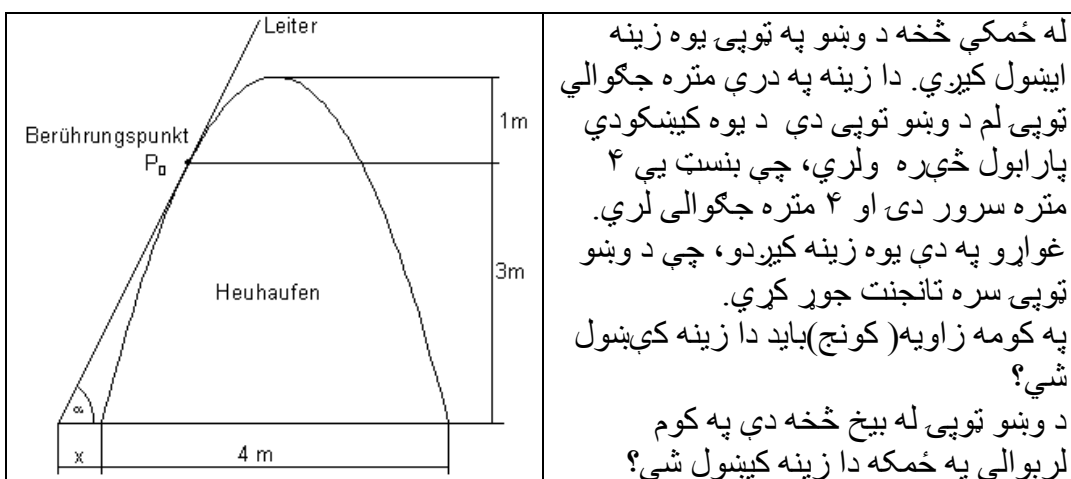
د $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$ سره

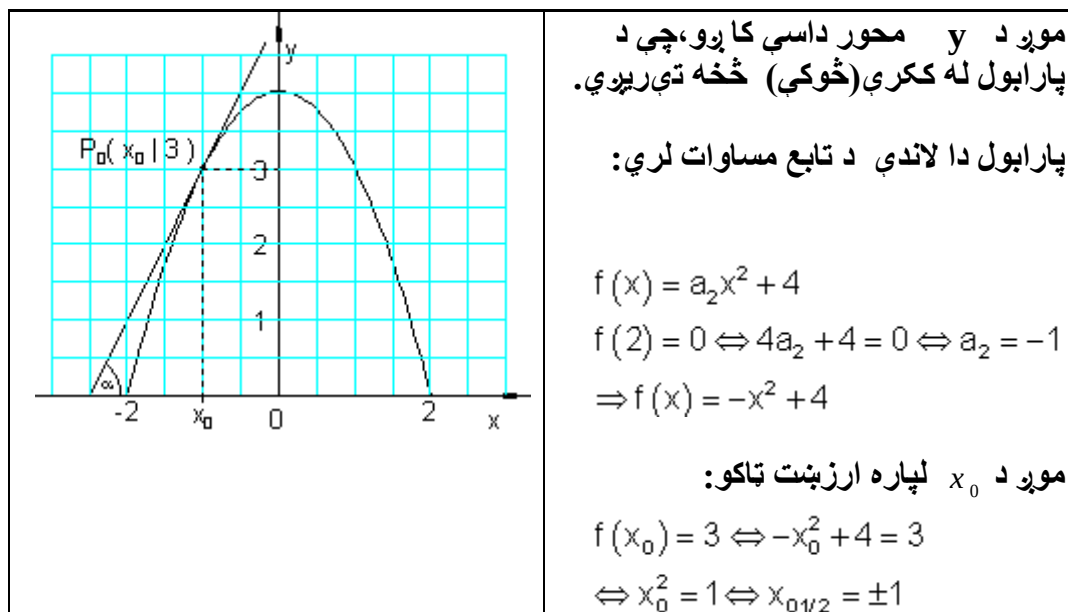
باید لاندې جدول کې پام وشي. لري يا تي: شي

لاندې جدول د پورته ښوول شوو ښووا ډولونو د ښي بدلون ټوليزه کتنه ممکنوي

بڼه بدلون يا لنډ: بدلون	$g(x) \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$	تپ (ډول)
$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{f(x) \cdot g(x)} \rightarrow \frac{0}{0}$	0	0	$-\infty$
$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \rightarrow \frac{0}{0}$ $\wedge (Or)$ $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$		0	∞
$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \rightarrow e^{0 \cdot \infty}$ د $f(x) > 0$ سره.	0 1 0	0 1 0	∞

د يوې تابع د استعمال بيلگه د تانجنت له پاره :





شمیرنه :

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زینه توپې په $P_0(-1, 3)$ ټکي کې لمسوي. موږ په $P_0(-1, 3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1 | 3) \Rightarrow x_0 = -1; f(x_0) = 3$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{د } f'(x) = -2x \text{ سره لاس ته راځي}$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

$$\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63,4^{\circ}}} \quad \text{جوړه زاویه:}$$

د زینې او د وېشو ټوپۍ تر منځ واټن د $f(x)$ د صفرځای او د تانجنت $t(x)$ د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2,5$$

د x ارزښتونو $-2,5$ او -2 ترمنځ واټن $0,5$ دی.

زینه د وېشو د ټوپۍ له پښو څخه باید نیم متر لرې کېږي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کېږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې ګټې (غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کې، چې په عمل کې کارول کېږي یا صورت نیسي، له تاثیر وونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومې چې موږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کې لروډی شو.

موږ یواځې هغه پروسې تر څیړنې لاندې نیسو چې د یوې واریابې یا اووښتونې x په واک کې وي. دا د بل په واک کې د یوې تابع $y = f(x)$ له لارې څرګندولی شو.

که y ټول لگښتونه یا مصارف په کوټه کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چی $f(x)$ مینیمال یا خورا کم شي.

که په څټ یا برعکس y گټه وي یا گټور تاثیر وي، نو x باید داسی لاس ته راوړل شي، چی $f(x)$ ماکسیمال یا خورا لوي شي. په قاعده کی اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواک واریابل یا اوښتونى x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیک یا تخنیکپوهنی له امله، یواځی په ټاکلو پولو کی

$$a \leq x \leq b \quad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پوري د گټې مسئلی، په دې پوري اړه لري، چی ایا دا گټه ده او که لگښت.

$$y = f(x) = \max! \quad (a \leq x \leq b) \quad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \leq x \leq b) \quad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخی پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینگ تړلی دی. دلته ځمور علاقه په ځانگړې توگه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

۱ - د بلواکیزو $y = f(x)$ گډو اړیکو راپیدا کول، د دندې یا وظیفې ورکولو سره سم) د مودالیتي پرابلم)

۲ - د تخنیکپوهنی پولو په پام کی لرل (*)

دادي د دوه بیلگو له لارې وښول شي

بیلگه : یو د مندو (پټي ته په کلوکي د اغزو مندو کښنول کيږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چې ټول اوږدوالی یی L دی. له دې سیم سره باید یوه مربع سطحه (څلورگودیزه هواره)، چی د امکان تر حده باید لویه وي، مندو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د مودالیتی Art und Weise پر اېلم : غوښتنه مو د یوې څلور ضلعي (څلورگوډۍ) پیدا کول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلور ضلعي (-گوډۍ) یو اړخ په a ښایو او بل اړخ یې په b ښایو، د څیرې ۲۰ . ۱۴ له مخې (.

دا په سر کې دوه اغیزې لرونکې یا تاثیر اچونکې لویې a او b دي. د

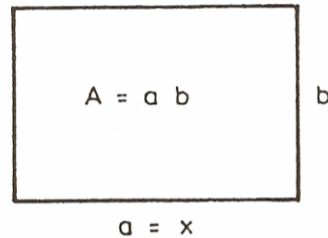
$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

له امله یواځې یوې اغیزمنې (تاثیر اچونکې) لویې ته اړیو د بیلګې په توګه $a = x$ ، دا

$$A = ab = x((L/2) - x) \text{ داسې ده}$$

دا روښانه ده چې صدق کوي . $0 \leq x \leq L/2$

له دې امله د سترې ګټې پر اېلم داسې دی



$$y = f(x) = x((L/2) - x) = \text{Max!} \quad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله باید ماکس د 0 او $L/2$ ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره یواځې $x = L/4$ په پوښتنه کې راځي.

د دې لپاره $y'' = f''(x) = -2 < 0$ دی.

په ریښتیا چی یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او $L/2$ رول نه لوبوي. نو صدق کوي. $a = b = L/4$

بیلگه : یوه بډای چی په یوه ټاکلي وخت کی ټولست (ټولډیری) M تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لگښتونه F تړلي دي. کیدی شي چي سملاسی د دې تولید په ټولست (ټولډیری) M کی تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي (زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته د زېرمتون (زخیره کوني) لگښتونه راپید کيږي (ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته ورورل شي. دلته نو د زخیره کولو لگښتونه منځ ته نه راځي. مگر تل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لگښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لگښتونه یی بولو. کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولې کم لگښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لگښت د چمتووالی لگښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څت متناسب دی. که x لوي وي نو چمتووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وځوري يعني. ټول لگښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت (همغه) یا په کلکه ایښول شوي لگښتونه دي، L د زخیرې لگښتونه او R د چمتووالی لگښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولیدډیری M څخه نه شي سترېدلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = \text{Min!} \quad (0 \leq x \leq M)$$

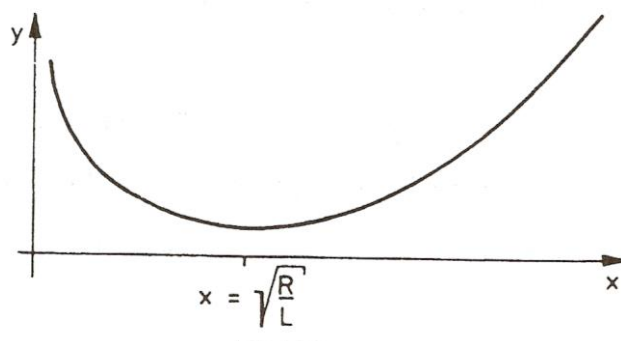
(لمړی $f(x)$) دوه واره دیفرنځیال کيږي یا یي دوه واره رابییلیدنه

نیول کيږي:

$$f'(x) = L - R/x^2, \quad f''(x) = 2R/x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = R/L$ ؟؟؟

د $x \geq 0$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کړې تگلار په څیره ۲۰. ۱۵ کی انځور شوي. څرگنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = R/L > M$ وي، نو یو مینیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R/L < M$ دا مانا لري $R/L < M^2$ په همدې ډول $R^2 < M^2 L$ پس مخ ته لرو: $x = R/L$ د $R < M^2 L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2 L$ لپاره

نو: که د چمتوالي لگښتونه R ، ذخیرې لگښتونه L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لگښتونه د چمتووالي لگښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلگه: د $M = 10000$, $R = 1000$, $L = 10$ لپاره صدق کوي $R = 1000 < M^2 L = 108 \cdot 10 = 109$
 $x = R/L = 1000/10 = 100$ ازاد لگښت دی
 $100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي، چی 10000 یوونه تولید کړي د $M = 10$, $R = 1000$, $L = 1$ لپاره صدق کوي $R = 1000 > M^2 L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده. یواځې یوه ازاده لویه دي تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لگښت کیري، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لگښت تابع وایو او په $K(x)$ سره ښایو.

څنگه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لگښت را ټیټ کړو؟

د لگښت تابع $K(x)$ د تولید سټ (ډېری) او ټول لگښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لگښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتېږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لگښت زیاتوالی ښایي، د یوه Δx تولید تغیر

سره (منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحصوي تغیر ارزښت د مشتق لگښت بلل کېږي. دا د پوله ارزښت

سره ټاکل کېږي، داپه دې معني، چې د لگښت د تابع K مشتق.

پېژند : د لگښتتابع $K(x)$ مشتق د مشتقارزښت $K'(x)$ په نامه یادوو یا یې پوله

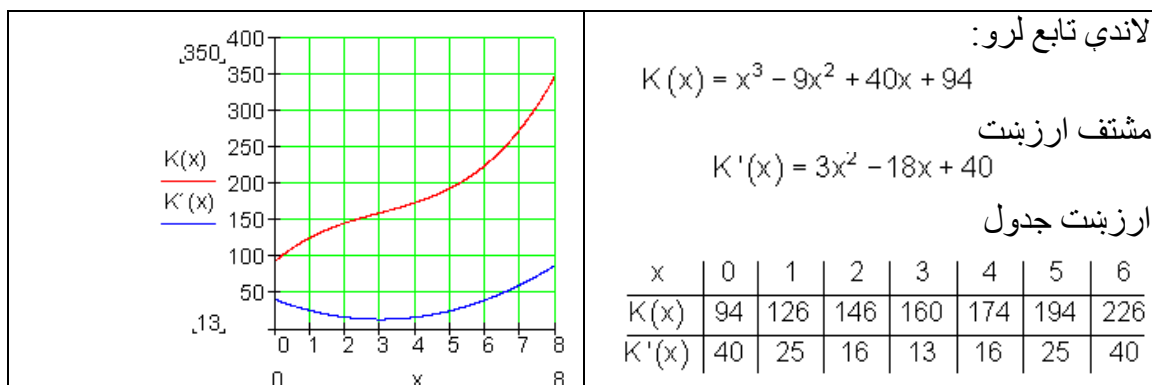
لگشت $K'(x)$ هم بولو.

بېلگه: د لگښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوي وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکي، یو ارزښت جدول د $K(x)$ او $K'(x)$ لپاره وکارې او په پروتولار سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې گراف وکارې.

پوله ارزښت د $I = [0 ; 6]$ لپاره په ۱ پل (قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لگښتزاټوالی و ټاکي:

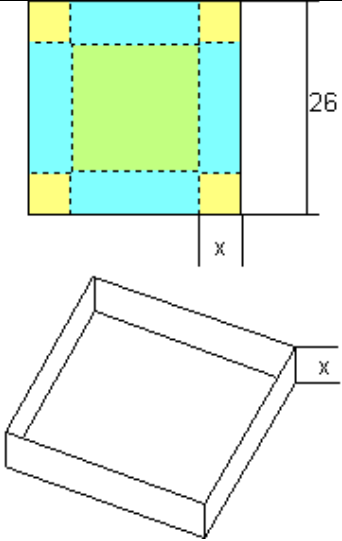


خوړا کم د لگښت زیاتوالی (لگښت جگړې دڼه) د پارابول $K'(x)$ په ککره (خوکه) کې پروت دی ، یعنې هلته چې تانجنت $K'(x)$ پروت یا افقي دی ،

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

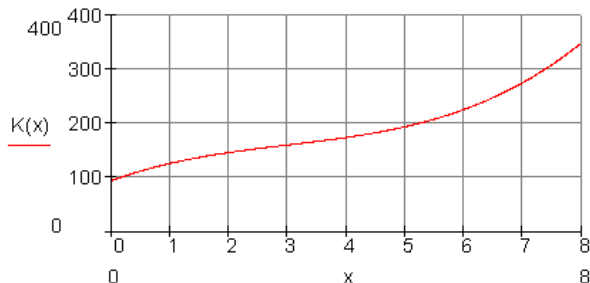
دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{x = 3}$$

	د ی، مربع کارتون (د کلک کاغذ څخه جوړ) څخه ، چې ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جگوالی لري. الف: د یوه تابع ترم وټاکي، چې د بکس حجم (ډکي) V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښایي. ب – گراف وکارئ او په نږدې توګه یې ماګسیما (خوړا جگ) حجم وټاکي.

- د یوه روغتون د نرخ تابع (مصرف تابع) $K(x)$ د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکې انځوروي، داسې چې $x = 1$ د ۱۰۰ ناروغانو معنی او $y = 1$ دی معنی چې $1000 \text{ €} / \text{Tag}$ یوزر یورو په ورځ ($1000 \text{ €} / \text{Tag}$).

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



ټولگه:

د رول (Rolle) قضیه:

یوه د f تابع دې په بند اینټروال $[a, b]$ کې متمدی وي د $f(a) = f(b)$ سره او په واز اینټروال (a, b) کې مشتقور، نو لږ تر لږه یوځای $c \in (a, b)$ شته دی د $f'(x_0) = 0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطی قیمت) قضیه:

که $y = (x)$ تابع په بند اینټروال $[a, b]$ کې متمدی او په واز اینټروال (a, b) کې د مشتق وړ وي، نو

نه ده کښل

هلته یوځای $x \in (a, b)$ شته دی، د کوم لپاره چی

$$\text{لرو: } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

پراخه شوي منځقضية:

که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اینټروال $[a, b]$ کې متمدی توابع وي او په واز اینټروال (a, b) کې مشتقور او $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x \in (a, b)$ لپاره، کم له

$$\text{کمه یوځای } x_0 \in (a, b) \text{ وجودلري چی لاس ته ترې راځي: } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

قضیه:

د $f(x)$ تابع دې په انټروال I کې مشتقور وي.

1. که د $f(x)$ تابع په اینټروال I کې مونوټون جگېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$ لپاره

- که $f(x)$ په اینټروال کې همغږیز ټیټېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ لپاره.

- که $f'(x) \geq 0$ وي، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې همغږیز جگېدونکي ده.

- که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې همغریز ټیټېدونکې ده.
 - که $f'(x) > 0$ وي، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه همغریز جگېدونکې ده.
 - که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه مونوټون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x) = 0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x) = 0$ او $f''(x) > 0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x) = 0$ او $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي (ټیټ ټکي یا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x) = 0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x = x_0$ په چاپیریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یو نسبي جگ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \text{ په همدې ډول } f(x) \leq f(x_0)$$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي: چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حتمي نه ده چې $y = f(x)$ دې یواکستريموم ولري.

جمله: (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کې دوه واره مشتقور $y = f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f'(x) = 0$ ، $f''(x) \neq 0$ ، نو تابع $y = f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خو را ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x) > 0$

خو را جگ ټکی مخ ته پروت دی، که وي: $f''(x) < 0$

پېژند: په یوه چاپیریال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ یو کین-بنی-انعطاف ټکی په همدې ډول بنی-کین-انعطاف ټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جگ ټکی (عظمي نقطه) په همدې توگه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي: چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي، خو حتمي نه ده چې $y = f(x)$ دې یو بحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله: (د اوږونټکي (انعطاف ټکي) لپاره اړین شرایط):

که په $x = x_0$ کې دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو

لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

پېژند: د زینتکي (کله کله برنډې ټکی هم بلل کېږي) لاندې د انعطاف‌تکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطاف‌تکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطاف‌تکی ورکړ شوی وي. دا یو مائل (نه افقي) تانجنت لري

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده:

که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځای کې مشتق‌وړ وي د $g'(x) \neq 0$ سره او د ټولو $x \in U(x)$ لپاره او x_0 د f او g یوصفرځای وي،

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{د } f(x_0) = g(x_0) = 0 \text{ سره، نو باور لري:}$$

ترڅو په بني لور حد شته وي.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{په ورته توگه لاس ته راځي:}$$

تمرینونه:

۱ - د لاندې لیکل شوو تحلیلي افادو مشتق د x_0 په ځای کې وشمیرئ او د فرمول د اعتبار ورشو (ساحه) ورکړئ.

a) $y = x^3 - 2x^2 + 1$

b) $y = \sqrt{x}$

c) $y = x \sqrt{x}$

d) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

e) $y = \frac{x}{x-1}$

f) $y = \sin \frac{x}{2}$

۲ - د یوه تن یا جسم عمود پورته غورځونې د تن دروندتکي (د جسم د ثقل مرکز) د لار- وخت- مساوات په لاندې ډول دي:

$$s = f(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

پیلچتکتیا یا پیل سرعت $v_0 = 30 \frac{m}{s}$ او د ځمکې بیرې (د ځمکې تعجیل) $g = 10 \frac{m}{s^2}$ سره دا تن یا جسم کله خپل عظمي جگوالي ته رسیږي؟

دا جگوالی څومره لوي دی
۳- یو تن په برابر ډوله چتکتیا خوزي (حرکت کوي)، داسې چې بیرې (تعجیل) یې $a = 2 \frac{m}{s^2}$ دی

په لاندې جدول کې د $\{(\Delta t)_n\}$ لپاره یو صفر ترادف (- پرلپسې) کېږدی (د بیلگې په توګه لکه په اوله مټه (ستن) کې) او جدول پوره کړی.

له $t_0 = 3 \text{ s}$ وروسته د تن یا بدن لحظوي چتکتیا څومره ده.

۴- د لاندې تحلیلي افادو مشتق ونیسی! پام وکړی، چې د مشتق نیولو کومه قاعده په کار وړی شی

$$a) y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5$$

$$b) y = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$$

$$c) y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4$$

$$d) y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6 \cdot \sqrt[3]{x}}{x}$$

$$e) y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$$

$$f) y = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$$

$$g) y = (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)(x - \sqrt{x})$$

$$h) y = (ax^2 - b)^2$$

$$i) y = \frac{x^2 + x}{3x^3}$$

$$j) y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$$

$$k) y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$$

$$l) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (1 + \sqrt[4]{x})$$

۵- د لاندې ورکړل شوو تحلیلي افادو مشتق ونیسی، او هغه ارزښتونه تری وباسی، د کومو له پاره چې مشتق شته (موجود) نه وي

- ۱ . ۵

a) $y = (x - 1)(1 - x^3)$

b) $y = (x^3 + 1)(1 - x - x^2)$

c) $y = \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x^3}\right)$

d) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[4]{x} - 2x\right)$

- ۲ . ۵

a) $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}$

b) $y = 4x + \frac{1}{x^2 + 1}$

c) $y = \frac{x - 4}{4 - x}$

d) $y = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 - 5}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{2}}{3x^2 - 2}$

f) $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$

g) $y = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$

h) $y = \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{x^2 - 2x - 1}$

i) $y = \frac{x^3 + 3\sqrt[3]{x}}{2x^2 + x}$

j) $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$

- ۳ . ۵

a) $y = \sqrt{x} \sin x$

b) $y = 2 \sin x \cos x$

c) $y = 1 - \cos^2 x$

d) $y = x^3 \cos x$

e) $y = 2 \sin x (x - \cot x)$

f) $y = \frac{\tan x}{\cot x}$

g) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

h) $y = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$

i) $y = \tan x - \cot x - 2x$

j) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

- ۴ . ۵

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2x^2}$

c) $y = e^x \tan x$

d) $y = \frac{5e^x}{\cos x}$

- ۵ . ۵

a) $y = \frac{\ln x}{x}$

c) $y = x^2 \ln x$

b) $y = \sin x \ln x$

d) $y = 10 \ln e \ln x$

- ۶ . ۵

a) $y = 5^x + 2^x$

c) $y = 2^x - 2x$

b) $y = 3^x x^3$

d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

- ۷ . ۵

c) $y = 2^x - 2x$

a) $y = (2x+1)^4$

c) $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^8$

d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

b) $y = (1 - x^4)^5$

d) $y = \left(2x^2 - \frac{4}{x} + 3\right)^6$

- ۸ . ۵

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$

g) $y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$

b) $y = \sqrt{1-2x}$

e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

h) $y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

c) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

f) $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

- ۹ . ۵

a) $y = 5x^2 \sin 2x$

d) $y = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$

g) $y = \cot(1 - 3x)$

b) $y = \sin^2 x$

e) $y = \cos \frac{1}{1+x}$

h) $y = \cot \sqrt{1-2x}$

c) $y = \sin \sqrt{\frac{x}{2}}$

f) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

i) $y = \sqrt{\tan x}$

$$j) y = \frac{\cos x^2}{\pi x}$$

$$k) y = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x}$$

$$l) y = \left(3 + \frac{2}{\cos^2 x}\right) \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$m) y = \left(\frac{3}{\sin x} - 5\right) \frac{1}{\sin x}$$

$$n) y = \tan \sqrt[3]{\frac{1-2x}{x}}$$

$$o) y = 2 \sin \sqrt[3]{\frac{3}{x}}$$

$$p) y = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

- ۱۰ . ۵

$$a) y = \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}$$

$$b) y = \operatorname{Arccos} \frac{a-x}{a}$$

$$c) y = \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$$

$$d) y = \operatorname{Arccos} \sqrt{1-x^2}$$

$$e) y = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{2x}{1-x^2}$$

$$f) y = \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x}{x+a}}$$

$$g) y = \operatorname{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$h) y = \operatorname{Arctan} \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$i) y = \operatorname{Arccot} \frac{1+x}{1-x}$$

$$j) y = \operatorname{Arcsin} 2x \sqrt{1-x^2}$$

$$k) y = \operatorname{Arctan} \frac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$l) y = a \cdot \operatorname{Arc} \cos \frac{a-x}{a} - \sqrt{2ax-x^2}$$

- ۱۱ . ۵

$$g) y = \frac{e^{-\cos x}}{\sin x}$$

$$h) y = \sqrt{1-e^{-x}}$$

$$i) y = \frac{\sin \frac{x}{2}}{e^{2x}}$$

$$j) y = e^x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

- ۱۲ . ۵

$$a) y = \ln 2x$$

$$b) y = \ln x^2$$

$$c) y = (\ln x)^2$$

$$d) y = \ln \sqrt{x}$$

$$e) y = \sqrt{\ln x}$$

$$f) y = \ln \sqrt{1-x}$$

$$g) y = \ln \tan x$$

$$h) y = \ln \ln x$$

$$i) y = \ln \cot \frac{x}{2}$$

--

۲۰ مشتق شمیرنه (رایبیلیدنه)

۷۷۲

$$\begin{aligned}
 \text{j) } y &= \ln \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) & \text{k) } y &= \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \\
 \text{l) } y &= \ln (x + \sqrt{x^2 - a}) & \text{m) } y &= \ln \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} & \text{n) } y &= \ln \sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}} \\
 \text{o) } y &= \ln (a + x + \sqrt{2ax + x^2}) & \text{p) } y &= \ln \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x} \\
 \text{q) } y &= \ln \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[5]{(x-2)^3}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}}
 \end{aligned}$$

- ۱۳ . ۵

$$\begin{aligned}
 \text{a) } y &= |x| & \text{b) } y &= \sqrt{|x|} & \text{c) } y &= \ln |x| \\
 \text{d) } y &= \sqrt{|\ln \cos x|} & \text{e) } y &= \ln |\ln |x||
 \end{aligned}$$

- ۱۴ . ۵

$$\begin{aligned}
 \text{a) } y &= \sqrt[x]{x} & \text{b) } y &= (x^x)^x & \text{c) } y &= x^{(x^x)} \\
 \text{d) } y &= x^{\sin x} & \text{e) } y &= (\cos x)^{\sin x} & \text{f) } y &= a^x \cdot x^a \\
 \text{g) } y &= x^{e^x} & \text{h) } y &= a^{e^x} & \text{i) } y &= (\text{Arc tan } x)^x \\
 \text{j) } y &= (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}}
 \end{aligned}$$

۶ - تانجنت په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې په منحنی $f(x)$ د x -مخور سره کومه زاویه (کونج) جوړوي

$$\begin{aligned}
 \text{a) } y &= \sqrt{x}, & x_0 &= 1 & \text{b) } y &= \sqrt[3]{x+1}, & x_0 &= 0 \\
 \text{c) } y &= (x^2 - \sqrt[3]{x^2})^2, & x_0 &= 1 & \text{d) } y &= \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}}, & x_0 &= 0 \\
 \text{e) } y &= x\sqrt{x+1}, & x_0 &= 3 & \text{f) } y &= \frac{x}{x+\sqrt{x}}, & x_0 &= 1 \\
 \text{g) } y &= \sqrt{x-\sqrt{x}}, & x_0 &= 1 & \text{h) } y &= \sqrt{1+\sqrt{x}}, & x_0 &= 1 \\
 \text{i) } y &= \sin(2\pi - x), & x_0 &= \pi & \text{j) } y &= \sqrt{\sin 2x}, & x_0 &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{k) } y = \sin \sqrt{2x}, \quad x_0 = \frac{1}{2} \quad \text{l) } y = (x-1)e^x, \quad x_0 = 0$$

۷ - په پروت تانجنت د -محور باندې پرته منحنی کوم ټکي کې غوڅوي، که زاویه او همداسې وي.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = x^2 & \text{b) } y = x^3 & \text{c) } y = x \cdot |3-x| \\ \text{d) } y = \frac{x^2-3}{2x} & \text{e) } y = \frac{x^2+x+14}{x+2} & \text{f) } y = \frac{x^2(x-9)}{2(x-6)^3} \end{array}$$

۸ - د ورکړشوو تخلیلي افادو لومړي درې مشتقونه جوړ کړئ! و ازمایې، چې ایا د مشتق قابلیت کې د یو گونو ورشو گانوو یا ساحو کې تغیر راځي!

د -م مشتق لپاره یو عمومي فرمول ورکړئ، ترهغې چې شته وي.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = x^n & \text{b) } y = \sqrt{x} & \text{c) } y = \sqrt[4]{x^3} \\ \text{d) } y = \sqrt{1-x^2} & \text{e) } y = \frac{x}{1-x} & \text{f) } y = \frac{1+x}{1-x} \\ \text{g) } y = \cos x & \text{h) } y = \frac{1}{2} \sin 2x & \text{i) } y = \sin(1-2x) \\ \text{j) } y = x^2 \sin 2x & \text{k) } y = \tan x & \text{l) } y = \tan^2 x \\ \text{m) } y = e^x \sin x & \text{n) } y = e^{mx} & \text{o) } y = e^{-x} + e^{-2x} \\ \text{p) } y = \ln x & \text{q) } y = \ln \sqrt[3]{1+x^2} & \text{r) } y = \text{Arcsin } x \end{array}$$

۹ - د تانجنت مساوات $y = mx + n$ په $y = f(x)$ کېږدی.

۹ . ۱ -

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x^2 + 1, & P_1(1, y_1) \text{ bzw. } P_2(-1, y_2) & \\ \text{b) } f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1, & P_1(0, y_1) \text{ bzw. } P_2(2, y_2) & \\ \text{c) } y^2 = 1 - x, & P_0(-3, y_0) & \text{d) } y^2 = x - 1, \quad P_0(5, y_0) \end{array}$$

۹. ۲-

a) $f(x) = e^{-x}$, $m = -1$

b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 4$, $m = 0$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $m = 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $m = -1$

۱۰ - د لاندې توابعو $y=f(x)$ په خټ تابع (برعکس تابع) $f^{-1}(x)$ مشتق dx/dy په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې وشمیرئ (جوړ کړئ)

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$, $x_0 = -1$

b) $y = x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x}$, $x_0 = 1$

c) $y = \frac{1}{2x^2 - 5x + 9}$, $x_0 = \frac{5}{4}$

d) $y = \frac{x+1}{x+2}$, $x_0 = -3$

e) $y = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 1$

f) $y = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, $x_0 = \frac{a}{2}$

g) $y = (x+1)\sqrt{1-x}$, $x_0 = -1$

h) $y = \sin x$, $x_0 = 0$

i) $y = \sin(2x + 3\pi)$, $x_0 = -2\pi$

j) $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

k) $y = x \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

l) $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$

m) $y = e^x \cos x$, $x_0 = 0$

n) $y = x e^{\cos x}$, $x_0 = 2\pi$

o) $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$, $x_0 = 1$

p) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, $x_0 = x \in (-\infty, \infty)$, $a \neq 0$

q) $y = \ln(x+1)$, $x_0 > -1$ r) $y = \ln \sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}$, $|x_0| > \frac{4}{3}$

s) $y = x^{\frac{1}{x}}$, $x_0 > 0$, $x_0 \neq e$

۱۱ - لاندې تحليلي افادي په متماديت او مشتق والي باندې وڅیوئ،

a) $y = \begin{cases} -a & \text{für } x \leq 0 \\ +a & \text{für } x > 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x \leq 2 \\ -2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ c) $y = |x - 1|$

d) $y = |\sin x|$ e) $y = -\frac{x^2}{2}$ f) $y = -|x|$

g) $y = \sqrt[3]{x^2}$ h) $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ i) $y = e^{\frac{1}{x}}$

j) $y = e^{\frac{x}{x-1}}$

k) $y = e^{\frac{x^4}{x^2-1}}$

l) $y = \operatorname{Arccot} \frac{1}{x}$

m) $y = \operatorname{Arcsin}(\sin x)$

n) $y = \operatorname{Arctan}(\tan x)$

o) $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$

p) $y^3 = 3x^2 - x^3$

q) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

۱۲ - لاندې منحنې چې د پسي برابر ونونو سره ورکړ شوي، د افراطي ټکو او اوړونټکو (نقاط افراطي و انعطاف) له مخې وڅېړئ.

a) $y = x^2 - 2x + 3$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$

c) $y = x^3(8-x)$

d) $y = (x-a)^4 + b$

e) $y = \frac{x}{x^2+1}$

f) $y = \frac{x^2-7x+6}{x-10}$

g) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

h) $y = \frac{ax^2}{ax+b}$

i) $y = \frac{a^2(a-x) + b^2x}{x(a-x)}$

j) $y = \cos^2 x$

k) $y = \sin x \cos x$

l) $y = \sin 2x - 2 \sin x$

m) $y = e^x \sin x$

n) $y = x e^x$

o) $y = x^n e^{-x}$

p) $y = e^{-x} + e^{2x}$

q) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

r) $y = x \ln x$

s) $y = x \ln^2 x$

t) $y = \frac{1}{2} \ln x - \operatorname{Arctan} x$

۱۳ - د دې لاندې برابر ونونو سره ورکړ شوي منحنې تر بحث لاندې ونیسئ:

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$

b) $y = -(x+4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$

d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x(x+3)^2$

f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$

h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x+2)(x^2-4x+3)$

j) $y = (1-x)(x^2+6x+8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$

l) $y = |-x(x^2-16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$

b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$

d) $y = (x-2)^2(x-4)(x+3)$

e) $y = \frac{1}{24} x(x-1)(x-2)(x-3)$

f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$

c) $y = x^3 - x^2$

e) $y = -x(x+3)^2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$

i) $y = (x+2)(x^2 - 4x + 3)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$

b) $y = -(x+4)^2 + 4$

d) $y = x^3 - 10x$

f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

j) $y = (1-x)(x^2 + 6x + 8)$

l) $y = |-x(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$

e) $y = \frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$

g) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$

i) $y = x^2(x^2 - 1)^2$

b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

d) $y = (x-2)^2(x-4)(x+3)$

f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

h) $y = (x+2)^2(x-1)^3$

j) $y = (x-4)^4(x+3)^3$

13.3. a) $y = \frac{1}{1+x^2}$

d) $y = \frac{2x+x^2+25}{1+x^2+2x}$

g) $y = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$

j) $y = \frac{x^3+2}{2x}$

l) $y = \frac{2x^2-6x}{x^3-3x^2+x-3}$

b) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$

e) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$

h) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-2x+1}$

k) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

m) $y = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$

c) $y = \frac{5}{(2x+1)^2}$

f) $y = \frac{x^2+2x+1}{2x}$

i) $y = x - \frac{4}{x-1}$

n) $y = \frac{5(3x^2-4)-13x}{\frac{1}{8}(2x-1)(4x+7)}$

13.4. a) $y = x\sqrt{9x-x^2}$

c) $y = x\sqrt{14+8x-x^2}$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 2$

i) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

k) $y = \sqrt{(x+1)^2-x} - \sqrt{(x-1)^2+x}$

l) $y = \frac{1}{2}(\sqrt{(x+1)^2-x} + \sqrt{(x-1)^2+x})$

b) $y = x^2\sqrt{25-x^2}$

d) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

g) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$

j) $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$

e) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

h) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

- 13.5. a) $y^2 = x^3 + x + 2$ b) $y^2 = x^3 - 3x + 2$ c) $y^2 = x^3 - 2x + 1$
 d) $y^2 = x^4(x - 1)$ e) $y^2 = x^2[x(1 - x)]$ f) $y^2 = \frac{1-x}{x}$
 g) $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$ h) $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ i) $y^2 = \frac{x(1-x)}{(x+1)^2}$
- 13.6. a) $y = 2 \sin^2 x$ b) $y = \sin 2x \cos x$ c) $y = \sin x \cos^2 x$
 d) $y = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$ e) $y = x \sin x$ f) $y = \frac{\sin x}{x}$
 g) $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ h) $y = x^3 \cos x$
 i) $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$ j) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$
 k) $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ l) $y = \cos 2x + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$
- 13.7. a) $y = e^{-2x}$ b) $y = xe^{-x}$ c) $y = x e^{\sqrt{x}}$
 d) $y = (x^2 - 1) e^x$ e) $y = e^{\tan x}$ f) $y = 2 e^{-x} \sin 2x$
 g) $y = e^{2x} \sin 3x$
- 13.8. a) $y = \ln 3x$ b) $y = \ln(x^2 - 1)$ c) $y = x^2 \ln x$

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف کرښيز يا لاینيز ضریبونه لري.

بنسټ: که د یوه اصلي پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولینوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښیزو (لایني)

ضریبونو $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ ټوټه کېدونکي وي، نو پولینوم

$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} \dots \frac{N}{x - x_n}$$

داسې یوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه، بلل کېږي، چې $A, B, C, \dots, N$ حقیقي عددونه دي.

بیلگه:

اصلي پولینوم کسر $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړی.

حل: د مساوات $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ لومړی حل $x_1 = 1$ د ازمایښت له لارې پیدا کړي.

د پولینوم ویش (لنډ: پولینومویش) $(x - 1) = x^2 - 3x - 10$: $(x^3 - 4x^2 - 7x + 10)$ مو ټوټه ونې ته بیا یې $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x^2 - 3x - 10)(x - 1)$ مساوات $x^2 - 3x - 10$ اوس $x_2 = -2$ او $x_3 = 5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 1)(x + 2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کېدای شي ورکړ شوی پولینوم په درې جمعې برخو ټوټه شي، چې مخرجونه یې لاینیز (کرښیز -) ضریبونه دي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولینوم مخرج دی.

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{A(x - 1)(x + 2) + B(x - 5)(x + 2) + C(x - 5)(x - 1)}{(x - 1)(x - 5)(x + 2)} \\ \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} \\ \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{(A + B + C)x^2 + (A - 3B - 6C)x + (-2A - 10B + 5C)}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} \end{aligned}$$

د صورتونو ارزښت A, B او C ټاکنه د ضریبونو (ځلوونو) د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسر کې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته باید د مساوي توانونو ضریبونه، دا په دې مانا چې د x , x^2 او x_0 باید مساوي وي.

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

۷۸۰

$$A + B + C = 4 \quad \text{I}$$

$$A - 3B - 6C = -1 \quad \text{II}$$

$$-2A - 10B + 5C = 39 \quad \text{III}$$

د فاکټور ۲ سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساوات سیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B = -72 \quad \text{V}$$

$$-16B - 7C = -41 \quad \text{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $B = 3 \Rightarrow -24B = -72$

د $B = 3$ په V کې ایښوونه: $C = -1 \Rightarrow -16.3 - 7C = -41$

د $B = 3$ او $C = -1$ په I کې ایښوونه: $A = 2 \Rightarrow A + 3 - 1 = 4$

په ټوټه کونې فرمول کې ایښوونې سره غوښتونکي ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ازمایښت:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

ب (اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاینیز (کربنیز) ضریبونه لري.

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کرښیز فاکتور $x - x_0$ توان

توان $\frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_0)^n} + \dots + \frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي نو ددې کرښیزو فاکتورونو له

پاره پولینوم لاندې ښه لري: $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښیزو فاکتورونو ټوټه کسرونه (ماتونه) په بلده ښه ورکول کیږي.

بیلگه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښیزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ لومړی حل $x_1 = 1$ د آزمایش له لارې پیدا کیږي.

پولینوم ویش $(x-1) = x^2 + 3x + 2 : (x^3 - 4x^2 + 4x - 2)$ مو لاندې ټوټه کونې ته لارښودوي:

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 2 = (x^2 + 5x - 2)(x - 1)$$

مساوات $x^2 - 3x + 2 = 0$ دا $x_2 = 1$ او $x_3 = 2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 2)(x - 1)^2$$

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{A(x-1)^2 + B(x-2)(x-1) + C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2} \\ \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{(A+B)x^2 + (-2A-3B+C)x + (A+2B-2C)}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} \end{aligned}$$

د A, B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$\begin{array}{ll} A + B = 3 & \text{I} \\ -2A - 3B + C = -6 & \text{II} \\ A + 2B - 2C = 2 & \text{III} \end{array}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره گډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$\begin{array}{ll} A + B = 3 & \text{I} \\ -3A - 4B = -10 & \text{II} \end{array}$$

د ضرب د 4 سره او جمعه یې د IV سره: $A = 2$

د $A = 2$ ایښوونه په I کې: $2 + B = 3 \Rightarrow B = 1$

د $A = 2$ او $B = 1$ ایښوونه په III کې: $2 + 2 \cdot 2 - 2C = 2 \Rightarrow C = 1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

پ (اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې پوره په کرښیزو ضریبونو یا فاکتورونو نه ټوټه کیږي.

بنسټ:

که د یوه اصلي پولینوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولینوم $P_n(x)$ نور په یوه حقیقي ضریب نه ټوټه کېدونکي ضریب ax^2+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د یو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه کېښودل شي یا راوړل شي

بیلگه:

د پولینوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښیزو ضریبونو:

لومړی حل دې $x_1 = -1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماښت له لارې پیدا کیږي.

پولینوم وېش $(x+1) = x^2+2x+4$: (x^3+3x^2+6x+4) مو لاندې ټوټه کوني ته بیایي:

$$x^3+3x^2+6x+4 = (x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقیقي حل نه لري، نو د حقیقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشوني ده.

نو له دې امله پولینوم کسر لاندې بڼه لري: $\frac{Ax}{x^2+2x+4}$

د $\frac{C}{x+1}$ بڼې کسر سره یوځای مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بیايي:

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 4} + \frac{C}{x + 1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} &= \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 2x + 4)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} \\ \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} &= \frac{(A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + (B + 4C)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} \end{aligned}$$

د ضریبونو A, B, C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

$$A + C = 5 \quad \text{I}$$

$$A + B + 2C = 8 \quad \text{II}$$

$$B + 4C = 9 \quad \text{III}$$

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې گډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتونې یا متحولې لري:

$$A - 2C = 5 \quad \text{IV}$$

$$A + C = 5 \quad \text{I}$$

مساوات III منفي مساوات II: $-3C = -6 \Rightarrow C = 2$

د $C = 2$ په ائښتولو سره: $A + 4.2 = 9 \Rightarrow B = 1$

د $C = 2$ په III ائښتولو سره: $B + 4.2 = 9 \Rightarrow B = 1$

که دا د ټوټه کونې فرمول کې کېږدو نو د ټوټه کسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}$$

ج) نا اصلي پولینوم کسرونه:

که د یوه پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولینوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا په پولینومویش له لارې په ټولناتق کسر او یوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بیلگه:

کسري پولینوم $\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8}$ په ټوټه کسري پولینومونو ټوټه کړئ .

د پولینوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولینومکسر مخ ته پروت دی.

پولینوم وېش:

$$\begin{aligned} (3x^3 - 6x^2 - 20x - 1) : (x^2 - 2x - 8) &= 3x + \frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8} \\ &\quad - \frac{(3x^3 - 6x^2 - 24x)}{4x - 1} \end{aligned}$$

د پاتې — یا باقي کسر $\frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عملیه)

مخ ته بیایو. مخرج په کرښیزو ضریبونو ټوټه کړی:

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ له پاره حل $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ لرو.

نو $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$ دی.

د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځای کوو:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\begin{aligned}\frac{4x-1}{x^2-2x-8} &= \frac{A(x+2) + B(x-4)}{(x-4)(x+2)} \\ \frac{4x-1}{x^2-2x-8} &= \frac{(A+B)x + (2A-4B)}{x^2-2x-8}\end{aligned}$$

د ضریبونو د پرتله کوونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$\begin{aligned}A + B &= 4 & \text{I} \\ 2A - 4B &= 4 & \text{II}\end{aligned}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه یې تفریق یا کول $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

په II کې ایښوول: $2A - 4 \cdot \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

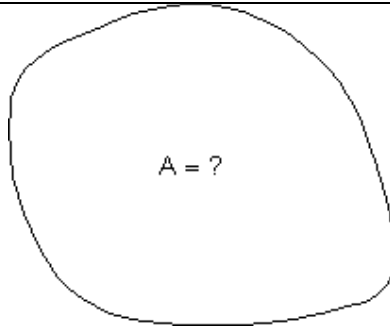
متحول (بښتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندې بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

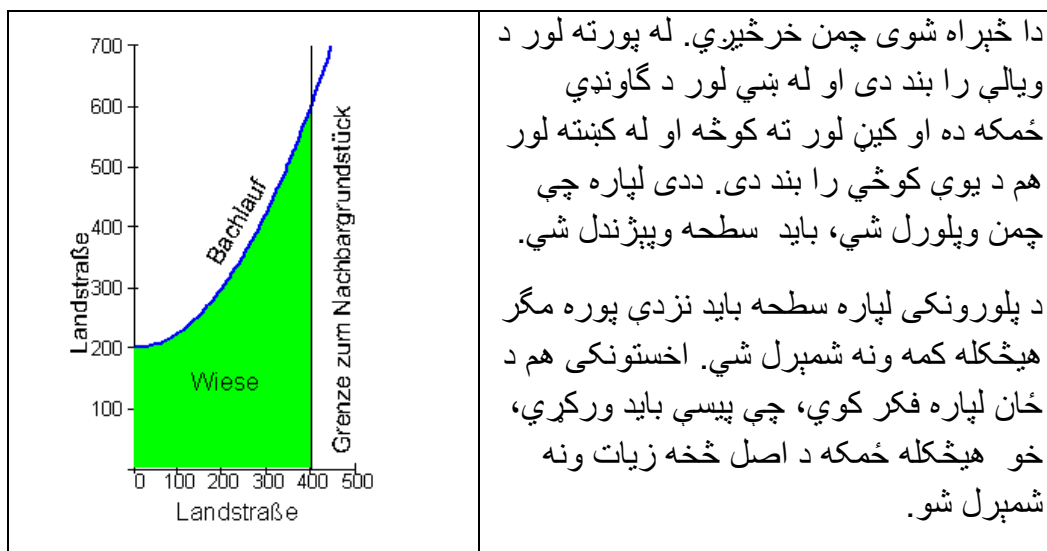
د انتیگرال شمیرنه

د انتیگرال شمیرنې لپاره پیل راوړنې

موږ د ځمکچپوهنې یا هندسې له لارې بلد یو چي د کرښو رابند تټونو یا جسمونو سطحه او ډکۍ یا حجم څنگه وشمیرو. که یوه سطحه له گڼرط (کرښې) رابنده وي، نو څه باید وشي؟ دا مو انتیگرال شمیرنې ته رابولي.

 $A = ?$	پخوانیو یونانیانو ته دا د منحنی څخه رابندې سطحې شمیرلو اصول معلوم وو. دا د مشتق شمیرنه، چي موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پېړۍ پاي کي) د طبیعي علومو پوهانو لایبنیڅ او نیوتون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.

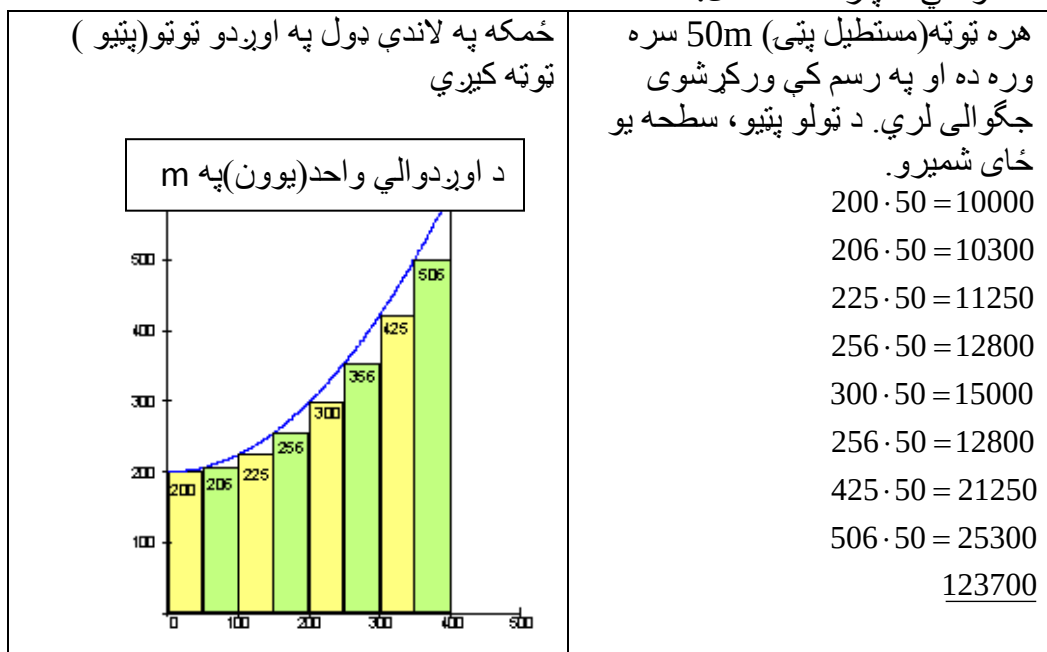
پیلابیلګه



وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

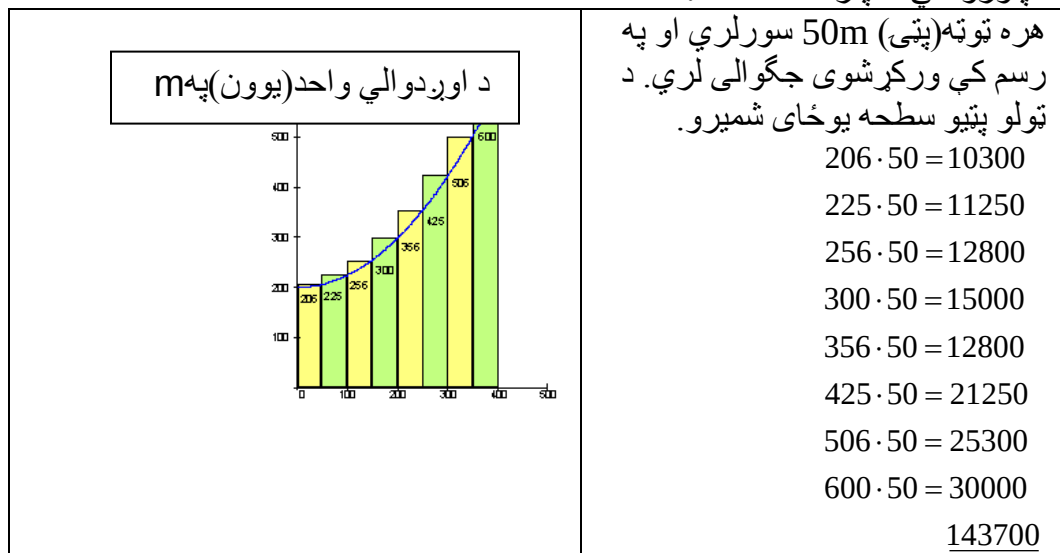
وباله $f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.



د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې 123700 m^2 ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:



د د پلورونکي له پاره د ټولې سطحې مساحت نږدې 143700 m^2 دی. اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قېمتونو، منځ، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قېمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700 \text{ unt}^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیگرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې ریښتونی ارزښت یې 133333.3 m^2 دی.

د اخستونکي په بېلگه کې دا ډول شمېرنه لاندنۍ، جمعې جوړول، بلل کيږي. د پلورونکي په بېلگه کې دا ډول شمېرنه، پورتنۍ جمعې، جوړول بلل کيږي. دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی. باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې ریښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه:
 دا دانتیگرال هندسي مفهوم هم دی.
 په کارتيزي وضعيه قیمت سیستم کې د گراف په سرچینه کې یوه کرښه رسموو.
 غواړو سطحه پیداکړو، چې د تابع دگراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې
 پرته وي (د x تابع وي).

د ریمن (ټاکلی) انتگرال

یادونه: انتیگرال څه شی دی؟

آنتیگرال کونه Integration د ورگډېدلو په معنی دی، لکه چې یو څوک یوې پردې
 ټولنې ته ورگډیږي یعنې ددې پردې ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه
 ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کیږي، چې څنگه د
 یوې کوچنۍ درجې تابع و یوه جگ درجې فنکشن یا تابع ته ځي.

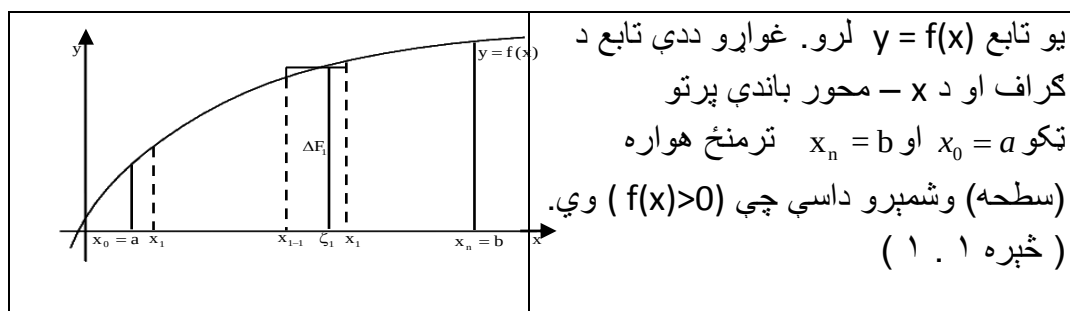
د انتیگرال هندسي تعریف:

لوریزه سطحه-د انتیگرال تعریف: که یوه f تابع ولرو، نو د x محور او تابع ترمنځ
 سطحې شمېرل د انتیگرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته
 لوري ته سطحه مثبتې مخنښه لري او د x محور کښته لوري ته سطحه منفي
 مخنښه لري.

تحليلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انټروال $[a, b]$ باندې تعریف دی، نو
 د a څخه تر b پورې د تابع د انتیگرال څخه د x په محور د f د گراف او د کرښې
 $x=a$ او $x=b$ تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

په دې برخه کې غواړو، چې د انتگرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې یا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتگرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتگرال نیول د مشتق په څې یا برعکس کارونه یا عملیه ده.



ددې دندې د حل لپاره د $[a, b]$ اینټروال په n (نه اړین) برابر برخو انټروالونو
 $[x_{i-1}, x_i]$ ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اینټروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ ترمنځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل
 سطحه (و لارکونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \quad (4.2)$$

د ټولو پورته مستطیل ټوله کوچنیو سطحو د جمعي (زیاتون) له لارې غوښتونکي، نږدې
 ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^n \Delta F_i = \sum f(\xi_i) \Delta x_i; \dots \dots \dots (4,2)$$

دا نږدېوالی تر هغې ښه کيږي څومره چې د اینټروال $[a, b]$ ویش نری شي يعنې $\max \Delta x \rightarrow 0$ ، هر څومره چې د زیاتیدونکو شمیر $n \rightarrow \infty$ (شي).

که (۴ . ۲) تل هماغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اینټروال $[a, b]$ څنگه ویشل شوی

او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنگه ټاکل شوي، نو $f(x)$ په اینټروال $[a, b]$ کی اینټیگرالور دی. دا د بیلگي په

توگه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو $y = f(x)$ حالت دی.

پیژند (تعریف) ۴ . ۱ : لیمیت (پوله)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\Delta x \rightarrow 0), \dots \dots \dots (4,3)$$

که په اینټروال $[a, b]$ کی موجود وي، نو دا د $f(x)$ ټاکلی اینټیگرال بولو، یا د ریمن سطحه

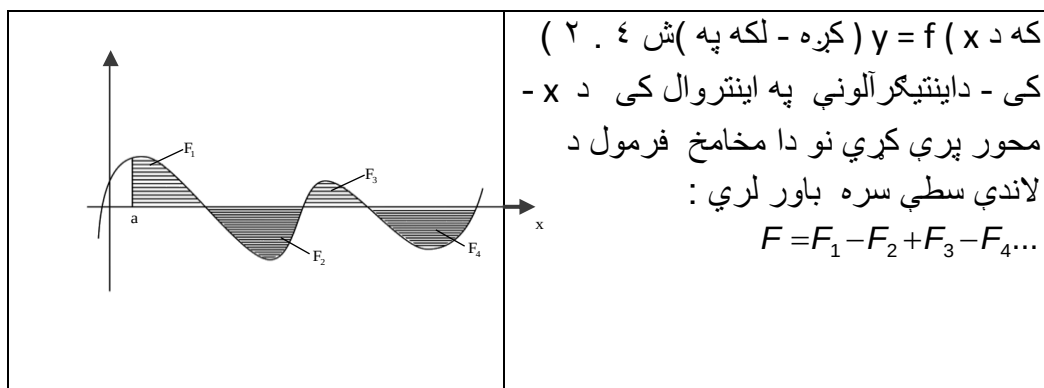
F- Riemann . دلته a د اینټیگرال کېدونکي لاندې (کښته) پوله یا حد او b د ایتيگرال کېدونکي پورته پوله یا حد بلل کيږي او $[a, b]$ د ایتيگرال کېدونکي اینټروال او (Integrand) $f(x)$ اینټیگرال کېدونکي متحول (Integrationsvariable) بلل کيږي

یادونه ۱ : د ایتيگریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نڅښه شي (مخنځښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

$$\text{مور لرو: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

یادونه ۲: دا پورته تعریف ۴. ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی $f(x) > 0$ باوري نه وي.

که $f(x) < 0$ وي نو دا ټاکلی اینتیگرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري



د تعریف ۴. ۱ پسې ترلې دا لاندې جمله لرو:

جمله ۴. ۱: که $f(x)$ په $[a, b]$ کې اینتیگرالور وي او $c \in [a, b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ددې لپاره چی دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، باید له اینتروال $[a, b]$ د باندې نه وي پروت، یعنی ټکي a, b او c په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چی تابع $f(x)$ اینتیگرالور دی.

موږ دا لاندې تعریف (پېژند) لرو :

پېژند یا تعریف ۴. ۲ : $f(x)$ په یوه بند انټروال $[a, b]$ کې اینټیګرالور دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

د پېژند تعریف ۴. ۱ له مخې تل باور لري: $\int_a^a f(x) dx = 0$

بنسټیز - یا لومړنۍ تابع

ددې لپاره چې د مشتقنیولو او اینټیګرال نیولو ترمنځ اړیکې لاس ته راوړو، د لومړنۍ تابع کلمه په لاندې توګه تعریفوو:

پېژند (تعریف): تابع $y = f(x)$ دې په یوه واز اینټروال کې تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقور $F(x)$ تابع چې $F'(x) = f(x)$ شرایط پوره کړي، د $f(x)$ بنسټیز - ، ساده - یا لومړنۍ تابع بلل کېږي

په ساده توګه لیدل کېږي چې د یوې $f(x)$ تابع لپاره نه یواځې یو بنسټیز تابع $F(x)$ موجود دی، د بیلګې په توګه $F_0(x) = x^2$, $F_1(x) = x^2 + 1$, $F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکې په عمومي ډول

$F(x) = x^2 + C$ ، چې دا ټول مساوي مشتقونه $f(x) = 2x$ لري.

د پورته ښوونو پایله، چې څنگه سړی د یوه متمدني تابع $f(x)$ لومړنی تابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

$y = f(x)$ دې په اینټروال I کې متمدني تابع وي، نو د $a \in I$ لپاره

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{د } f(x) \text{ یوه لومړنی تابع ده، دټولو } c \in I \text{ لپاره.}$$

د $f(x)$ هره بله لومړنی (بنسټیزه) تابع لاندې ښه لري:

$$F(x) = F_a(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

خواب:

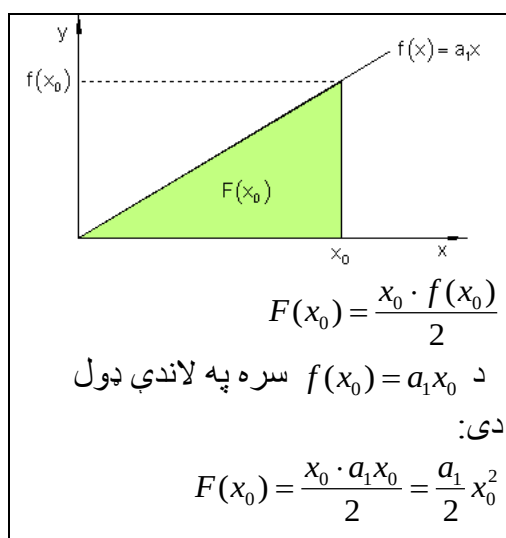
ښایو چې $F_a(x)$ د $f(x)$ بنسټیز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښایو چې د $F_a(x)$ لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د $F_a(x)$ مشتق د $x \in I$ او $x \neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

$$\begin{aligned} F'_a(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi), \quad \xi \in [x, x+h] \end{aligned}$$

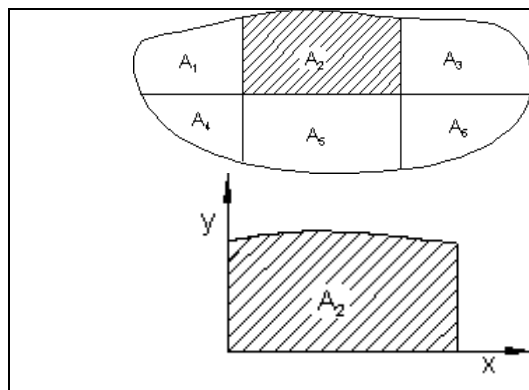
(د لیمیت منځ ارزښت جملې له مخې داسې یوه ξ شته دی
 (د متمادیت له امله $((f(\xi) \rightarrow f(x)$
 $= f(x)$)

سطحه او لومړنۍ تابع:

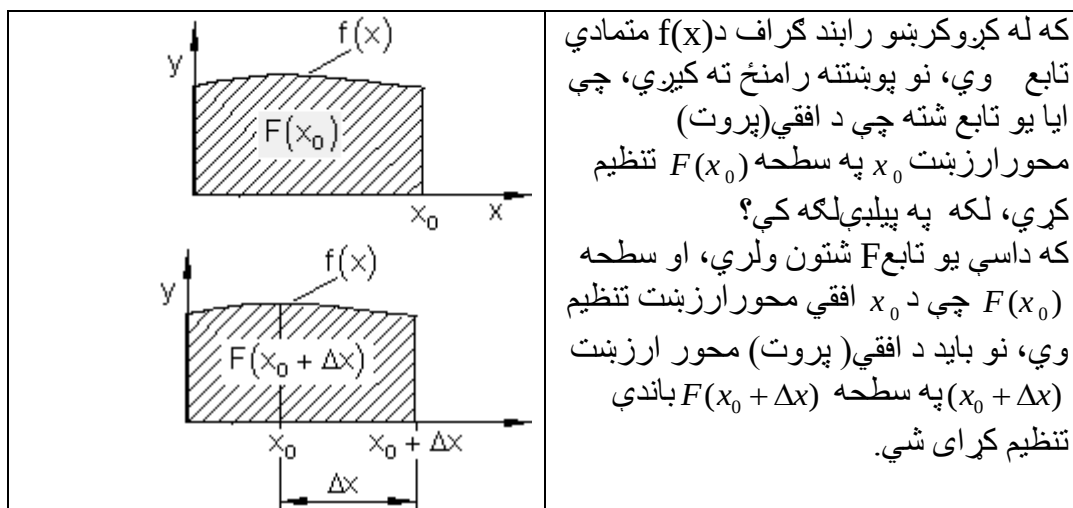
سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:



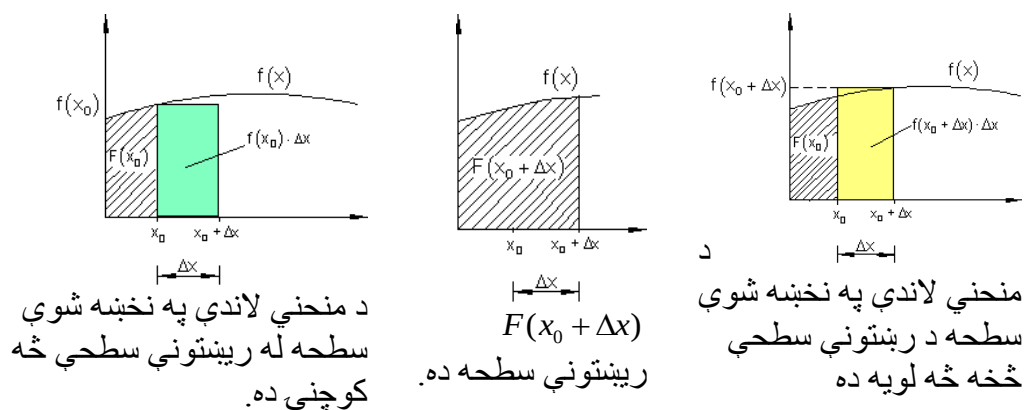
تابع $F(x_0)$ د گراف او د x - محور ترمخ سطحه د x_0 په واکوالي (تابعیت) کې تشریح
 کوي یا ښايي. موږ دا تابع د سطحې تابع بولو.
 د سطحې پرابلم:



هره له کروکړښو رابنده سطحه په پای
 ډېرو پلونو (قدمونو)، چې په هغې کې فقط
 یوه یوه کرښه رامنځ ته کيږي.
 نورې ټولې رابندونې سیده کرښې دي.
 هر ه یوه د سطحې برخه (د بېلګې په توګه
 دلته A_2) کېدی شي د وضعیه قیمتونو
 سیستم کې د یوې سطحې په څېر انځور
 شي، چې د کړې کرښې او پروت محور
 ترمخ پرته وي.



په یوه څلورضلي (مستطیل) کې د سطحې رابندول:



که د سطحې پټي (یا کوچني مستطیلونه یا ولارکوډیز) هر څومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه یې توپیر کميږي. دا اړودوالی د ریاضیاتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدلی شي:

$F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x$	$F(x_0 + \Delta x)$	$F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونو یا نامساواتو ته راځوي

$$\begin{aligned}
 F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) \leq F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | F(x_0) \\
 \Leftrightarrow f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad |: \Delta x \\
 \Leftrightarrow f(x_0) &\leq \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \leq f(x_0 + \Delta x)
 \end{aligned}$$

لیمیت یې نیسو (پوله یې پیدا کوو):

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) &\leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \\
 f(x_0) &\leq F'(x_0) \leq f(x_0) \\
 f(x_0) &\leq F'(x_0) = f(x_0) \\
 \underline{\underline{F'(x_0) = f(x_0)}} & \text{ نو لرو:}
 \end{aligned}$$

دا په دې معنا، چې د سطحې $F(x)$ مشتق د کړې کړنې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی. موږ لیکو:

$$\boxed{F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)} \quad \text{یا} \quad F'(x_0) = \frac{dF(x_0)}{dx} = f(x_0)$$

که موږ بریالي شو، داسې یو تابع $F(x)$ پیدا کړو چې مشتق یې د رابندې کړې $f(x)$ تابع وي، نو $F(x)$ د سطحې تابع دی. که موږ یو تابع د لومړني تابع څخه رابیل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سری کړی شي فورمال ووايي:

د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیدا کړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انتیګرال یې شمېرو. د یوه ساده توان تابع په بیلګه د احساس له مخې یوه لار پیدا کیدی شي، چې دا څنګه ایتېګرال وي.

توانتابع:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په یو کمیري او پوتنختابع د زاړه پوتنخ سره ضربیږي.

انتیگرالونه (زیاتونه یا ورگډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په یو جگیري او پوتنختابع په نوي اکسپوننت وېشل کیږي.
دا همدا اوس ازمايو:

پوتنختابع:

$$f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2+1} x^{2+1} = \underline{\underline{x^3}}$$

تابع $F(x)$ د $f(x)$ بنسټتابع (لومړنی تابع یا ساده تابع) بلل کیږي، ځکه چې $f(x)$ له $F(x)$ څخه لاس ته اړخي یا را پیدا کیږي یا راځيږي.

ناټاکلی انتیگرال

و به گورو، چې ناټاکلی انتیگرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې $f(x)$ تابع $F(x)$ لومړنی تابع، یعنې $F(x)$ وپېژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولو سره د $f(x)$ د ټولو لومړنیو تابعو ست G لاسته راوړو (c په خوښه یو حقیقي عدد دی).

موږ د $f(x)$ تابع د $F(x)$ لومړنی تابع ټاکنه یا اینتگرالونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x)dx \Leftrightarrow F(x) = \int dF(x) = \int f(x)dx$$

$$F(x) = \int f(x)dx$$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

موږ لومړنی توابع پلټو

بیلگه:

لومړنی تابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې مشتق یې $f(x) = 2x$ دی.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int 2x dx$$

موږ ازمایو:

$$F(x) = x^2 \quad \text{ځکه چې} \quad f(x) = 2x = F'(x)$$

$$F(x) = x^2 + 2 \quad \text{ځکه چې} \quad f(x) = 2x = F'(x) \quad \text{په ټولیزه توګه باور لري:}$$

$$F(x) = x^2 + C \quad \text{ځکه چې په هر حالت کې لرو:} \quad f(x) = 2x = F'(x)$$

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره

هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

$$\boxed{\int f(x) dx = F(x) + C} \quad \text{قاعده (لار): باور لري:}$$

د لومړنیو توابعو سټ (ډېری)

بیلګه بڼایي، چې د تابع $f(x)$ لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپیر لري، چې دا د $f(x)$ د لومړنیو توابعو سټ بولو.

بیلګه

یو لومړنی تابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

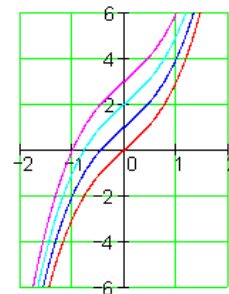
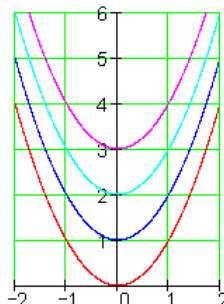
$$F(x) = x^3 + 2x + C \quad \text{، ځکه چې} \quad f(x) = 3x^2 + 2 = F'(x)$$

د ټولو لومړنیو توابعو ډېری دې د منحنیو ډلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپیر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$$F(x) = x^2 + C$$

$$F(x) = x^3 + 2x + C$$



انتیگرالشمیرنه د مشتقشمیرني برعکس دی.

لاندې توابع په اړونده توگه په ،، برعکس مشتقولو، له لارې. موږ د مخه ځنې انتیگرال قاعدې لوستلي.

لکه چې ومو لیدل دواړه تمرینونه د همغه تیپ او اصولو له لارې اجرا کيږي، خو یواځې لیکنه یې توپیر لري

دویم (لاتین) د سطحې د شمېرلو لپاره د مشتق او انتیگرال اصلي جملې ته گوته نیسو.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = |F(b) - F(a)|$$

د یوې ساده بیلگې له لارې د اصلي جملې په مرسته دا سې مخ ته څو

تمرین (چا چې ډېر کار کوی وي) شوی لیدونکی گوري یا پیژني، چې د سطحې مساحت په دې بیلگه کې بې له مطلق ارزښت شمیرل کېدای شي.، ځکه چې په دې بیلگه کې سطحه د $-x$ محور پورته لور ته پرته ده .

د دې درس تکمیل – یا *پوره کیدني لپاره بیلگي.

1. ټول تام کسري تابع د x -محور او د کرښو $x = -2$ او $x = 1$ سره یوه سطحه پوره رابندوي یا راتړي. د سطحې مساحت وشمیرئ.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 6$$

$$a = -2, \quad b = 1$$

2. د دوه توابعو $f(x)$ او $F(x)$ مساوات ورکړ شوي دي (الف) صفرځایونه وشمیرئ او د $f(x)$ گراف وکارئ. (ب) وښایئ، چې $F(x)$ د $f(x)$ لومړنی تابع دی. (پ) د $f(x)$ او x -محور څخه پوره رابندي سطحې مساحت وشمیرئ.

:

$$f(x) = 3e^{-x} \cdot (2x - x^2 + 1)$$

$$F(x) = 3 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$$

3. د ۴ - می درجې تامراشنل تابع د x -محور په درې ټکو کې غوڅوي او د هغې سره یوه سطحه مکمله رابندوي. د سطحې مطلقه مساحت وښایئ.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$$

۴. د $f(x)$ مثلثاتي تابع د $-$ محور د a او b ټکو او همداسر نورو ټکو کې غوڅوي. د $f(x)$ او x -محور تر منځ د $x=a$ تر $x=b$ په انټروال کې د سطحې مساحت وشمېرئ.

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$

$$a = -\frac{\pi}{6}, \quad b = \frac{3}{2}\pi$$

5. دوه تامراشنل توابع $f(x)$ او $g(x)$ په ټکو A, B او C کې غوڅوي. (الف) د شي حالت رسم کړئ. (ب) د سطحو مساحت د $f(x)$ او $g(x)$ ترمنځ له $x=a$ څخه تر $x=b$ انټروال کې وشمېرئ.

$$f(x) = x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$A(a;0), \quad B(b;0)$$

6. د وضعیه قېمتسیستم په لومړۍ او دویمه څلورمه (ربع) کې تابع $f(x)$ او $g(x)$ تابع ټیک په دوه ټکو کې غوڅوي. (الف) غوڅتکي یې وښایاست او انځور یې وکارئ. (ب) د دواړو گرافونو څخه کوم د سطحې مساحت رابندیزي.

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$$

$$g(x) = 3\frac{1}{4}$$

7. د دوه توابعو $f(x)$ او $F(x)$ مساوات ورکړل شوي دي. (الف) صفرخایونه یې وشمېرئ او د $f(x)$ گراف وکارئ. (ب) وښایئ، چې $F(x)$ د $f(x)$ لومړی تابع دی. (پ) د سطحې مساحت وشمېرئ، چې د $f(x)$ له گراف د وضعیه سیستم له محورونو او د کرښې $x=4$ څخه رابنده وي.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$F(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

8. کسري راشنل تابع د -محور، کرښې او کرښې سره په دریمه څلورمه (ربع) یوه سطحه رابندوي.

د دې کچ عدد وښایئ.

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x}{4x - 2} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{11}{16} + \frac{11}{32x - 16}$$

حلونه.

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x + c$$

$$G(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + c$$

$$H(x) = \frac{1}{3}a \cdot x^3 - \frac{x^2}{6} + x + c$$

$$K(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + c$$

$$L(x) = \frac{x^5}{10} + \frac{2}{9}x^3 - 4x + c$$

- ۲

$$\int f(x) dx = x^2 + \frac{1}{4}e^{4x} + c$$

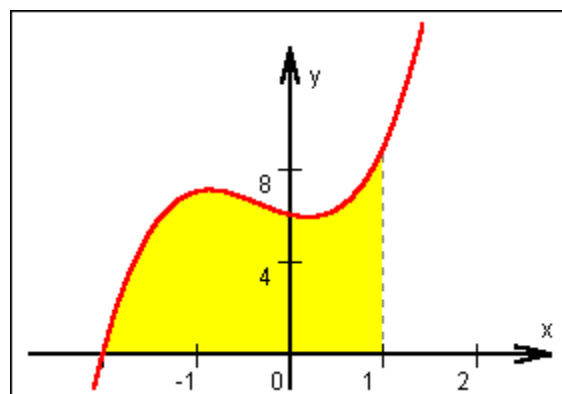
$$\int g(x) dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{0,5x} + c$$

$$\int h(x) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln|x| + c$$

$$\int k(x) dx = -\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

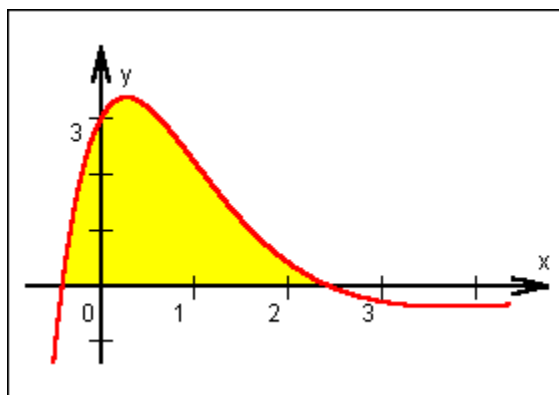
$$\int l(x) dx = 2\sqrt{x^3} + c$$

- ۱ . ۲



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 (2x^3 + 2x^2 - x + 6) \cdot dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-2}^1 \\ &= \left| 6\frac{2}{3} - \left(-11\frac{1}{3} \right) \right| = \underline{\underline{18FE}} \end{aligned}$$

- ۲ : ۲



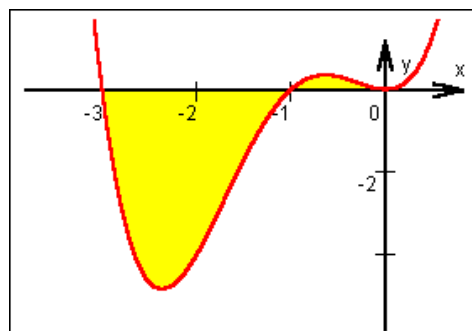
$$F'(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3 \cdot 2x \cdot e^{-x} + 3(x^2 - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= 3e^{-x} \cdot (2x - (x^2 - 1)) = f(x) \end{aligned}$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx = [F(x)]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A = \left[3 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x} \right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A \approx |1,30 - (-3,76)| = \underline{\underline{5,06 FE}}$$



۳ : ۲

$$x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

$$A = \int_{-3}^{-1} (x^4 + 4x^3 + 3x^2) \cdot dx + \int_{-1}^0 (x^4 + 4x^3 + 3x^2) \cdot dx$$

$$A = \left[\frac{1}{5} x^5 + x^4 + x^3 \right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{5} x^5 + x^4 + x^3 \right]_{-1}^0$$

$$A = | -0,2 - 5,4 | + | 0 - (-0,2) | = \underline{\underline{5,8FE}}$$

— ۴ . ۲

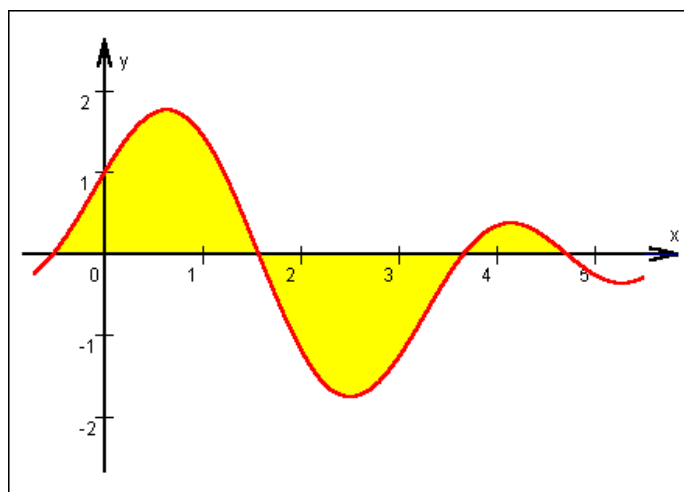
$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x + \cos x$$

$$= \cos x \cdot (2 \sin x + 1)$$

$$0 = \cos x \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \pi, x_2 = \frac{3}{2} \pi$$

$$0 = 2 \sin x + 1 \rightarrow x_3 = -\frac{1}{6} \pi, x_4 = \frac{7}{6} \pi$$



$$A = \int_{x_3}^{x_1} f(x) \cdot dx + \int_{x_1}^{x_4} f(x) \cdot dx + \int_{x_4}^{x_2} f(x) \cdot dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x \right]_{x_3}^{x_1} + \left[\right]_{x_1}^{x_4} + \left[\right]_{x_4}^{x_2}$$

$$A = 2,25FE + 2,25FE + 0,25FE = \underline{\underline{4,75FE}}$$

— ۰ . ۲

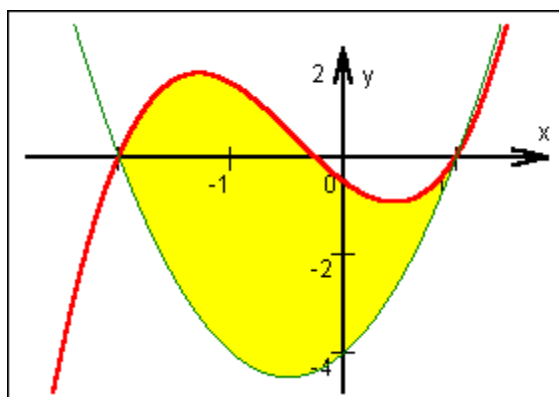
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2,25}$$

$$\underline{\underline{x_1 = a = -2}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = +1}}$$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{+1} (f(x) - g(x)) \cdot dx \\ &= \int_{-2}^{+1} \left(x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 3\frac{3}{4}x + 3\frac{1}{2} \right) \cdot dx \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 1\frac{7}{8}x^2 + 3\frac{1}{2}x \right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left| 1\frac{5}{8} - \left(-8\frac{1}{2} \right) \right| = \underline{\underline{10\frac{1}{8} FE}}$$

- ۶ . ۲

$$x + \frac{1}{x+1} = 3\frac{1}{4}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x+1} = 3\frac{1}{4}$$

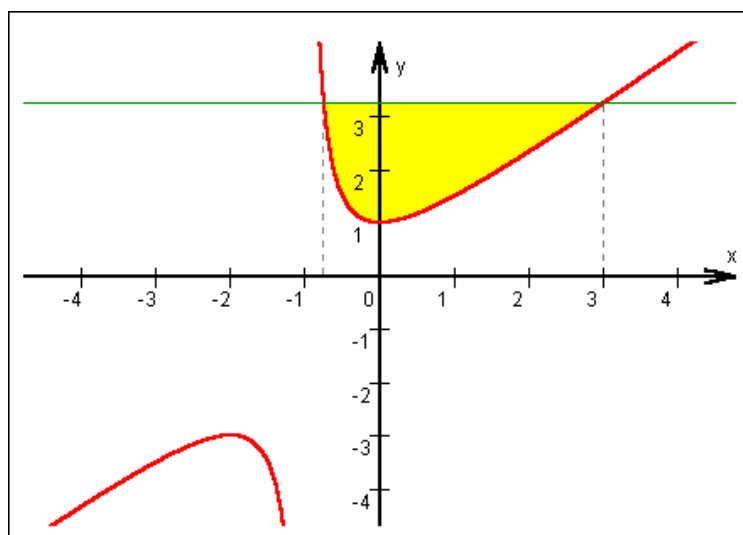
$$x^2 + x + 1 = 3\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{4}$$

$$x^2 - 2\frac{1}{4}x - 2\frac{1}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9}{8} \pm \sqrt{\frac{81}{64} + \frac{144}{64}} = \frac{9}{8} \pm \frac{15}{8}$$

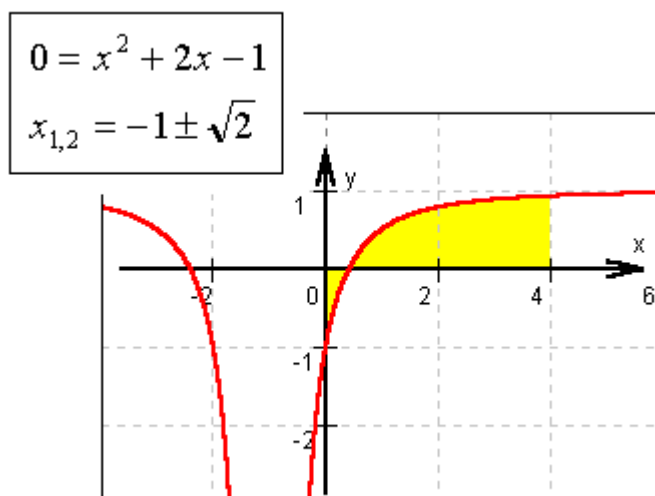
$$x_1 = a = -\frac{3}{4}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = 3}}$$



$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b (g(x) - f(x)) \cdot dx \\
 &= \int_{-\frac{3}{4}}^3 \left(3\frac{1}{4} - x - \frac{1}{x+1} \right) \cdot dx \\
 &= \left[3\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(x+1) \right]_{-0,75}^{+3} \\
 &\approx |3,86 - (-1,33)| = \underline{\underline{5,19FE}}
 \end{aligned}$$

- ٧ . ٢

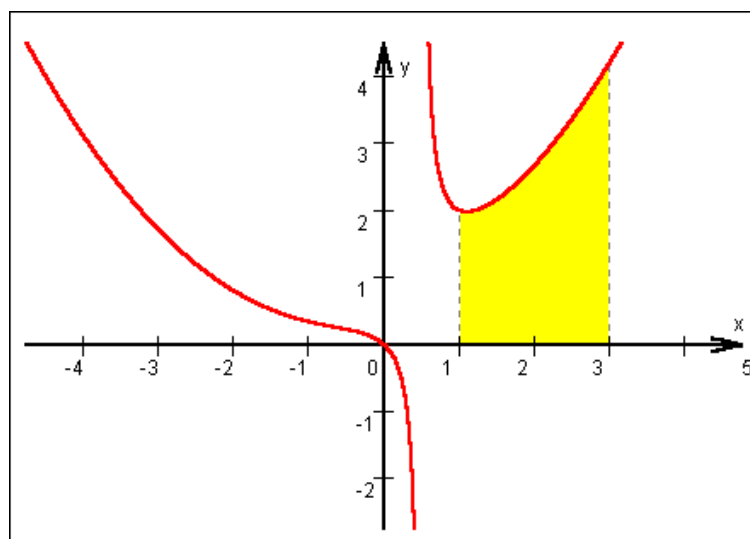


$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2 + 1)}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = f(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{-1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx + \int_{-1+\sqrt{2}}^4 f(x) \cdot dx \\
 &= \left[\frac{x^2+1}{x+1} \right]_0^{-1+\sqrt{2}} + \left[\frac{x^2+1}{x+1} \right]_{-1+\sqrt{2}}^4 \\
 &= 0,17FE + 2,57FE = \underline{\underline{2,74FE}}
 \end{aligned}$$

په پورته کې FE د سطحې واحد (یون) په معنای

۲ . ۸ _



$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^3 \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{11}{16} + \frac{11}{32x-16} \right) \cdot dx \\
 &= \int_1^3 \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{11}{16} \right) \cdot dx + \int_1^3 \frac{11}{32x-16} \cdot dx
 \end{aligned}$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{12} x^3 + \frac{3}{16} x^2 + \frac{11}{16} x \right]_1^3 = 5 \frac{1}{24} FE$$

$$\begin{cases} z = 32x - 16 \\ \frac{dz}{dx} = 32 \Rightarrow dx = \frac{1}{32} dz \end{cases}$$

$$A_2 = \int_{16}^{80} \frac{11}{z} \cdot \frac{1}{32} dz = \frac{11}{32} \cdot [\ln z]_{16}^{80} \approx 0,55 FE$$

$$\underline{\underline{A \approx 5,59 FE}}$$

په پورته کې FE د سطحې واحد (یوون) په معنای

بیلگه:

مشتقور مگر نامتمادي (پرېکېدونکی) مشتقور تابع:

لرو:

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \end{cases}$	د $x \neq 0$ لپاره د $x = 0$ لپاره

$$\text{نو } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$$

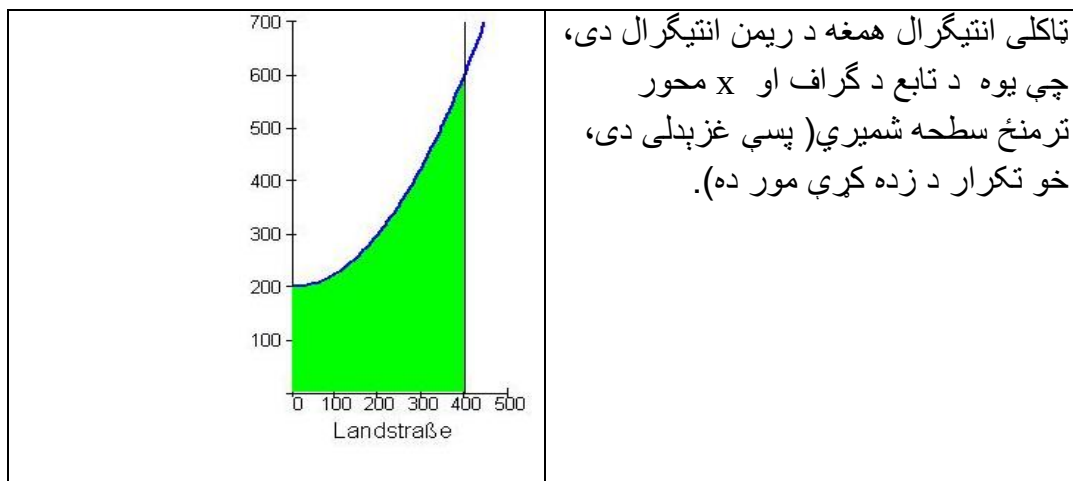
مشتق $f'(0) = 0$ دی. او د $\forall x \neq 0$ لرو:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

، چېرې چې $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ ناشته دی. تابع f

له دې امله مشتقور دی مگر نه ناپرېکېدونکی (متمادي) مشتقور.

د ټاکلي انتیگرال شمیرنه



ټاکلي انتیگرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیگرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیگرال د پولې (حد) a تر پولې (حد) b یا د a او b حدونو ترمنځ یا انتیگرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د f گراف لاندې د a او b تر منځ.

G دې په بند انټروال $a \leq x \leq b$ کې د $g(x)$ لومړنی انتیگرال وي، د

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ سره، نو باور لري: } \int_a^t f(t)dt = G(b)$$

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو $G(x) = F(x) + C$ باور لري. د $x=b$ لپاره لاسته راوړو: $G(b) = F(b) + C$

دا چې $G(x) = \int_a^x f(t)dt = 0$ دی او $G(a) = F(a) + C$ دی، نو $C = -F(a)$ ده.

دا په دې معنا، چې $G(b) = F(b) - F(a)$ همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیگرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیگرال شمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف: f په انټروال $a \leq x \leq b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیگرال دی:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

د $F(b) - F(a)$ لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیگرال شمېرنه په لومړني انتیگرال بېرته وایروله او د مشتق او انتیگرال تر منځ مو اړیکې رامنځ ته کړې.

بیلګې:

$$a) \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b) \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^4 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x} \right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

$$c) \int_1^3 \sqrt{x} dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{3} [\sqrt{x^3}]_1^3 (\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3})$$

$$= \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیگرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د $F(b) - F(a)$ له امله د انتگرالونې ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولی شو د انتیگرال ثابتې ټاکلو لپاره $c=0$ ولیکو.

بیلگه:

: د ټاکلي انتیگرال $\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x dx$ ارزښت و ټاکي.

بنسټونه: موږ په دا لاندې ډول بنایو:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x dx = [\sin x]_{-\pi}^{+0.5\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیگرال ارزښت غوښتل شوي دي او نه د یوې منحنۍ لاندې سطحه، نو باید نه دي چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي. عوره یادونه: دادي په یاد وي، چې ناټاکلی انتیگرال تابع ده او ټاکلی انتیگرال یو عدد.

د ناټاکلي انتیگرال څخه و ټاکلي انتیگرال ته

تر مخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنگه یو تابع $f(x)$ ته لومړنۍ تابع $F(x)$ منځ ته راوړی شو، نو ناپای دېر لومړني توابع شته دي، چې فقط د یوې ورجمع کونکې ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع $f(x) = 3x^2 + 2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x) = x^3 + 2x + C$

پېژند: د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع $f(x)$ ته ،، ناټاکلی انتیگرال ،، بلل

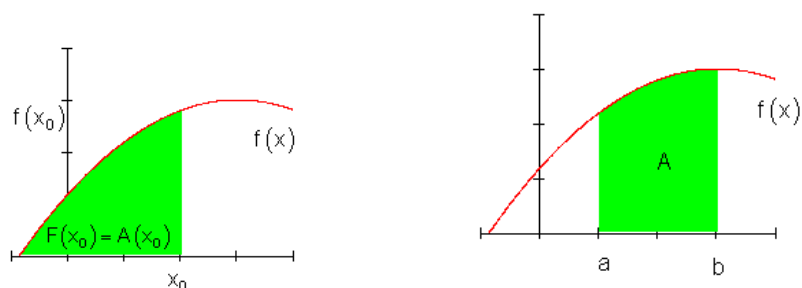
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

د مشتق- او انتیگرالشمېرنې ترمنځ اړیکې کېدې شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

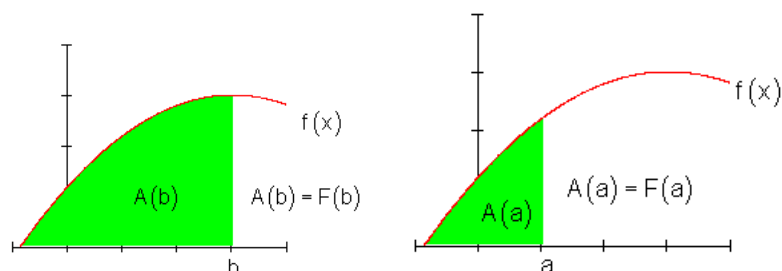
جمله(قضیه): د ناټاکلي انتیگرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)] + C}{dx} = [F(x) + C]' = f(x)$$

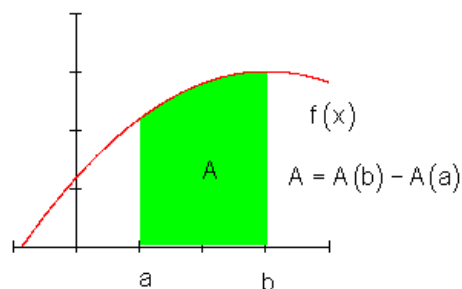
د تابع د گراف لاندې او د انټروال $[a; b]$ تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړي زده کړې کاروو.



د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لارښوده وي:
 د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې $f(x)$ تابع گراف لاندې ده تر x_0 ځای
 پورې او یوې $F'(x)$ تابع، چې د $F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځای د f تابع د تابع ارزښت
 سره د x_0 په ځای کې برابر وي، ترمنځ اړیکې شته دی، یعنې $F'(x) = f(x)$



د انټروال $[a, b]$ حدونو ترمنځ سطحې پیدا کول د تابع د گراف سطحو د کمښت څخه په
 ځای $A(b)$ او سطحې په $A(a)$ ځای کې، یعنې
 $A = A(b) - A(a)$ په همدې توگه $F = F(b) - F(a)$ لاس ته راځي.



په انټروال $[a, b]$ کې د تابعگراف لاندې سطحه د لومړنیو توابعو تفریق دی:

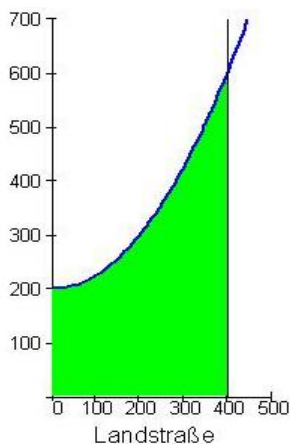
$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x) dx$$

دا انتیگرال ټاکلی انتیگرال هم بلل کیږي.

جمله :

دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پیل بېلگه کې راوړي د چمن سطحه وشمیږو.

ثابته له تفریق سره لري کیږي. په عمل کې د دې مسألې د حل لپاره یوه بله لار ګټوره راوستلې یا ګټوره ښوولې:



$$\begin{aligned} A &= \int_0^{400} \left(\frac{1}{400} x^2 + 200 \right) dx = \frac{1}{1200} x^3 + 200 \cdot x \Big|_0^{400} \\ &= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 \left[\frac{1}{1200} 0^3 + 200 \cdot 0 \right] \\ &= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 = \underline{\underline{133333.3}} \end{aligned}$$

د انتیگرالوونې قاعدې

د ناټاکلي انتیگرال انتیگرالوونې قاعدې: په لاندې اینټیګریشن قاعدو کې د اینټیګریشن ثابته باندې صرف نظر کیږي دلته مساوات تر یوې ورجع شوي ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې د مساواتو تر منځ یواځې یوه ثابته کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده

کیدۍ شي چي په ټاکلي انتیگرال کې بنوولي جملی سره سم ټاکلي انتیگرال ته نقل شي يعني په ټاکلي انتیگرال استعمال شي . دا قاعدې کیدۍ شي چي د تېرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وېنول شي.

جمله :

د یوې ثابتې سره ضرب : که تابع $f(x)$ په یوه اینتروال کې متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

جمله: د جمعي (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه اینتروال کې نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

بیلگې:

لاندې انتیگرالونه کیدۍ شي چي د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنسټیزو انتیگرالونو بدلکړای شي

$$a) \quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3} \int x^{-4} dx = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \right) x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b) \quad \int (3x^2 + 4x - 1) dx = 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx - \int dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 - x + C \\ = x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c) \quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx - 3 \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int x^{\frac{5}{2}} dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ = 2 \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7} x^3 \cdot \sqrt{x} - 2x \cdot \sqrt{x} + C$$

د اکسپوننشل توابعو انتیگرالونه

بنسټ:

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x) = e^x$ لپاره لرو: $\int e^x dx = e^x + C$ ($a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$)

د ټولیز اکسپوننشل تابع a^x لپاره لرو: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

بیلگه:

دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3} dx$ غواړو پیداکړو

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x \quad \text{ښه بدون: د توان قانون سره سم لرو}$$

$$\int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx \quad \text{د فاکتورونې قانون سره سم لرو:}$$

$$\frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8 \cdot \ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c \quad \text{انتیگرال یې ونیسئ:}$$

د لوگاریتمي توابعو انتیگرالونه

بنسټ:

د طبیعي لوگاریتم تابع $f(x) = \ln x$ ($x \in \mathbb{R}^+$) لپاره $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + c$ دی.

د ټولیز لوگاریتم تابع ($a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$) $f(x) = \log_a x$

$$\int \log_a x dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + c \quad \text{لپاره دی.}$$

بیلگه :

ناتکلی انتیگرال $\int \ln 3x dx$ غواړو پیدا کړو:

بڼه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\begin{aligned}\int \ln 3x dx &= \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \int \ln x dx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c \\ \int \ln 3x dx &= x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c\end{aligned}$$

بنسټیز اینټیګرالونه په یوه جدول کې

د اینټیګرالولو او مشتق نیول د اړیکو په بنسټ کېدی شي چی د بنسټیزو اینټیګرالونو یو جدول ترتیب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټیزو تابعو برعکس څرګندیږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x) dx$	نیونه یا فرضیه
1	x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$	$a > 0, a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	

6	$\sin x$	$-\cos x + C$	
7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$
9	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

بیلگه :

د جدول او تېرو جملو څخه په گټه لاندې اېټیکرالونه په لاندې ساده ډول په بنسټیز توابعو بدلیدلی شي

- a) $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C, \dots\dots\dots 1,$
- b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0), \dots\dots\dots 3,$
- c) $\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x} dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3+1}{2 \cdot 3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0), \dots\dots\dots 3,$
- d) $\int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} dx = \int \cos x dx = \sin x + C, \dots\dots\dots (4,21) \quad 6,$
- e) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \right), \quad (4,11) \quad 9,$
- f) $\int (1 + \cot^2 x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi) \quad (4,12) \quad 8,$
- g) $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3} dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1, x \neq 0), \quad Nr.2,$
- h) $\int_{-1}^0 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}, \dots\dots\dots 5$

Substitutionlaw بدلون قانون

تراوسه پورې مو فقط انتیگرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو تابعو په انتیگرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتیگرالونو د نورو انتیگرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتیگرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله :

د ،، بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتین :د $f(g(x))$ یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لند: بدلون) د نیونو یا فرضیو له مخې، چې $u = g(x)$ څه برېکېدونکې یا متمادي او مشتقور دی او $y = f(u)$ متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د بني اړخ مشتق د تېرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx} \int f(u) du = \frac{d}{du} \int f(u) du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کین اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیگرالېډو لپاره مساعده ده، په کوم کې چې یو فاکتور زنځیري تابع $f[g(x)]$ وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سری د دننه تابع لپاره په دې توگه متحولې بدلوي یا ځای په ځای کوي $u = g(x)$:

$$\text{مشتق } \frac{du}{dx} = G'(x) \text{ جوړوي په همدې ډول } du = g'(x) dx$$

د بريالي انتیگرالېډو وروسته بدلون بیرته راگرځول کيږي.

بیلگه a :

لرو : $I = \int 2 \cos(2x-1) dx$. د دې انتیگرال وشمېرئ.

بدلون یا په ځای کونه: $2x - 1 = u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u \, du = \sin u + C = \sin(2x - 1) + C$$

بیلگه b: لرو $I = \int 3 \cos(2x + 1) dx$

بدلوو: $2x = u - 1$, مشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2) du$

$$I = \int 3 \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2} \int \cos u \, du = \frac{3}{2} \sin(2x - 1) + C$$

ومولیدل چی ځنځیري تابع د لایني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیگرال کیدی شي، ځکه چی د لایني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تېرې جملې سره سم د اینتیگرال تر مخ(موخه کین لور ده) لیکل کیږي.

بیلگه: لرو $I = \int \sqrt{-3x + 5} \, dx$

بدلون: $-3x + 5 = u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} \cdot \sqrt{(-3x + 5)^3} + C.$$

$$b) \, I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \quad \Rightarrow \quad -2 = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$c) \quad I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2 = u, \quad 1 = \frac{du}{dx} \quad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C.$$

د بنسټیزو اینټیګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱. ۱) متحولې x یواځې په جگ یا مټ د دوه منځ ته راځي. له دې امله داسې اینټیګرال، کومو کی چی د x^2 په ځای لایني ترم (Term) پروت دی، کیدی شي چی د لایني بدلولو له لارې په بنسټیز اینټیګرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واپرول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیا موجود وي، چی د اینټیګراند فورم ته راشو.

بیلګه 5.2:

$$a) \quad I = \int \frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2 = (\sqrt{2}x)^2, \quad d \cdot h \cdot I = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x = u, \quad \sqrt{2} = \frac{du}{dx} \quad dx = \frac{1}{\sqrt{2}} du,$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan } u + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan}(\sqrt{2}x) + C.$$

$$b) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2 = 9(1-4x^2) = 9(1-(2x)^2), \quad d \cdot h \cdot$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x = u, \quad 2 = \frac{du}{dx} \quad dx = \frac{1}{2} du$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6} \operatorname{Arcsin} u + C = \frac{1}{6} \operatorname{Arcsin}(2x) + C.$$

اینټیگریشن قاعدې، که دننه تابع خطي يا لایني نه وي، نو د اینټیگراند دوم فاکتور (تر ثابت فاکتور پورې) د دننې تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سری بنسټیز اینټیگرال ته راشي. دلته هم سری بیا دنننې تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلگه 6.21: الف:

$$I = \int 4x\sqrt{x^2-1} \, dx$$

بدلون: د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی، همداسې لرو: $x dx = \frac{1}{2} du$

$$I = \int 4\sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = 2 \int u^{1/2} du = 2 \cdot 2/3 u^{3/2} + C = 4/3 \sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

$$I = \int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx \quad (\text{ب})$$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x \, dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4$$

$$c) I = \int \frac{1}{x} \cdot \ln^2 x \, dx$$

$$\ln x = u, \quad \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \quad \frac{1}{x} dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \ln^3 x + C$$

$$d) I = \int \tan x \, dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d \cdot h. \quad I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \, dx,$$

$$\cos x = u, \quad -\sin x = \frac{du}{dx} \quad \sin x \, dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u} \, du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e) \quad I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3} dx.$$

$$2 - x^3 = u, \quad -3x^2 = \frac{du}{dx} \quad x^2 dx = -\frac{1}{3} du,$$

$$I = -\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{2du}{u} = -\frac{2}{3} \ln|u| \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} \ln|2-x^3| \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} (\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3} \ln 2.$$

۲۱ د بدلونقاعده (۲۱ . ۱۳) دې په چپه (یعني د بنی وکین) لور هم استعمال شي .
 اینتیگرال $f(x) \, dx$ کیدی شي چی په بل وارول شي چی x په یو مناسب بلواک (t) بدل شي (۲۱ . ۱۴)
 دا: $f(x) \, dx = f[g(t)] \cdot g(t) dt$.
 افاده « مناسب » بلواک دې دلته داسي وپوهیدی شي چی سری د بدلون وروسته یو ساده او ممکن یو بنسټیز اینتیگرال لاس ته راوړي. د (۲۱ . ۱۴) استعمال په قاعده کی داسی دی چی په یوه بلواک $f(x)$ کی موجود « پیچلی » ترم $h(x)$ د $t = h(x)$ په بدلون له منځ څخه وړي او بیا (که ممکن وي) د x په لوری حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بیلگه 7.21: الف:

$$a) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\sqrt{x-1} = t, \quad x; x = (t+1)^2, \quad dx = 2(t+1)dt:$$

$$I = \int \frac{2(t+1)}{t} dt = 2 \cdot \left[\int 1 dt + \int \frac{1}{t} dt \right] = 2(t + \ln|t|) + C = 2(\sqrt{x} - 1) + 2 \ln|\sqrt{x} - 1| + C$$

مناسب تابع، چې ورکړ شوی اینتگرال د دوه ایتکړالو جمعې ته بیایي، دلته

$$x = g(t) = (t+1)^2.$$

$$b) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$$

$$\sin x \cdot \cos^3 x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^4 x = \tan x \cdot \cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I = \int \frac{dx}{\tan x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx,$$

$$\tan x = t, \quad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt,$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot \sqrt{\tan x} + C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندې بلگه:

بیلگه:

عوارو د $f(x) = e^x$ مشتق پیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولی شو، یعنې لرو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

گورو، چې $F'(x) = e^x = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x) = e^{2x}$ او د پورته په څېر لار شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

$$F(x) = e^{2x} + C \text{ که دی، } F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x) \text{ وي}$$

له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

بیلگه:

د $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیگرال ونیسی

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

بدلون: $u(x) = 2x = u$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2} \text{ جوړ کړئ:}$$

$$\int f(x) dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C \text{ د بدلون برعکس:}$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C \text{ نو لرو:}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x) \text{ ازمايښت:}$$

بیلگه:

وښایې چې باور

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx \text{ لري.}$$

$$u(x) = x+1 = u \text{ بدلون}$$

جوړ کړی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C \quad \text{بیرته- یا په څټ بدلون:}$$

$$\int (x)dx = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^2}{3} + C \quad \text{نو:}$$

بیلگه :

و ښایي چې باور لري:

$$f(x) = (3x + 6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int (3x + 6)^3 dx$$

$$u(x) = 3x + 6 = u \quad \text{بدلون:}$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3} \quad \text{جوړوو:}$$

$$\int f(x)dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^3 du = \frac{u^4}{12} + C$$

$$\frac{u^4}{12} (3x + 6)^4 + C \quad \text{بیرته بدلون:}$$

$$\int (x)dx = \int (3x + 6)^3 dx = \frac{1}{12} (3x + 6)^4 + C \quad \text{نو لرو:}$$

بیلگه :

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

$$u(x) = x^2 = u \quad \text{بدلون:}$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du \quad \text{جوړوو:}$$

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln(u) du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln(u) - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C$$

$$: \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C$$

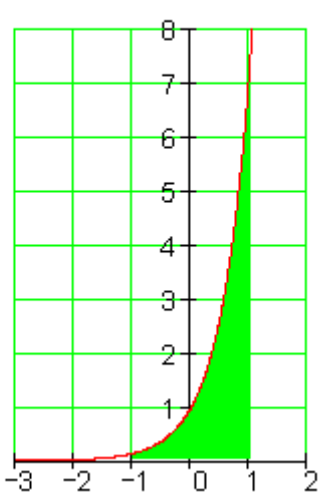
بیرته بدلون:

$$\int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C}}$$

نولرو:

د ټاکلو انتیگرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتیگرالونه هم د بدلون له لارې حل کېږي.

$f(x) := e^{2 \cdot x}$ 	بیلگه : وینایاست: $f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^1 e^{2x} dx$ د انتیگرال حل د بدلون له لارې: ۱ - بدلون $u(x) = 2x$ ۲ - د dx په ځای کېږدی $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$ ۳ - د پولو بدلون - لاندې پوله $u(-1) = -2$ - پورته پوله $u(1) = 2$ ۴ - په انتیگرال کې څا په ځای کړی $\frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = \frac{1}{2} [e^2 - e^{-2}] = \underline{\underline{3.627}}$

بیلگه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^x 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتیگرال حل د بدلون له لارې

$$1 - \text{بدلون } u(x) = x^2$$

$$2 - \text{د } \text{خای په په خای کونه}$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

$$3 - \text{د پولې بدلون}$$

$$- \text{لاندې پوله } u(1) = 1$$

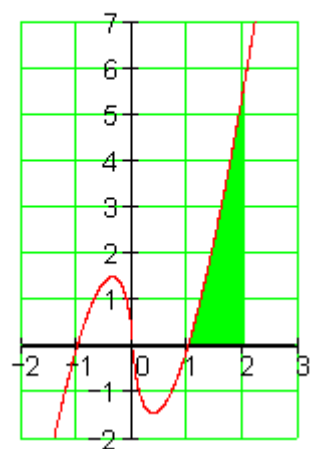
$$- \text{پورته پوله } u(2) = 4$$

$$4 - \text{په انتیگرال کې خای په خای کړی}$$

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



بیلگه :

$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 \\ (e^2 - 2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x < 2$ له پاره
	د $x \geq 2$ له پاره

$$A = \underbrace{\int_1^2 (e^x - 2) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 (e^2 - 2)e^{-(x-2)} dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 (e^x - 2) dx = [e^x - 2x]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = (e^2 - 2) \int_2^4 e^{-(x-2)} dx$$

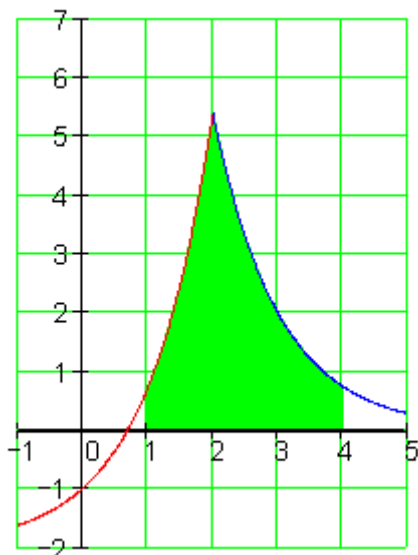
$$u(x) = -(x - 2) = -x + 2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du; u(2) = 0; u(4) = -2$$

$$I_2 = -(e^2 - 2) \int_0^{-2} e^u du = (e^2 - 2) \int_{-2}^0 e^u du$$

$$= (e^2 - 2) \cdot [e^u]_{-2}^0 = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7.331}}$$



توبه انتیگرالونه Partialy Integration

توبه انتیگرالونه، چې ضرب انتیگرالونه هم بلل کیږي، په انتیگرال شمیرنه کې د لومړنیو توابعو ټاکلو یا شمیرلو لپاره امکان دی. دا کېدی شي د مشتق شمیرنې د برعکس کونې په څیر وگڼل شي.

د ټوټه انتیگرالونې له پاره لاندې قانون کارول کیږي، چې د متمادی (نه پرېکېدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

دا قانون ټیک هلته گټور دی، که f مشتق نیولو سره یو ساده تابع منح ته راځي. پیل

د ضرب قانون (د ضرب مشتق نیونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیگرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیدا کیږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره گټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیگرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلگه:

د بیلگې په توگه لاندې انتیگرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x) dx$$

یو ساده انتیگرالیدونکې تابع $g'(x)$ او همداسې یو ساده مستقیمېدونکې تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د $\ln(x)$ انتیگرالونه نوې $\ln(x)$ راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو (مشتق کوو) او انتیگرالوو، نو لرو:

$$g(x) = \frac{x^2}{2} \text{ او } f'(x) = \frac{1}{x}$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکنه:

اوس دی u او v په خوبه توابع وي. U او V دې د u او V لومړني توابع وي، او همداسې دې u' او v' د u او v مشتقونه وي. u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیگرالونې له پاره لومړیتوب لري. نو باورلري:

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx &= u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \\ &= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \end{aligned}$$

د ټوټه انتیگرالونې لار (طریقه)

د ټوټه انتیگرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلگه: کله کله کېدی شي ګټور وي، چې د مساوات بنی لور ته ټوټه انتیگرال د څو واره انتیگرالونې وروسته بېرته راوگرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کین لور انتیگرال سره یوځای کولی شي.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$$

که کېږدو $f(x) = \cos(x)$ او $g'(x) = \sin(x)$ ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیگرال ورزیات کړو، نو راځي:

$$2 \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\cos^2(x)$$

که وایه لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos^2(x) + C$$

بیلگه ۲ :

د ځنو انتیگرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د $g'(x)$ له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیگرالونې کې هېڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلگې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کېدای شي دا بل ترم ،،له منځه یووړل شي،،.

$$\int e^x \cdot (2 - x^2) dx$$

که هر ځل $g'(x) = e^x$ کېږدو او د $f(x)$ له پاره، د انتیگرال لاندې ترم ، نو ترې لاس ته راځي:

.

$$\begin{aligned}
 \int e^x \cdot (2 - x^2) dx &= [e^x \cdot (2 - x^2)] - \int e^x \cdot (-2x) dx \\
 &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x dx \\
 &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x] \\
 &= [e^x \cdot (2 - x^2 + 2x - 2)] \\
 &= [e^x \cdot (2x - x^2)] + C
 \end{aligned}$$

بیلگه ۳ :

که تر انتیگرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنۍ تابع بې له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسیږي (نه پایول کیږي) (نه ختمیږي) کېدی شي کله کله د ورزیاتونې له لارې (ناڅرگند شته) ضریب "1" تویه انتیگرال شي.

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = \int g'(x) \cdot \ln(x) dx$$

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کېږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}
 \int 1 \cdot \ln(x) dx &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \\
 &= x \cdot \ln(x) - x + C
 \end{aligned}$$

جمله : موږ د دې لاندې انتیگرال نیسو:

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$
ږدو $v = \sin(x)$ ، نو $dv = \cos(x) dx$ ، لرو
په لاندې توگه مخ ته څو:

$$\begin{aligned}
 \int x \cos(x) dx &= \int u dv \\
 &= uv - \int v du
 \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned}
 &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx \\
 &= x \sin(x) + \cos(x) + C.
 \end{aligned}$$

C د انتیگرالونې یوه په خوښه ثابتې ده

د ټوټه انتیگرالونې د استعمال سره د انتیگرالونو لکه

$$\int x^2 e^x dx \text{ او } \int x^3 \sin(x) dx$$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیگرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x) dx$

$$dv = e^x dx \quad \text{داسې چې} \quad v = e^x$$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیگرال حل شي، نو د ټوټه انتیگرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$$u = \sin(x); du = \cos(x) dx$$

$$v = e^x; dv = e^x dx$$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیگرال لرو (بې له مخ نڅېښې)، نو د ښي لور انتیگرال که کین لور ته یوسو، لاس ته ترې راځي:

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیگرالونې یوه په خوښه ثابتې ده

د ټوټه راشنل کسرونو انتیگرال

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x} \quad \text{د انتیگرال نیول}$$

نیول تر واده ورسره بلده لار شونې دی، که څنگه؟

بیلگه :

$$\int \left[\frac{7x-12}{x^2-6x+8} \right] dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفر ځایونو $x_1 = -2$ او $x_2 = -4$ سره د کرښیزو توابعو په ضریبونو تجزیه کېږي:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې پیل کوو:

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعی له پاره په اصلي مخرج ورغزیري او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x - 4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضریبونو د پرتلې څخه لاس ته راځي، چې د x له مخه یعنې کین لور ته $(A+B)$

افاده باید پرته وي

$$7x-12 = (A+B)x \quad : \quad \text{او } (-4A-2B) \text{ ، چې } ۱۲ - \text{ ورکوي (وتون مساوات وگورئ) :}$$

$$(-4A-2B)$$

له دې څخه لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

$$7 = A + B$$

$$-12 = -4A - 2B$$

بدلون یې د A او B پسې : $A = (7-B)$

$$-12 = -4(7-B) - 2B$$

$$-12 = -28 + 4B - 2B + 28$$

$$+16 = 2B$$

$$B = 8$$

$$A = (7-8) = -1$$

لیکلی شو :

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx = \int \left[\frac{-1}{(x-2)} \right] dx = \int \left[\frac{8}{(x-4)} \right] dx$$

لومړني تابع جوړه کړی: $F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$. دا چې طبیعي لوگایتم فقط له مثبت اعدادو شمېرل کیږي، نو یواځې ازبنتونه نیسو.

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx = -1 \ln |x-2| + 8 \ln |x-4| + c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په پول راشنل تابع او اصلي مات راشنلمبع ټرټه شي. دا د ټوټه کسرونو ټوټه کوونې له لارې کيږي یا صورت نیسي. بیلگه :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)} \right] dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځایونو $x_1 = -2$ او $x_2 = +3$ کې په کښیزو فاکتورونو تجزیه کيږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کونې له پاره اصلي مخرج غزوو او بیا یې ضربوو :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)} \right] dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزیزې او بیا سره ضربیږي:

$$\frac{[A(x+3) + B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A + Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x + 3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضریبونو پرتلې کونې له امله، چې د x ترمخه یعنې کین لور ته له $(A+B)$ افادې څخه باید اوه لاس ته راشي او $(+3A-2B)$ او یا ورته ۱۲ (وتونمساوات وگورئ) :

$$-5x+9 = (A+B)x + (3A-2B)$$

لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

$$-5 = A + B$$

$$9 = 3A - 2B$$

د A او B پسي یې حل کړئ:

$$9 = 3(-5-B) - 2B$$

$$9 = -15 - 3B - 2B + 15$$

$$24 = -5B \quad | :(-5)$$

$$B = -4.8$$

$$A = (-5 + 4.8) = -0.2$$

نو لیکلی شو :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)} \right] dx = \int \left[\frac{-0.2}{(x-2)} \right] dx + \int \left[\frac{-4.8}{(x+6)} \right] dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

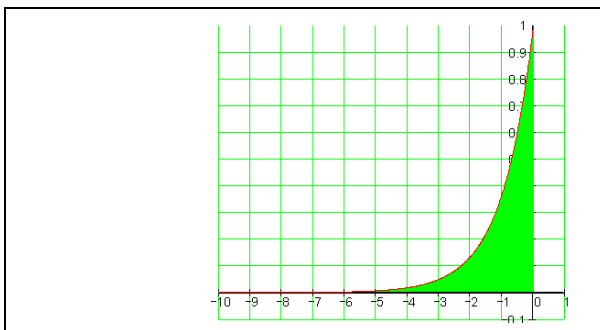
دا چې طبیعي لوگاریتم فقط له طبیعي اعدادو شمیرل کېدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نیسو.

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)} \right] dx = -0.2 \ln |x-2| - 4.8 \ln |x+3| + C$$

ناپايي (مبهم) انتیگرال

تعریف : که په یوه ټاکلي انتیگرال کې لږ تر لږه یو حد د مثبت یا منفي ناپايي لور ته لاړشي یا د انتیگرال ساحه ناپايي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپايي انتیگرال څخه غږیږو. په یوه مناسب ډول ناپا انتیگرال د عادي انتیگرال د حد په څېر تعریفیږي. په دې توګه په زړه پورې پوهېدنې لاس ته راځي د بېلګې په توګه، چې څنګه د منفي تواند پوښتنې د ګراف لاندې ناپايي ته رسېدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \quad \text{او} \quad \int_1^{\infty} x^{-2} dx = 1$$



هم او د دې معکوس انتیګرالونه

$$\int_1^{\infty} x^{-1} dx$$

$$\int_0^1 x^{-1} dx$$

ناپايي ته ځي یا له ټولو حدونو اوږي

یعنې د ناپای په لور ځي..

د $f(x) = e^x$ ګراف او x -محور ترمنځ دې په انټروال $(-\infty; 0]$ کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعنې

$$A = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیگرال د پورته همداسې کښته (لاندې) پولي عددونه وو. د انتیگرالوني ورشو یا ساحه محدود وه. په دې حالت کې یا اوس د انتیگرالولو ورشو محدوده نه ده، داسې انتیگرال یو نامحدود انتیگرال بولو، د انتیگرالوني نامحدودې ورشو سره. انتیگرالونه د دې لاندې څخه په یوې بڼې منځ ته راځي:

$\int_a^{\infty} f(x) dx$	$\int_{-\infty}^b f(x) dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

د دې انتیگرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انټروال $[a; b]$ له پاره انتیگرال $\int_a^b f(x) dx$ شمېرو، بیا پسي د ورته افادو $a \rightarrow -\infty$ یا $a \rightarrow \infty$ همداسې، $b \rightarrow -\infty$ یا $b \rightarrow \infty$ له پاره پولي جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^x f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx$$

زموږ د سطحې شمېرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^0 - e^a] = \underbrace{\lim_{a \rightarrow -\infty} e^0}_1 - \underbrace{\lim_{a \rightarrow -\infty} e^a}_0 = 1$$

بیلگه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x) = e^{-x}$ سره په انټروال $[0, \infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0; u(b) = -b$$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-b} e^u \frac{du}{-1} &= - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-b} e^u du = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-b} e^u du \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [e^u]_0^{-b} = \lim_{b \rightarrow \infty} [e^0 - e^{-b}] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^0 - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

بیلگه:

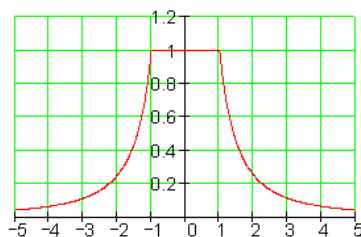
د یوه یوځای ایښول شوې یا یو ځای شوې تابع بېلگه لرو:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	د $x < -1$ لپاره
	د $-1 \leq x \leq 1$ لپاره
	د $x > 1$ لپاره

.

.

.



د انتیگرال په برخو وېشنه یا ټوټه کونه:
لاندې د انتیگرالونو تمعه دې و شمیرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx + \int_{-1}^1 dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

لومړنی اند یا تر مخه فکرکونه:

د تناظر دلایلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

داسې، چې دا انتیگرال باید فقط یوځل وشمیرل شي.

$$\int_{-1}^1 dx = [x]_{-1}^1 = [1] - [-1] = 1 + 1 = 2$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{b} \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{1} \right] = 0 - (-1) = 1$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx}_1 + \underbrace{\int_{-1}^1 dx}_2 + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx}_1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

ټولګه

د انتیگرال هندسي تعريف

لوریزه سطحه-د انتیگرال تعريف:که یوه f تابع ولرو، نو د x محور او تابع ترمنځ
سطحي شمېرل د انتیگرال له لارې کېږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لوري
ته سطحه مثبتې مخښېنه لري او د x محور کښته لوري ته سطحه منفي مخښېنه لري.

تحليلي تعريف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انټروال $[a, b]$ باندې تعريف
دی، نو د a څخه تر b پورې د تابع د انتیگرال څخه د x په محور د f د گراف او د
کرنې $x=a$ او $x=b$ تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

پېژند (تعریف) ۴. ۱ : لیمیت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\max \Delta x \rightarrow 0), \dots (4, 3)$$

که په اینتروال $[a, b]$ کې موجود وي، نو دا د $f(x)$ ټاکلی اینتیګرال بولو، یا F - Riemann (د ریمین سطحه). دلته a د اینتیګراله ونې لاندې (کېنټه) پوله او b د اینتیګرالونې پورته پوله بلل کېږي او $[a, b]$ د اینتیګرالونې اینتروال او $f(x)$ (Integrand) x (اینتیګرالېدونکی) او x د اینتیګرالونې (Integrationsvariable) متحول بلل کېږي

جمله ۴. ۱ : که $f(x)$ په $[a, b]$ کې اینتیګرالور وي او $c \in [a, b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

پېژند یا تعریف ۴. ۲ : په یوه بند انټروال $[a, b]$ کې اینتیګرالور دی، نو باور

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{لري:}$$

پېژند تعریف 3.2: تابع $y = f(x)$ دې په یوه واز اینتروال I کې تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقور $F(x)$ تابع چې $F'(x) = f(x)$ شرایط پوره کړي، د $f(x)$ (بنسټیز - ، ساده - یا لومړنی تابع بلل کېږي)

ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x) dx$ (لوسټل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږود او د b تر منځ او د f ګراف لاندې.

تعریف:

f په انټروال $a \leq x \leq b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنۍ تابع ده، نو ټاکلی

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad \text{انتیگرال دی:}$$

د $F(b) - F(a)$ لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتې سره ضرب: که تابع $f(x)$ په یوه اینټروال کې متمادي وي، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

جمله:

د جمعې (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه اینټروال کې نه پریکېدونکي وي، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

جمله:

د بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتین: د یوه ارزښت په ځای د هماغه ارزښت بله لویه ایښوول، لنډ: بدلون (د نیونو لاندې چې $u = g(x)$ متمادي او مشتق‌وړ دی او $y = f(u)$ متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

د ضربونو انتیگرالونه
که د دوه توابعو د ضرب انتیگرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمېرو، نو زیات وخت
دا ناشونی وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

بدلون Substitution

د ناټاکلي انتیگرال حل د بدلون له لارې (ننوتنه راځي)

تراوسه پورې مو فقط د انتیگرالونه او جملې حل کړي، چې د لومړنیو توابعو په
انتیگرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتیگرالونو د نورو انتیگرالولو حل
جملې راځوي. د لومړنۍ انتیگرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې
کې ګوته ورته نیول کیږي.

جمله ۲. ۶: د ،، بدلون (قاعده) ،، (Substitution لاتین: د یوه ارزښت په ځای د
همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چې $u = g(x)$ متماډي
اوو مشتقوردی او $y = f(u)$ متماډي، نو باور لري: (کتاب کتل که لاندی بی د
انتیگرال له نڅښې)

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل: د (۲۱. ۱۳) د بني اړخ مشتق د ځنځیرقاعدي (جمله ۲. ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx} \int f(u) du = \frac{d}{du} \int f(u) du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کین اړخ د رابیلیدنی سره سره خوري (۲۱. ۱۳) قاعده د ضرب اینتگرالېدو
اینیگریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیری بلواک $f[g(x)]$ وي

او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سری د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځای په ځای کوي $u = g(x)$: جوړوي $du/dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x) dx$

د بريالي انتگرالېدو (اینټیگریشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راگرځول کیږي.

بیلگه ۲۱. ۳: a

$$I = \int 2\cos(2x-1) dx \quad \text{لرو}$$

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1 = u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u \, du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلگه ۲۱. ۳: b لرو: $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو: $2x = u-1$, کشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2) du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2} \int \cos u \, du = \frac{3}{2} \sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی ځنځیري تابع د لایني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینټیگرال کیدی شي، ځکه چی د لایني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د جملې ۲۱. ۴ سره سم د اینټیگرال تر مخ (موخه کین لور ده) لیکل کیږي.

بیلگه ۴.۲: لرو $I = \int \sqrt{-3x+5} \, dx$

بدلون: $-3x+5 = u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} \cdot \sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$\text{b) } I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \quad -2 = \frac{du}{dx} \quad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$\text{c) } I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x + 2 = u, \quad 1 = \frac{du}{dx} \quad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C.$$

بیلگه:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

$$F'(x) = e^x = f(x) \quad \text{څکه چې}$$

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C \quad \text{مګر:}$$

$$\text{څکه چې } F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x) \quad \text{که } F(x) = e^{2x} + C \quad \text{وی.}$$

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلگه: د $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیگرال ونیسئ

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

$$u(x) = 2x = u$$

بدلون:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

جوړ کړی:

$$\int f(x) dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

د بدلون برعکس:

$$\therefore F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

نو:

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x)$$

ازمایینت:

بیلگه:

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx = ?$$

وښایی چې

باور لري

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx = ?$$

$$u(x) = x+1 = u$$

بدلون:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$$

جوړ کړی:

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

$$u(x) = x^2 = u \quad \text{بدلون :}$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du \quad \text{جوړوو:}$$

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln(u) du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln(u) - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C$$

$$: \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C \quad \text{بهرته بدلون:}$$

$$\int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C}} \quad \text{نولرو:}$$

د ټاکلو انتیگرالونو حل د بدلون له لارې

ټاکلي انتیگرالونه هم د بدلون له لارې حل کېږي.

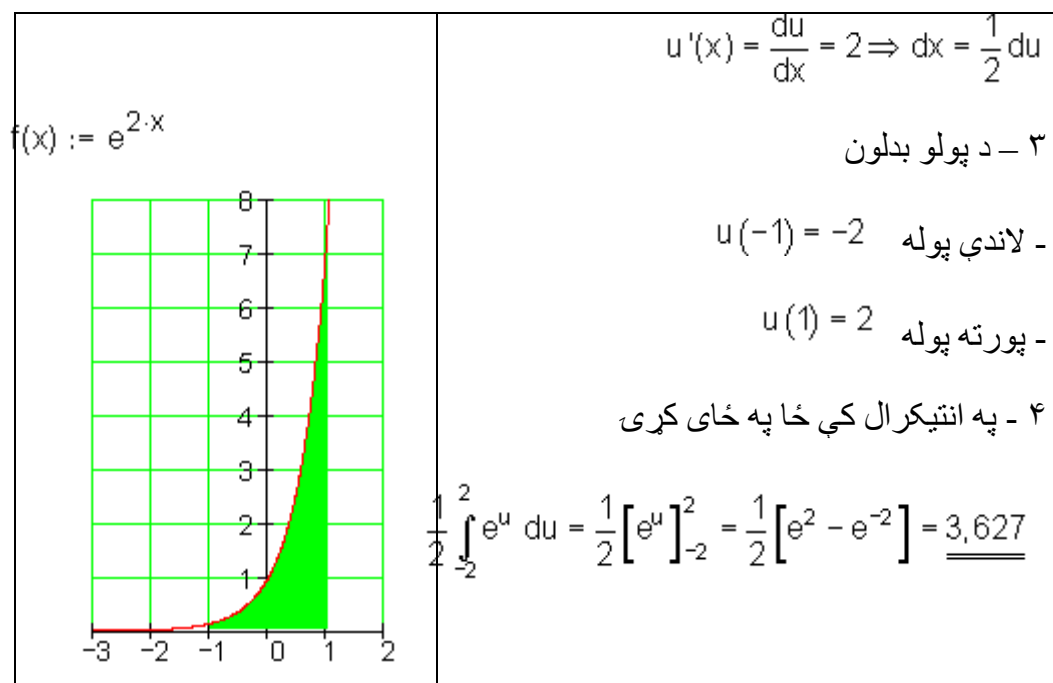
بیلگه :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^1 e^{2x} dx$$

د انتیگرال حل د بدلون له لارې:

$$u(x) = 2x \quad \text{۱ - بدلون}$$

$$۲ - \text{د } dx \text{ په ځای کېږدی}$$



بیلگه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتیگرال حل د بدلون له لارې

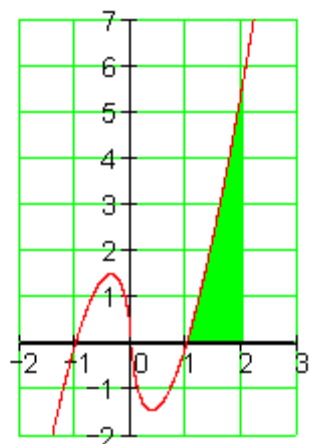
$$u(x) = x^2 \quad ۱ - \text{بدلون}$$

$$۲ - \text{د } \quad \text{ځای په ځای کونه}$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

$$۳ - \text{د پولې بدلون}$$

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^x 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتیگرال حل د بدلون له لارې

$$u(x) = x^2 \quad ۱ - \text{بدلون}$$

۲ - د خای په خای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ - د پولې بدلون

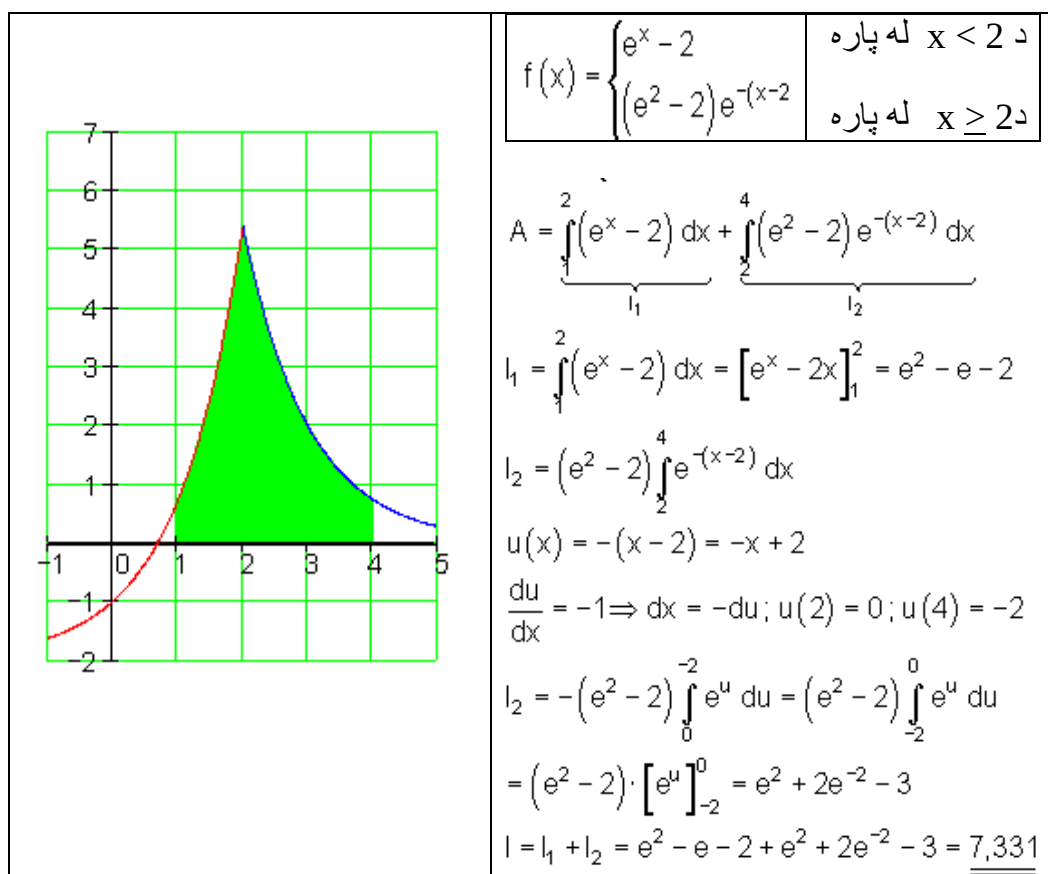
$$u(1) = 1 \quad - \text{لاندې پوله}$$

$$u(2) = 4 \quad - \text{پورته پوله}$$

۴ - په انتیگرال کې خای په خایکړۍ

$$\begin{aligned} \int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du &= \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4 \\ &= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}} \end{aligned}$$

بیلگه :



جمله ۲. ۶:

د ،، بدلون،، (Substitution) لاتین: د یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه ایښوول، لنډ: بدلون (قاعدې: د نیونو لاندې چې $u = g(x)$ متمادي (نه پریکړدونکی) او د مشتق قابلیت لري او $y = f(u)$ متمادي دی، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل: د (۲. ۱۳) د بنی اړخ مشتق د ځنځیر قاعدې (جمله ۲. ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx} \int f(u) du = \frac{d}{du} \int f(u) du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کین اړخ د رابیلیدنی سره سره خوري (۲۱. ۱۳) قاعده د ضرب اینتگرالېدو) اینتگریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیري بلواک $f[g(x)]$ وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سری د دننه تابع لپاره متحولي یا واریابل بدلوي یا ځای په ځای کوي $u = g(x)$: جوړوي $du/dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x) dx$

د بريالي اینتگرالېدو (اینتیکریشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راگرځول کيږي.

بیلگه ۲۱. ۳) a : لرو $I = \int 2\cos(2x-1) dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلگه ۲۱. ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, کشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2) du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2} \int \cos u du = \frac{3}{2} \sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی ځنځیري تابع د لایني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیکرال کیدی شي، ځکه چی د لایني تابع مشتق ثابت دی او ثابت فاکتور د **جملی ۲. ۴** سره سم د اینتیکرال تر مخ (موخه کین لور ده) لیکل کيږي.

د بنسټیزو اینتیکرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱. ۱ (متحولي x یواځي په جگ یا مټ د دوه منځ ته راځي. له دې امله داسی اینتیکرال، کومو کی چی د x^2 په ځای لایني ترم

Term (پروت دی، کیدی شي چی د لایني بدلولو له لارې په بنسټیز اینتیگرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته وارول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیا موجود وي، چی د اینتیگراند فورم ته راشو.

بیلگه 5.2:

$$a) \quad I = \int \frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2 = (\sqrt{2}x)^2, \quad d \cdot h \cdot I = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x = u, \quad \sqrt{2} = \frac{du}{dx} \quad dx = \frac{1}{\sqrt{2}} du,$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan} u + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x) + C.$$

$$b) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2 = 9(1-4x^2) = 9(1-(2x)^2), \quad d \cdot h \cdot$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x = u, \quad 2 = \frac{du}{dx} \quad dx = \frac{1}{2} du$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6} \operatorname{Arcsin} u + C = \frac{1}{6} \operatorname{Arcsin}(2x) + C.$$

اینټیگریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینټیگراند دوم فاکتور (تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سری بنسټیز اینټیگرال ته راشي. دلته هم سری بیا دنننی تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلگه 6.21: الف: $I = 4x\sqrt{x^2 - 1} \, dx$

بدلون: د $x^2 - 1 = u$ مشتق $2x = du/dx$ دی، همداسې لرو: $x dx = \frac{1}{2} du$

$$I = \int 4\sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = 2 \int u^{1/2} du = 2 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{4}{3} \sqrt{(x^2 - 1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x \, dx = du$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x$$

c) $I = \int \frac{1}{x} \cdot \ln^2 x \, dx$

$$\ln x = u, \quad \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \quad \frac{1}{x} dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \ln^3 x + C$$

d) $I = \int \tan x \, dx.$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d \cdot h. \quad I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \, dx,$$

$$\cos x = u, \quad -\sin x = \frac{du}{dx} \quad \sin x \, dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

e) $I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3} dx.$

$$2 - x^3 = u, \quad -3x^2 = \frac{du}{dx} \quad x^2 dx = -\frac{1}{3} du,$$

$$I = -\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{2du}{u} = -\frac{2}{3} \ln|u| \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} \ln|2-x^3| \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} (\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3} \ln 2.$$

۲۱ د بدلونقاعده (۲۱ . ۱۳) دې په چپه (يعني د بنی وکین) لور هم استعمال شي .
 اینتېگرال $\int f(x) dx$ کیدی شي چې په بل وارول شي چې x په یو مناسب بلواک ($g(t)$ بدل شي (21 . 14)
 $\int f(x) dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t) dt$. دا:
 افاده « مناسب » بلواک دې دلته داسي وپوهیدی شي چې سری د بدلون وروسته یو ساده او ممکن یو بنسټیز اینتېگرال لاس ته راوړي. د (۲۱ . ۱۴) استعمال په قاعده کی داسی دی چې په یوه بلواک $f(x)$ کی موجود « پیچلی » ترم $h(x)$ د $t = h(x)$ په بدلون له منځ څخه وړي او بیا (که ممکن وي) د x په لوری حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بیلگه 7.21: الف: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ a)

$$\sqrt{x-1} = t, \quad x; x = (t+1)^2, \quad dx = 2(t+1)dt :$$

$$I = \int \frac{2(t+1)}{t} dt = 2 \cdot \left[\int 1 dt + \int \frac{1}{t} dt \right] = 2(t + \ln|t|) + C = 2(\sqrt{x-1}) + 2 \ln|\sqrt{x-1}| + C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اینتېگرال د دوه ایتکړالو جمعي ته بیایي، دلته

$$x = g(t) = (t+1)^2 \text{ و.و.}$$

$$b) I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$$

$$\sin x \cdot \cos^3 x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^4 x = \tan x \cdot \cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I = \int \frac{dx}{\tan x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx,$$

$$\tan x = t, \quad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt,$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot \sqrt{\tan x} + C.$$

مور د دې لاندې انتیگرال نیسو:

$$\int x \cos(x) dx$$

ږدو $u = x$ ، نو لرو: $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x) dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې تړگه مخ ته خو:

$$\begin{aligned} \int x \cos(x) dx &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx \\ &= x \sin(x) + \cos(x) + C. \end{aligned}$$

:

C د انتیگرالونې یوه په خوښه ثابتې ده

انتیگرالوونې **Integrand** د x توان یا e^x سره

د ټوټه انتیگرالونې د استعمال سره د انتیگرالونو لکه

$$\int x^2 e^x dx \text{ او } \int x^3 \sin(x) dx$$

کېده شي په مدي لا حل شي:

يوه په زړه پوري پلگه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) dx$$

که په پوره سختوالي ونيسو ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړين نه دی، چې دا دي حل ولي.

دا بېلگه د دوه واره توتېه انتیگرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x) dx$

$dv = e^x dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیگرال حل شي، نو د توتېه انتیگرالونې قاعده بيا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$$u = \sin(x); du = \cos(x) dx$$

$$v = e^x; dv = e^x dx$$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx.$$

که فکر وکړو، نو د پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیگرال لرو (بې له مخ نڅېښې)، نو د ښي لور انتیگرال که کین لور ته یوسو، لاس ته ترې راځي:

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیگرالونې یوه په خوښه ثابتې ده

د اینتیگرال شمیرنې استعمال

د سطحو مساحت، چې د $f(x)$ د گراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په څلورم څپرکي کې وویل شو چې ټاکلی اینتیگرال $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$

سطحي مساحت A ښايي، چې له منحنی $y=f(x)$ ، د $-x$ محور $y=0$ او د کرښې $x=a$ او $x=b$ له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي یو چې $y=f(x)$ د اینتیگرال اینتروال په دننه کې د $-x$ محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدای شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

فعالیت:

--د یوې په خوبه تابع د منحنی یا کرني او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحی شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.

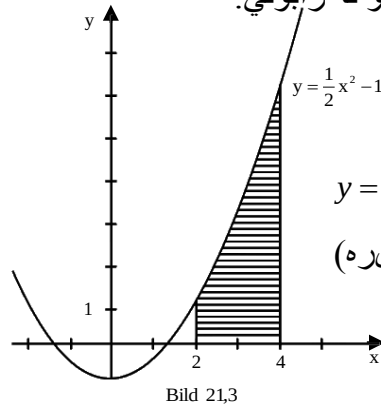
- دا هم د شمیرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحنی یا د تابع کرنيه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوبه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکړئ او د تابع انتیگرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمیرئ.

- یوه په خوبه تابع ولیکئ، چې د انټروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم وکړئ او دا تابع به کومه منحنی ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د منحنی په ورکولو کې دا بیا وڅیړئ، چې ولې؟

یادونه: که موږ د سطحی مساحت شمیرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحی واحد (یون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.

دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلگو ته رابولي:



بیلگه ۵. ۱:

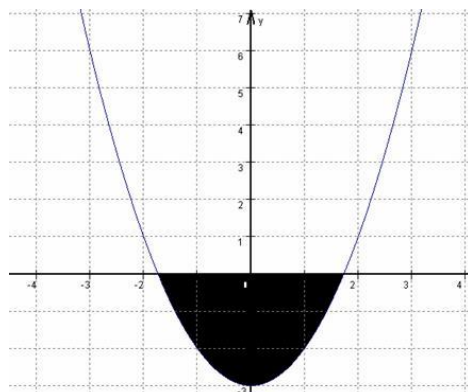
د سطحی مساحت

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 1, \quad y = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی (مخامخ څپره)

$$\begin{aligned} A &= \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1 \right) dx = \left(\frac{1}{6}x^3 - x \right) \Big|_2^4 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 64 - 4 - \frac{1}{6} \cdot 8 + 2 \\ &= \frac{22}{3} \end{aligned}$$

که د تابع $y=f(x)$ سطحی د منحنی تلنه د $-x$ محور لاندې لور ته وي، نو دا ټاکلی اینتیگرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحی تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیگرال مطلقه ارزښت نیسو یعنې منفي اینتیگرال.



بېلګه ۵. ۲ :

د $f(x) = x^2 - 3$ ګراف د x

محور سره یوه

سطحه رابندويي د ګراف او

x محور ترمنځ

د ټولې سطحې مساحت

و شمېری.

تګلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کارو.

۲ - د دې لپاره چې د انتیګرال حدونه لاس ته اړوړی شو، باید صفر ځایونه و شمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ - اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیګرال لیکو.

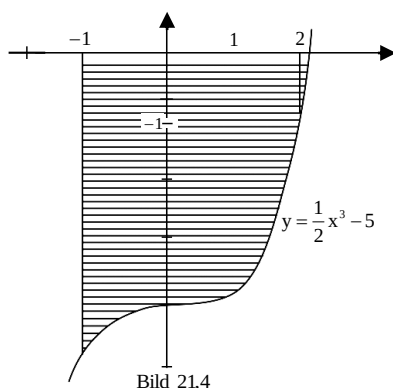
د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پورې انتیګرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2) dx - 3 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} 1 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} - 3x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} = |-2 \cdot \sqrt{3}|$$

$$A = 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}$$

بېلګه:

د سطحی مساحت د $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$, $y = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ ترمنځ دی: (لاندې څیره)



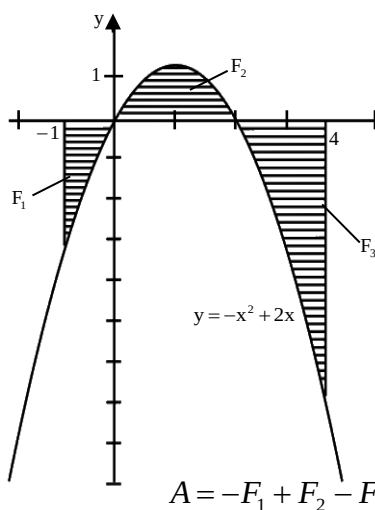
$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 5 \right) dx \right| \\
 &= - \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 5 \right) dx \\
 &= \left(-\frac{1}{8}x^4 + 5x \right) \Big|_{-1}^2 \\
 &= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8}
 \end{aligned}$$

بیلگه:

د لاندې پولو $x_1 = -1$ تر

$x_2 = 4$ او د منحنی $y = -x^2 + 2x$ او $y = 0$

ترمنځ د x -محور پورته او کښته پرته سطحه
(په مخامخ څیره کې نښانه شوې ده) دې
و شمیرل شي



حل : د تابع $y = -x^2 + 2x$ د $x_1 = 0$ د

صفر ځایونو $x_1 = 0$ او $x_2 = 2$ ترمنځ پرته

غوښتونکي سطحه د x -محور پورته، نوره

کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A = -F_1 + F_2 - F_3 = \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx - \int_2^4 (-x^2 + 2x) dx$$

$$= - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_{-1}^0 - 1 \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^2 + 2 \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_2^4 = \frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x = -1$ تر $x = 4$ او د کبري $y = -x^2 + 2x$

او $y = 0$ ترمنځ (د x - محور پورته او کښته)

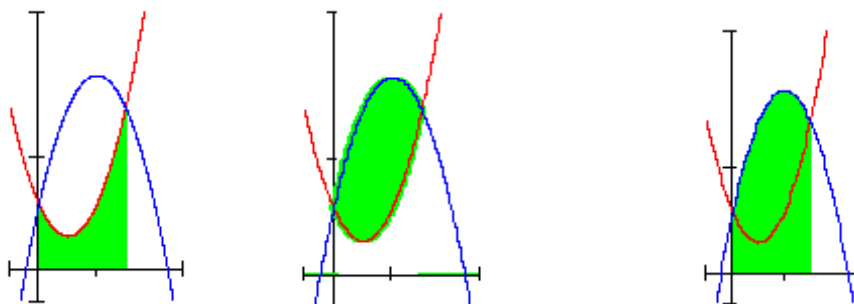
له دوه گرافونو څخه رابندي سطحې د مساحت شمېرنه:

ننوتنه د یوه ډنډ یا یوه بند څېره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټي چې له گډو پولو را بند وي.

فعالیت:

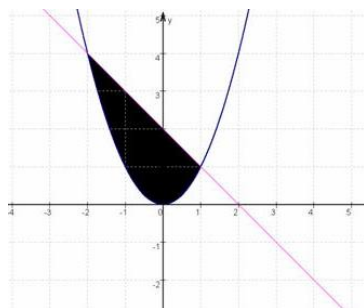
- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنگه وشمېرو؟

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کيږي، چې د دوه توابعو گرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینټیگرالونو د کمښت له لارې و شمیرل شي. که دواړه گرافونه د x -محور پورته لور ته پراته وي، نو د لاندې شیمای څخه مخ ته ځو:



د انتیگرال شمیرن ۸۶۷

$$A = A_1 - A_2$$



بیلگه ۵. ۵ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x + 2$ دوه
توابعو ترمنځ رابند د سطحي مساحت
غواړو وشمېرو:

د تگلارې لار: دلته هم یو شکل یا
گراف رسموو، چي دا حالت راته
روښانه شي.

۲ - د دې لپاره چي انتیگرال وشمېرو، د گرافونو د قاطع ټکي ټاکو.

$$x^2 = -x + 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

فرمول - P;q

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

۳ - په ساده توگه لیدل کیږي.

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

پس باور لري

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^{-2} (-x + 2)dx - \int_1^{-2} x^2 dx = \\
 &= -1 \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - 6 - \left(\frac{(-2)^3}{3} \right) - \frac{1}{3} \\
 &= -1,5 - 6 + + = -4,5 \\
 A &= 4,5
 \end{aligned}$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د $a < x < b$ سره $f(x) > g(x)$ وي، دا په دې معنا چې د f گراف د a او b تر منځ د g پورته لور ته خُلي، نو د دواړو گرافونو په انټروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

بیلگه ۵ . ۶ :

د توابعو $f(x) = x^2 - 2x + 2$ او $g(x) = -x^2 + 4x + 2$ گرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیدا کړو. د دواړو گرافونو د x -ارزښتونو غوڅتکي (د تقاطع ټکي) د اینټیگرال حدونه جوړوي.

د غوڅتکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 0 \text{ او } x_2 = 3 \text{ د اینټیگرال لیمیتونه یا پولې دي.}$$

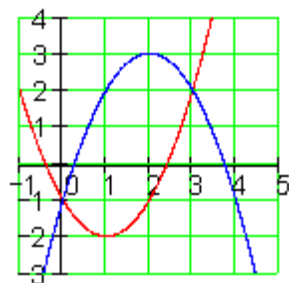
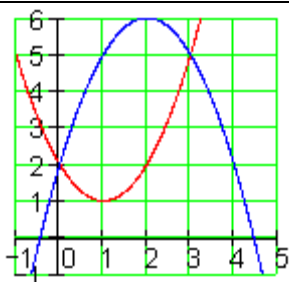
د اینتگرال جوړونه:

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 + 2 \cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x \right]_0^3 = -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه گرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي، نو له لوي ارزښت څخه کوچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x) dx - \int_0^3 f(x) dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$



لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د x - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ څیړو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنۍ بیلگه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د y -محور په درې واحدونو (یوونونو) کښته لور ته بیا یو او سطحې نوې شمیرو.

که د لید له مخې قضاوت وکړو، نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x —ارزښت غوڅتکي هم او له دې سره د انتیگرال حدونه به یې تغیره پاتیري.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

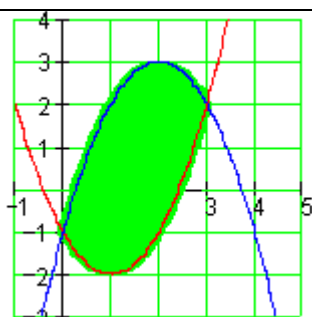
$$A = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx \quad \text{ځای په ځای کونه:}$$

$$\text{د } f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x \text{ سره کیري:}$$

$$A = \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx = \left[\frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي. دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A = \left| \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx \right| = \left| \left[\frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^3 \right| = \left| \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 \right| = |18 - 27| = |-9| = \underline{\underline{9}}$$



د دې متود ټولیزه ونه (عمومیت):

د دوه گرافونو ترمنځ سطحه:

که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحنی څخه رابنده وي، چې تابع $f(x)$ او تابع $g(x)$ پورې اړه ولري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمیرل کیري.

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

د انتیگرالونې حدونه a او b د x - محور د دواړو ګرافونو د وضعیه قېمتونو غوڅتګي دي

-- د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

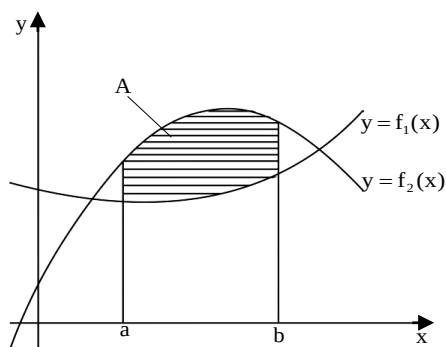


Bild 21,6

تر منځ پرته سطحې مساحت په لاندې پولو کې له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

اینټیګرال وړ او $f_1(x) < f_2(x)$

په $[a, b]$ اینټروال کې (ش ۱. ۶) داسې لاس ته راوړل کېږي چې دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحت کم کړئ.

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲. ۶ له دې خپلواک چې $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اینټروال $[a, b]$ کومه یوه مخنښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بیلګه ۵. ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$

حل: د اینټیګرال پولې (حدونه) د افقي (پراته) محور غوڅتګي (د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1=-x^2+1$$

$$2x^2=2$$

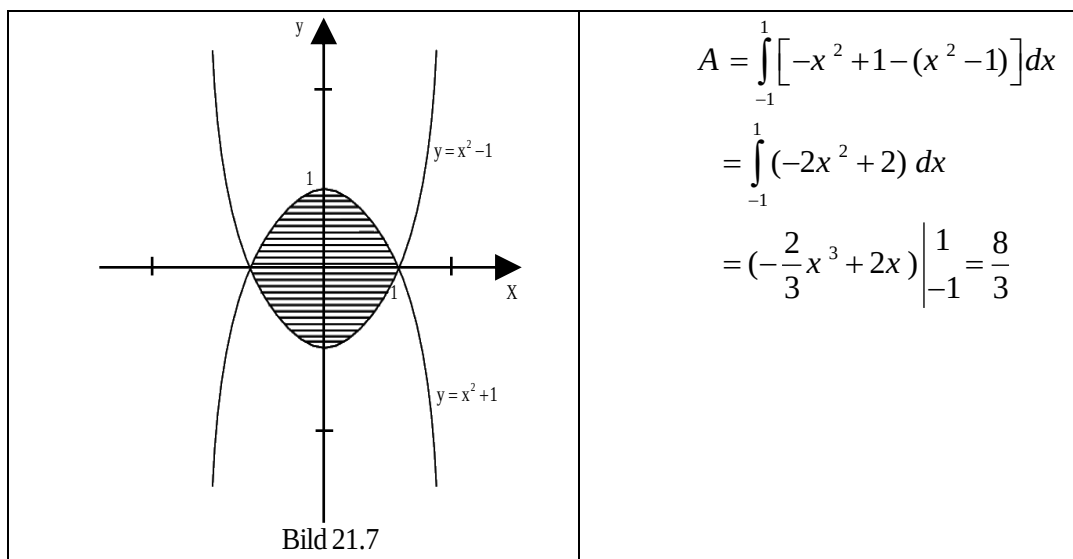
$$x^2=1$$

$$x_1 - a = 1, x_2 = b = -1$$

د اینټیګرلولو په اینټروال $[-1, 1]$ کې لرو $-x^2+1 > x^2-1$

(که چیرې په اینټروال $[a, b]$ او په (۲. ۱) کې $f_2(x) > f_1(x)$ په نظر کې ونه نیول

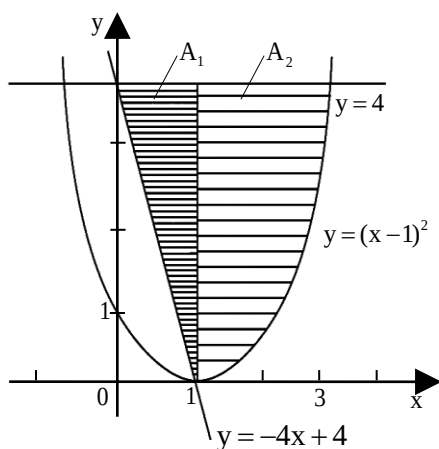
شي، نو د څرګند اینټیګرال به منفي شي او سړی (لکه د مخه چې ویل شوي) بیا د اینټیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:



بیلگه ۵ . ۸ :

د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ
سطحه شمیرل کیږي.

$$y = (x-1)^2, y = -4x+4, y = 4$$



حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه
سطحو A_1 او A_2 له یوځای کیدو څخه لاس
ته راځي.

A_1 د منحنیو $y = -4x+4$ او $y = 4$ ترمنځ
پروت دی. د اینتیگرال پولی (- حدونه) د لومړي

کواورینات (x -محور) غوڅتکی دی،
د $y = -4x+4$ او $y = 4$ ترمنځ.

لرو $4 = -4x+4$, $x_1 = 0$ په همدې ډول د

بني غوڅتکي لومړۍ وضعیه ارزښت (کواورینات)

د $y = -4x + 4$ او $y = (x-1)^2$ ترمنځ

$$-4x + 4 = (x-1)^2, x^2 + 2x - 3 = 0$$

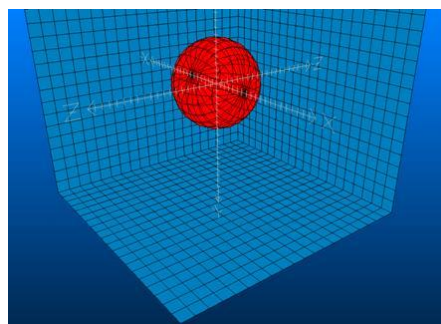
$$x_{2,3} = -1 \pm 2, x_3 = 1.$$

گورو چې A_2 د $y = -4$ او $y = (x-1)^2$ ترمنځ پرته ده، د اینټیگرال حدونه (پولی) $x_1 = 1$ او د لومړي وضعیه قیامت د بني غوڅتکي د $y = 4$ او $y = (x-1)^2$.

غوښتونې سطحه داسې ده:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^1 [4 - (-4x + 4)] dx + \int_0^1 [4 - (x-1)^2] dx \\ &= \int_0^1 4x dx + \int_0^1 (-x^2 + 2x + 3) dx = 2x^2 \Big|_0^1 + (1/3x^3 + x + 3x) \Big|_0^1 = 7\frac{1}{3} \end{aligned}$$

د څرخیدونکو بدنونو (جسمونو) ډکي (حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توگه د مستطیل حجم ولیکئ.

- د کړي، استواني او د مخروط حجمونه، چې تراوسه مو لوستلي و لیکي.

یادونه: دا دې تل په پام کې ونیول شي: که د انتیگرال شمیرني له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د یوه جسم حجم ښایي. موږ ددې لپاره لیکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخ د دونکي تنونه:

څرخي د دونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په یوه څرخي د دونکي محور باندې د یوې کرښې یا منحنې څرخي د نې له لارې منځ ته راځي. کرښه یا منحنې په یوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحنې محور نه غوڅوي، او یا زیات له زیاته یې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلگې به یې په لاندې کې و څیړل شي.

د x په محور څرخېدنه (څرخون)

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیگرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د یوه څرخي د دونکي جسم (بدن یا تن) حجم (دکې)

د یوه څرخي د دونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخي د نې د x په محور په انټروال $[a, b]$ کې د f تابع له گراف، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمیرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

د y په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخي د نې (د y په محور)، چې په $[a, b]$ انټروال د f تابع گراف $y = f(x)$ محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د

بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته. دا شتون لري، که f متمدادي او غښتلي یو غریز وي. که نه (لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي، چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمدادي او غښتلي یو غریز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمیرل کيږي او سره جمعه کيږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} (f^{-1}(y))^2 dy$$

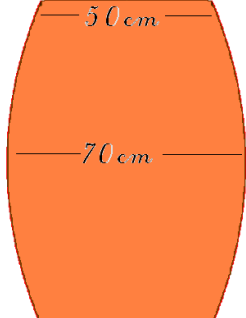
که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

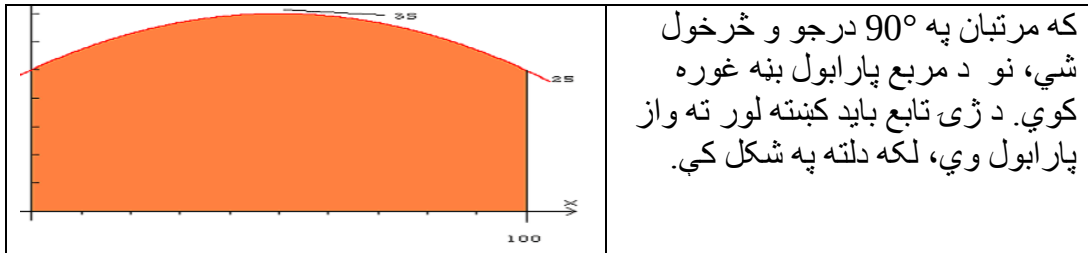
$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| dx$$

د f' مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ (min/max) (توابع یو مثبت انتیګرال تضمینوي).

د سطحې په څرخولو (د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f(x))^2 dx$$

	د یوه مرتبان حجم: د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جګوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنتي متره په پای او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.



حل: د پارابول د تابع لیکبڼه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

ټولیز باور لري:

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5 \text{ (dm)}$$

په څرگند دول 5- د راس راکښنه د $x+$ په لور ورکوي او 3,5 د $y+$ په لور. د غزوني ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کړدو، کېدی شي a وشمیرل شي. دا ټکی $(0/2,5)$ دی.

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5$$

$$-a \cdot (0-5)^2 + 3.5 \quad \text{د } x \text{ ارزښت } x \text{ ا په } x \text{ کونونو لرو}$$

$$\frac{2.5-3.5}{25} = -0.04 \quad \text{له دې } a \text{ دی:}$$

$$f(x) = -0.04 \cdot (x-5)^2 + 3.5 \quad \text{او مساوات پوره بلل کيږي.}$$

د ساده والي لپاره د راس ټکي فرمول په نورمال یا عمودي فورم بدلوو:

$$f(x) = -0.04x^2 + 0.4x + 2.5$$

$$f(x) = (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 \quad \text{تابع مربع کړی}$$

$$f(x) = 0.0016x^2 - 0.032x^3 - 0.04x^2 + 2x + 6.25 \quad \text{نو دی}$$

لومړنۍ تابع

$$f(x) = \frac{0.0016x^2}{5} \cdot x^5 - \frac{0.032x^3}{4} \cdot \frac{-0.04x^2}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x$$

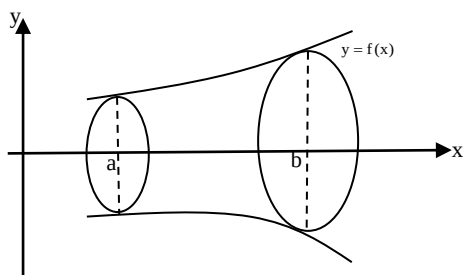
د حجم شمېرلو لپاره ټاکلی انتیگرال دی؛

$$\begin{aligned} \pi \cdot \int_0^{10} (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 dx &= \pi \cdot \int_0^{10} (-0.0016x^2 - 0.032x^3 - 2x + 6.25) dx \\ &= \pi \left[\frac{0.0016}{5} \cdot 10^5 - \frac{0.032}{4} \cdot x^4 - \frac{0.04}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \right]_0^{10} \\ &= \pi \left[32 - 80 - 13\frac{1}{3} + 100 + 62.5 \right]_0^{10} \\ &= \pi \cdot 101.167 \end{aligned}$$

د حجم واحدونه (یوونونه)

دا چې موږ له پیل په دیخیمتر شمېرنه کړې، نو طبعاً دا په لیتر شمېرل کېږي.

$$= 317.824 \text{ liter}$$

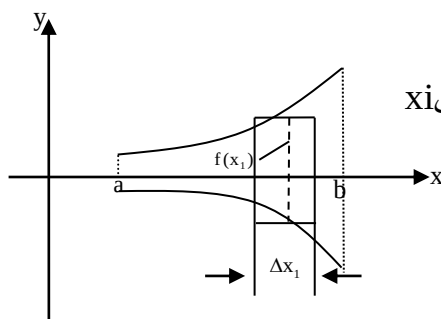


د تابع $y=f(x), y=0, x=a, x=b$ ترمنځ
سطحه چې د x -محور باندې څرخي (ش ۵ . ۹).
دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوي
یا- راغلي د څرخیدونکي بدن ډکۍ (حجم) دی.

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵. ۸) د څرخیدونکي بدن ډکۍ (حجم):
په اینتروال $[a, b]$ کې د $y=f(x)$ متماذي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چې د سطحو
 $y=f(x), y=0, x=a, x=b$ ترمنځ، راپیدا کړي داسې دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



ښونه: V د توتو (استوانو) د جمعي له
لارې چې وړانګه یې $f(x_i)$ ، جگوالی یې x_i
د $i=1, 2, 3, \dots, n$ لپاره لری.

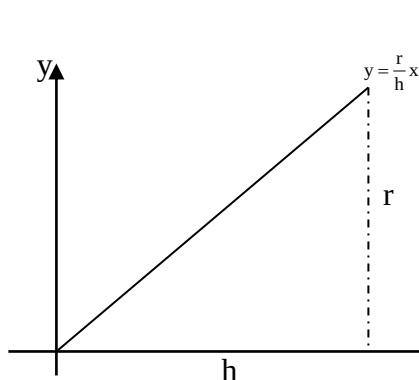
(ش: ۵. ۱۰) د i -مې توتي
(سلیندر ډکۍ) (حجم) دی.

$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سلیندرونو یا توتو زیاتون

$$V_n = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه ($n \rightarrow \infty, x_i \rightarrow 0$) د بنسټ اینتیګرال د تعریف سره سم



$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

حجم (ډکۍ) راکوي.

بیلګه ۵. ۹) د مخروط یا کیګل ډکۍ

(حجم) د $y = \frac{r}{h}x$ کرښې (د سرچینې

تیره کرښه د $\frac{r}{h}$ جگوالي سره) او د x -محور

($y=0$) د حدونو $x=0$ تر $x=h$

پورې (ش. ۱۱)

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h} x \right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

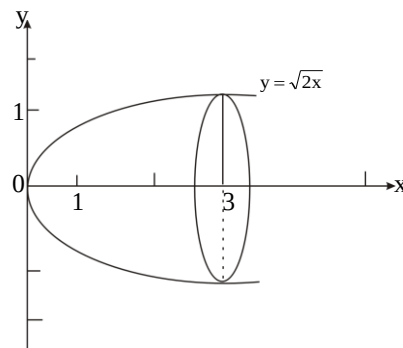
دا له بنسټیزې شمېرنې (د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلگه ۵. ۱۰:

$$y = \sqrt{2x}, y = 0, x = 0, x = 3 \text{ د}$$

ترمنځ د x -محور باندې څرخېدلو جوړ (تولید) شوی جسم څرخېدلی پارابولویډ دی (څ
۵ پ ۱۲)

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x} \right]^2 dx \\ &= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx \\ &= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = 9\pi. \end{aligned}$$



د ارشمیدس جملہ Archimedischer Satz

د توتې، غونډارې (کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

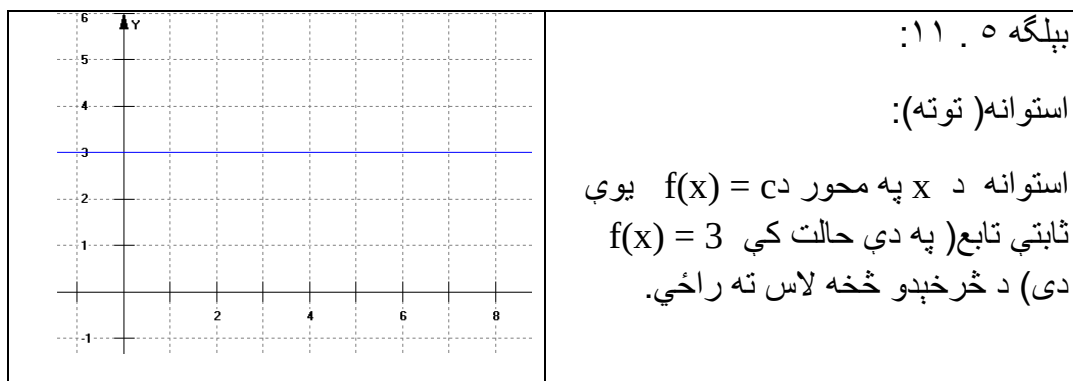
$$V_{\text{توته (استوتنه)}} : V_{\text{غونډارې (کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

د ۱۸۸۶ زک یوه درسي کتاب څخه



د پورته الماني پښتو: اربنیمېډس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب یې ومونده، له دې امله دا دلته راغلي جمله د اربنیمېډس جلي په نامه نومول شوي.

د څرخېدونکي بدن (حسم) حجم.



د یوې استواني حجم (ډکې) شمېرنه:

اوس دې په $[0;5]$ انټروال کې د توتي حجم وشمېرل شي. د استواني د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. د هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څپرني لاندې ونیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو، چې د هغې لارې د انتیگرال په مرسته حجم وشمېرلای شو. د سطحې مساحت د لاندې انتیگرال په مرسته وشمېرل شو:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x) dx$$

که د دې ناپايي ډبرو مستطیلونو (د $f(x)$ د مربع مساحت او د صفر په لور ځغېلېدونکې پنډوالي dx سره) انتیگرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

دا په دې معنا چې دا انتیگرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتنۍ فرمول څخه دد یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راځوي:

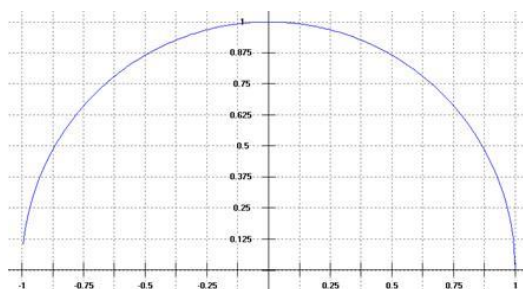
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

د دې ورکړ شوي استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^5 [9(x)]^2 dx = \pi \int_0^5 [45 - 0] dx = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډاری یا غنډوسکه(توپ)):



د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخېدنی څخه غونډاری یا کره منځ ته راځي (پورته د ننوتني شکل).

دا تابع هم کېدی شي په گردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع یې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیگرالولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

په دې بېلگه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځای څخه و صفر ځای ته د x په محور باندې

د $f(x) = \sqrt{1^2 - x^2}$ تابع څرخېدنو له لارې منځ ته راځي، یعنې په انټروال $[-1;1]$ کې.

$$\pi \int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx = \pi \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right] = \pi \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi$$

Kegel (Geometrie) مخروط

دا هم ممکن ده، چې یو مخروط د

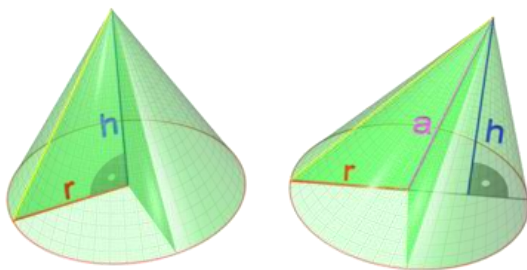
یوه منظم n زاویو

(اړخیزې) (کونجیز) څخه رابندې

بنسټیزې سطحې (د n لپاره چې ناپا

ي ته ځي) اهرام ته ور نژدې کړو.

د مخروط حجم:



د انتیگرال په مرسته د یوه مستقیم

مخروط د حجم د شمېرلو یوه بله

مرستندویه لار. یو د کارتیزې

وضعیه ارزښت (قیمت) سیستم په کار اچول کېږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په

سرچینه $(0|0)$ او منځ ټکی په ټکي $(h|0)$ کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنیو توتو (استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونيسو، چې جگوالی (پندوالی) يې dx دی. داچې د داسې يوې توتې يا استواني گردې توتې (کترې) واټن د مخروط له څوکي د وضعيه قیمت سیستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانگي جملې له مخې (دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې) باور لري.

د يوه ناپاي کوچنی توتې (استواني) وړانگه:

$$r z(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د يوې ناپاي کوچنی توتې (استوتې) حجم:

$$\left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx$$

د ټول څرخېدونې مخروط د ټولو داسې کوچنیو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره يې ټاکلی انتیگرال جوړوو، د انتیگرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

یو مخروط د x په محور د $f(x) = mx$ یوې کرښیزې (خطي) تابع (د بېلگې په توګه $f(x) = 0,5x$) څرخېدنه (څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولای چې لومړی د کوارډ حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کترو کول دي د dx پنډوالي سره. د دې کترو د سطحو مساحت وشمېری، چې وړانګه $f(x)$ لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بیا یې انتیګرال په ورکړ شوي $[0;5]$ انټروال کې ونیسی.

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \left[\frac{1}{12} x^3 \right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلي لپاره دی د یوه مخروط د حجم معیاري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 32.72$$

لنډ:

که یوه منحنی د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي $\square x$ همداسې $\square y$ سره او دا په ورته نږدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نږدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad \text{د } x \text{ په محور څرخونه:}$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy \quad \text{د } y \text{ په محور څرخونه:}$$

بېلګه ۵. ۱۲:

د $y = x^2/4$ تابع گراف په $[0, 2]$ انټروال کې د وضعیه قیمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

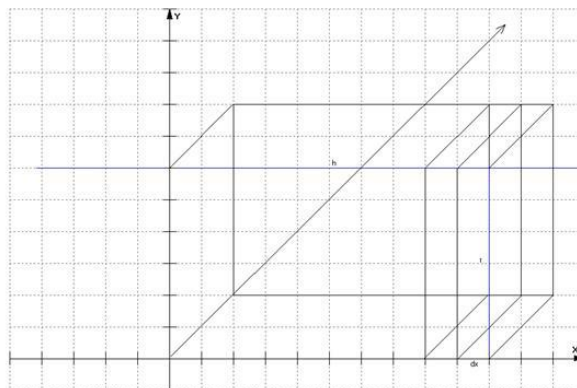
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم حجم.

شپر اړخیز جسم یا مکعبډوله - 2.1 Quader



دا لید شکل د استوانې څخه راته معلوم دی، فقط دا حل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوارډ په څېر وشمیرل شي ($V = r^2h$) او یا د صفر په لور تلونکي dx سروري مربع وي توتیه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمیرل شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیگرال ونیول شي.

په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x) dx$

په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژۍ تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

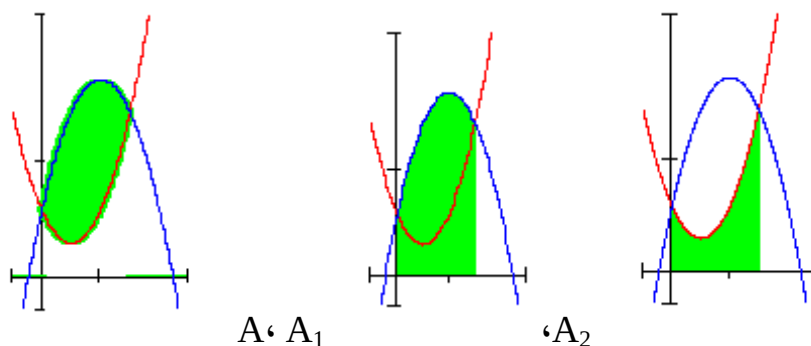
که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انټروال کې د پروتقاطع تابع سره انټیګرال کړو،

$$\int_0^5 q(x) dx = [9x]_0^5 = 45 \text{ لاس ته راشي. } V = r^2 h = 45$$

ټولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحنی تلنه د $-x$ محور لاندې لور ته وي، نو دا ټاکلی اینټیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینټیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعنې منفي اینټیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کېږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدای شي د ټاکلو اینټیګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د $-x$ محور پورته لور ته پراته وي، نو د لاندې شیمای څخه مخ ته ځو:



$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرته سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انټروال $[a,b]$ کې د f تابع له گراف، د x له محور او له دواړو کرښو $x=a$ او $x=b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په $[a,b]$ انټروال د f تابع گراف د $y=f(x)$ محور او د دواړو کرښو $y=f(a)$ او $y=f(b)$ له خوا رابند وي باید د $x=f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته. دا شتون لري، که f مټمادي او غښتلي یو غږیز وي. که نه (لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي، چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې مټمادي او غښتلی یو غږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کېږي او سره جمعه کېږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} (f^{-1}(y))^2 dy$$

جمله ۵. ۸) د څرخیدونکي بدن ډکۍ (حجم):

په اینټروال $[a,b]$ کې د $y=f(x)$ مټمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چې د سطحو $y=f(x)$ ، $y=0$ ، $x=a$ ، $x=b$ ترمنځ، راپیدا کېږي داسې دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

د توتې، غونډاري (کړې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$$V_{\text{توتې (استوتته)}} : V_{\text{غونډاري (کړه)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

یو مخروط د x په محور د $f(x) = mx$ یوې کرښیزې (خطي) تابع (د بېلگې په توګه $f(x) = 0,5x$) څرخېدنه (څرخون) ده.

که یوه منحنی د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کټرو یا زونونو ټوټه کوو، د پندوالي x همداسې y سره او دا په ورته نږدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نږدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad \text{د } x \text{ په محور څرخونه:}$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy \quad \text{د } y \text{ په محور څرخونه:}$$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخېدني څخه کره منځ ته راځي (پورته د ننوتني شکل).

دا تابع هم کېدی شي په گردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع یې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

تمرینونه
د بن

سټیز انتیګرال د جدول په کارونه یا استعمال لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

$$\text{a) } \int (x^3 - 5x^2 + 7x - 2) dx, \quad \text{b) } \int (2/x^3) dx, \quad \text{c) } \int (1/3)\sqrt[3]{x} dx$$

$$\text{d) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad \text{e) } \int \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} dx, \quad \text{f) } \int (\sqrt[3]{x^4} + 1) dx,$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{g)} \int \sqrt[3]{x^{-3}} \, dx, & \text{h)} \int \frac{ax^2 + bx + cx^{-1}}{x^4} \, dx, & \text{i)} \int 3 \cdot 2^x \, dx, \\
 \text{j)} \int \frac{1}{2 \sin^2 x} \, dx, & \text{k)} \int \frac{1}{3 + 3x^2} \, dx, & \text{l)} \int \cos \varphi \cdot s \, ds, \\
 \text{m)} \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, & \text{n)} \int \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} \, dt, & \text{o)} \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \, du.
 \end{array}$$

۱. ۲ - د بیرته په اګلي انتیګرال وروسته یې انتیګرال ونیسی

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2(1+x)^2} \, dx, & \text{b)} \int \frac{2 \sin 2x}{3 \cos x} \, dx, & \text{c)} \int \frac{7 \cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \, dx, \\
 \text{d)} \int \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 x} \, dx, & \text{e)} \int (-2 - 2 \tan^2 x) \, dx, & \text{f)} \int \frac{2t^3 - 8t}{(t-2)(t+2)} \, dt.
 \end{array}$$

۳ - لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیری

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \int_0^1 \frac{1}{2} e^x \, dx, & \text{b)} \int_{\pi}^{2\pi} \cos x \, dx, & \text{c)} \int_2^3 2 \, dt, \\
 \text{d)} \int_0^{\pi} \cos \pi \sin x \, dx, & \text{e)} \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, & \text{f)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x} \, dx, \\
 \text{g)} \int_{x_1}^{x_2} (2x-1) \, dx, & \text{h)} \int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} \right) \, dx, & \text{i)} \int_{\ln 2}^{\ln 3} e \cdot e^t \, dt, \\
 \text{j)} \int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}} \, du, & \text{k)} \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}} \, dx, & \text{l)} \int_a^b a^x \, dx.
 \end{array}$$

۴ - د بدلون یا سبستچیشن له لارې یې انتیګرال وشمیری.

a) $\int \sqrt[3]{2x-7} \, dx,$

b) $\int \frac{dx}{-x+1},$

c) $\int 2^{3x+6} \, dx,$

d) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right) \, dx,$

e) $\int \frac{dx}{1+(x+1)^2},$

f) $\int \frac{4}{\cos^2(4t-5)} \, dt,$

g) $\int x \cdot \sqrt[3]{x^2-7} \, dx,$

h) $\int \frac{3x \, dx}{-x^2+1},$

i) $\int x \cdot e^{2x^2+3} \, dx,$

j) $\int 7 \cos^7 x \sin x \, dx,$

k) $\int (1-2 \sin x)^3 \cos x \, dx,$ l) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x} \, dx,$

m) $\int \cot t \, dt,$

n) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3} \, dx,$ o) $\int \frac{\text{Arc sin } u}{2 \cdot \sqrt{1-u^2}} \, du,$

p) $\int \frac{\sqrt{2 \ln x + 3}}{3x} \, dx,$

q) $\int e^x \cdot \cos e^x \, dx,$

r) $\int e^{\cos x} \cdot \sin x \, dx.$

۵. د تر زیرینو فورمیدلون وروسته او په بنسټیز اینټیګرال ۱۰ او ۱۱ د

بدلون له لارې یی اینټیګرال وشمیری،

a) $\int \frac{dx}{1+4x^2},$

b) $\int \frac{dx}{2+4x^2},$

c) $\int \frac{dx}{3+5x^2},$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$

g) $\int \frac{dx}{x^2-10x+34},$

h) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+30},$

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$

۶. لاندې ټاکلي اینټیګرالونه وشمیری.

a) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(4x-1)^3},$

b) $\int_{-1}^0 e^{3x} \, dx,$

c) $\int_0^2 2^{2x+1} \, dx,$

d) $\int_{-1}^1 \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5} \, dx,$

e) $\int_e^{e^3} \frac{1}{x} \ln x \, dx,$

f) $\int_2^4 \frac{e^t}{1+e^t} \, dt,$

g) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x} \cos x \, dx,$

h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2},$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos x \, dx.$

۷. د جملې ۲۱. ۸ استعمال په بنسټ یې (توتیه اینتېگرالونه) اینتېگرال کړی

- a) $\int 0.2x \cdot \sin x \, dx$, b) $\int 4x^3 \cdot \ln x \, dx$, c) $\int \cos^2 x \, dx$,
 d) $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int x \cdot (\cos x + 1) \, dx$,
 g) $\int x^3 \cdot e^x \, dx$, h) $\int \text{Arc sin } x \, dx$, i) $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln x \, dx$,
 j) $\int \text{Arc tan } x \, dx$.

لاندې ټاکلي انتیگرالونه وشمیری

- a) $\int_{-1}^1 x \cdot e^x \, dx$, b) $\int_1^2 \ln x \, dx$, c) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$,
 d) $\int_0^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int_0^{\pi} x^3 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int_0^{\pi} x^4 \cdot \sin x \, dx$.

د هغې هوارې دننه وشمیری، چې د وګړو مساواتو ګړو څخه رابنده شوې وي

- a) $y = e^{0.5x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;
 b) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;
 c) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $y = 9$, $x = -3$, $x = 3$;
 d) $y = \cos x$, $y = 0$.
 e) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;
 f) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$;
 g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;
 h) $y = x^3 + 7$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;
 i) $y = x^3 + 7$, $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$;
 j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$, $y = 3 - 4x$;

$$k) y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10;$$

$$l) y = \cos x, \quad y = \sin x;$$

$$m) y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8;$$

$$n) y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4+x^2};$$

$$o) y = x^2, \quad x = y^2;$$

$$p) y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3;$$

$$q) \quad y = 2\sin x, \quad y = \sqrt{3} \tan x, \quad x = [0, \pi/2)$$

$$f) \quad y = \tan x$$

کریښه چې په کې $y = \tan x$ پرتو تګو $(0,0)$ او $(\pi/4, 1)$ تیرېږي د x -محور باندې د ورکړ شوو مساواتو سره د ګڼو ترمنځ هواره څرخي د راپورته شوي څرخیدونکي بدن یا جسم ډکۍ یا حجم وشمیري. پام دې وي، چې په ورکړ شوي حالت کې ورکړ شوي هواره د دوه ګڼو څخه رابنده ده، نو له دې امله د لوي کېږي ډکۍ څخه د کوچنۍ کېږي ډکۍ کمېږي.

$$a) y = x^2, \quad y = 0, \quad x = h; \quad b) y = \sqrt[3]{x^2} + 1, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2$$

$$c) y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2; \quad d) y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$$

$$e) y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2x; \quad f) y = 4x - x^2, \quad y = 0;$$

$$g) y = \sin x, \quad y = 0, \quad x \in [0, \pi].$$

تراپخ (خلورګودی، چې ټيک دوه اړخونه یو غبرګ وي) د کونجونو

$(1,0), (5,0), (1,3), (5,5)$ د x -محور باندې څرخي، وشمیري

الف) د جوړې شوې هوارې دننه

ب) د څرخیدونکي بدن ډکي

د کپرو $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = -x + 6$ ترمنځ هواره د $-x$ محور

باندې څرخي، وشمیري.

الف) د کپري غوڅتکو د پروت محور سره

ب) د کپرو ترمنځ هواره

پ) د څرخیدونکي بدن ډکي

د هغه څرخیدونکي بدن ډکي وشمیري، کوم چی په اینتروال $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

کی د $-x$ محور پورته خواته د کپرو $y = \sin x$ او $y = \cos x$ ترمنځ

پرته هواره، چی د $-x$ محور باندې څرخيږي!

۱۴ نیمګړدی $y = \sqrt{9-x}$ د $-x$ محور باندې څرخيږي. د ګوډیبرخی ډکي

وشمیري د پولو $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ او ترمنځ!

۱۵ د څرخیدونکي ایلپسویډ ډکي څومره لوي دی، کوم چی د $-x$ محور

پورته خواته پرته د ایلپسی نیمي هوارې د رابندونکی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

کپري سره د $-x$ محور باندې تولیدوي؟

د څپرکي نور تمرینونه:

$$a) \frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x + 5}$$

$$b) \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2}$$

$$c) \frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x^3 + 1}$$

$$d) \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$e) \frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x - 2}$$

$$f) \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 + 2}$$

۱ - لاندې نااصلي پولینومونه دي د یوه ټول کسري پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعي په څېر ولیکل شي.

۲ - لاندې پولینومونه د جمعي په څېر ولیکئ

$$a) \frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$$

$$b) \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$$

$$c) \frac{4x + 10}{x^2 + 6x + 8}$$

$$d) \frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

$$e) \frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x}$$

$$f) \frac{14}{x^2 + 20x + 51}$$

۳ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$$a) \frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$$

$$b) \frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$$

$$c) \frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

$$d) -\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$$

۴ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$$a) \frac{x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$$

$$b) \frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4}$$

$$c) \frac{8x^2 - 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

$$d) \frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

۵ - د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$$a) \frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8}$$

$$b) \frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3}$$

$$c) \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1}$$

$$d) \frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$$

۶ - وښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنۍ تابع ده.

$$a) f(x) = 2x^2 + 4x - 7, \quad f(x) = 4x + 4$$

$$b) F(x) = (x^2 - x)^3, \quad f(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2$$

$$c) F(x) = \sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$d) F(x) = 1 + \sin x \quad , \quad f(x) = 3x \cdot \cos 3x$$

$$e) F(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x) = x^2 \cdot (\ln x - 1)$$

۷ - وښايي، چې د F او G توابع د هماغه f تابع لومړني توابع دي.

$$a) F(x) = x^3 + x + 4 \quad , \quad G(x) = x^3 + x + 1$$

$$b) F(x) = (x-3)^2 \quad , \quad G(x) = x^2 - 6x + 4$$

$$c) F(x) = \frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x) = \frac{3x+5}{x+2}$$

$$d) F(x) = 1 + \sin x \quad , \quad G(x) = \sin x$$

۱۳ - لاندې ناپاکلي انتیگرالونه پیدا کړئ او ټیکوالی یې و ازمایی.

$$a) \int x^3 dx \quad b) \int 7 dx \quad c) \int x dx \quad d) \int (1-x^2) dx$$

$$e) \int (x + \frac{1}{x}) dx \quad f) \int (e^x + \cos x) dx \quad g) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \quad h) \int \frac{5}{\cos^2 x} dx$$

$$i) \int u dx \quad k) \int (2 + e^x) dx \quad l) \int (1 + \ln x) dx \quad m) \int (\sqrt{x} + \sin) dx$$

۱۴ - د لاندې ټاکلو انتیگرالونو ارزښت وشمېرئ

$$a) \int_0^3 4 dx$$

$$b) \int_{-3}^{-1} x dx$$

$$c) \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$d) \int_1^e (2 + \frac{1}{x}) dx$$

$$e) \int_{-1}^0 e^x dx$$

$$f) \int_0^\pi \sin x dx$$

$$g) \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4 dx$$

$$h) \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$i) \int_{-2}^2 x^3 dx$$

$$j) \int_2^6 (1+x) dx$$

$$k) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx$$

$$l) 0 \int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}) dx$$

۱۷ د لاندې ټاکلو انتیگرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه یې سره پرتله کوئ.

$$\begin{array}{ll} a) \int_{-3}^1 3x \, dx - \int_{-3}^1 3 \, dx & b) \int_0^1 (1+e^x) \, dx \quad \wedge \quad - \int_0^1 (1+e^x) \, dx \\ c) \int_{-\pi}^0 \sin x \, dx \quad \wedge \quad - \int_{-\pi}^0 \sin x \, dx \end{array}$$

۱۷- هر دوه انتیگرالونه د یوه انتیگرال سره انځور کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \int_0^{0.5\pi} \cos x \, dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x \, dx & b) \int_{-1}^0 (x + e^x) \, dx + \int_0^1 (x + e^x) \, dx \\ c) \int_2^3 3x^2 \, dx + \int_5^3 3x^2 \, dx & d) \int_{-2}^1 (2+x) \, dx - \int_4^1 (2+x) \, dx \end{array}$$

۱۸- د لاندې ټاکلو انتیگرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \int_{-4}^{-2} e^{x+3} \, dx & b) \int_0^8 \sqrt{1+x} \, dx \\ c) \int_3^5 2^{4-x} \, dx & d) \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x \, dx \end{array}$$

۱۹- د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتیگرالونه ورکړ شوي ارزښتونه لري؟

$$\begin{array}{ll} a) \int_1^x 5t^4 \, dt, \quad la(x) = 31 & b) \int_0^x e^t \, dt, \quad la(x) = e - 1 \end{array}$$

۲۰- لاندې انتیگرالونه توابع ته د انتیگرال توابع وټاکئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^2, \quad a = 3 & b) f(x) = 2 + e^x, \quad a = 0 \\ c) f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad a = 0 & d) f(x) = 2, \quad a \in \mathbb{R} \end{array}$$

۲۱- د لومړني انتیگرال په استعمال سره لاندې انتیگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{aligned}
 d) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad e) \int \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} dx, \quad f) \int (\sqrt[3]{x^4} + 1) dx, \\
 g) \int \sqrt[3]{x^{-3}} dx, \quad h) \int \frac{ax^2 + bx + cx^{-1}}{x^4} dx, \quad i) \int 3 \cdot 2^x dx, \\
 j) \int \frac{1}{2 \sin^2 x} dx, \quad k) \int \frac{1}{3 + 3x^2} dx, \quad l) \int \cos \varphi \cdot s \, ds, \\
 m) \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \quad n) \int \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} dt, \quad o) \int (1-u^2)^{\frac{1}{2}} du. \text{ -----}
 \end{aligned}$$

۲۲ - د بیرته په بنسټیز اینټیګرال بدلون وروسته یې اینټیګرال ونیسئ:

$$\begin{aligned}
 a) \int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2(1+x)^2} dx, \quad b) \int \frac{2 \sin 2x}{3 \cos x} dx, \quad c) \int \frac{7 \cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx, \\
 d) \int \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 x} dx, \quad e) \int (-2 - 2 \tan^2 x) dx, \quad f) \int \frac{2t^3 - 8t}{(t-2)(t+2)} dt.
 \end{aligned}$$

۲۳ -- لاندې ټاکلی اینټیګرالونه وشمیرئ:

$$\begin{aligned}
 a) \int_0^1 \frac{1}{2} e^x dx, \quad b) \int_{\pi}^{2\pi} \cos x \, dx, \quad c) \int_2^3 2 dt, \\
 d) \int_0^{\pi} \cos \pi \sin x \, dx, \quad e) \int_0^1 \frac{4 du}{1+u^2}, \quad f) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx, \\
 g) \int_{x_1}^{x_2} (2x-1) dx, \quad h) \int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2 + 2\sqrt{x}} \right) dx, \quad i) \int_{\ln 2}^{\ln 3} e \cdot e^t dt, \\
 j) \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}} du, \quad k) \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}} dx, \quad l) \int_a^b a^x dx.
 \end{aligned}$$

۲۴ - د بدلون یا سټیچېوشن قاعدې استعمال له لارې یې اینټیګرال وشمیرئ:

$$\begin{aligned}
 a) \int \sqrt[3]{2x-7} dx, \quad b) \int \frac{dx}{-x+1}, \quad c) \int 2^{3x+6} dx, \\
 d) \int \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right) dx, \quad e) \int \frac{dx}{1+(x+1)^2}, \quad f) \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)} dt,
 \end{aligned}$$

$$g) \int x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 7} \, dx, \quad h) \int \frac{3x \, dx}{-x^2 + 1}, \quad i) \int x \cdot e^{2x^2 + 3} \, dx,$$

۲۵- د تر زیرینوني فورمبدلون وروسته او په بنسټیز اینتیگرال 10 او 11 د بدلون له لارې یې اینتیگرال وشمیری

$$\begin{aligned} a) \int \frac{dx}{1+4x^2}, \quad b) \int \frac{dx}{2+4x^2}, \quad c) \int \frac{dx}{3+5x^2}. \\ d) \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}, \quad e) \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}, \quad f) \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \\ g) \int \frac{dx}{x^2-10x+34}, \quad h) \int \frac{dx}{3x^2-6x+30}, \quad i) \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}. \end{aligned}$$

۲۶- لاندې ټاکلی اینتیگرالونه وشمیری:

$$\begin{aligned} a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(4x-1)^3}, \quad b) \int_{-1}^0 e^{3x} \, dx, \quad c) \int_0^2 2^{2x+1} \, dx, \\ d) \int_{-1}^1 \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}, \quad e) \int_e^{e^x} \frac{1}{x} \ln x \, dx, \quad f) \int_2^4 \frac{e^t}{1+e^t} \, dt, \\ g) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x} \cos x \, dx, \quad h) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}, \quad i) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos x \, dx. \end{aligned}$$

۲۷- لاندې ټوټه اینتیگرالونه اینتیگرال کړي:

$$\begin{aligned} a) \int_0^1 2x \cdot \sin x \, dx, \quad b) \int 4x^3 \cdot \ln x \, dx, \quad c) \int \cos^2 x \, dx \\ d) \int \cos x \cdot \sin x \, dx \quad e) \int x^2 \cdot \sin x \, dx \quad f) \int x \cdot (\cos x + 1) \, dx \\ g) \int x^3 \cdot e^x \, dx, \quad h) \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x \, dx, \end{aligned}$$

د ډاکټر ماخان شینواري لیکنې او ژباړې

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوي لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

خلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د کټي - او کټي د کټي شمیرنه ، د احتمالوالي شمیرنه کتاب د بنوونځي ټولي اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرېون (دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکټر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینګمن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړۍ ټوک

۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک

۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالي شمیرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصایه یا ستاتیسټیک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - انالیزې ۱

۷ - انالیزې ۲

۸ - کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل اناليز

۱۲ - وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرښيز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمک‌کچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرې پوهنه يا ست تيوري

۱۹ - د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

-
- ۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک
- ۲۱ - د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې
- ۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکې یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې
- ۲۳ - د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري
- ۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انګریزي ډکشنري
- ۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه
- ۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي).
- ۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.
- نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي
- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:
- د ګروپونو تیوري
- د بنوونځي لپاره فزیک د برینګمن لیکنه
- له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره بڼه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميري شينواری د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنۍ ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځۍ. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

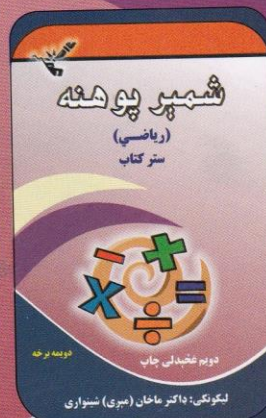
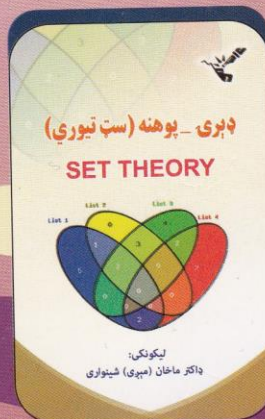
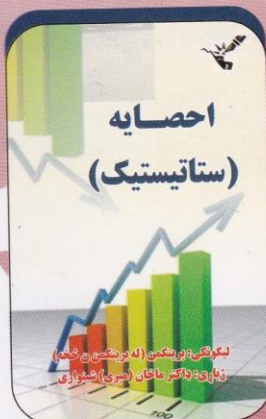
ماخان ميري په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیری سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیري. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹۹۷ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.



ډاکټر ماخان (مېرې) شینواری



د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه - جرمني

VEREIN ZUR FÖRDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V

د خپرونو لړ (۱۳۰)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library