الجبرون

ALGEBREN

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

Ketabton.com

لیکوال:

ډاکټر ماخان (مېرې) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیك

سریزه .... الف

شمیرپوهنیزې نخښې............ ت

۱ . ګڼونډېرې ۱

۱ . ۱ طبیعي ګڼونډېرې ۱

۱ . ۲ د ټول ګڼونډېرې ۴

۱ . ۳ ریشنل ګڼونډېرې ۵

۱ . ۴ رییل ګڼونډېرې ۷

۱ . ۵ ایماګینار ګڼوډېرې ۷

۱ . ۶ کمپلکس ګڼوډېرې ۸

۲ . ډېرپوهنیزې ستګلیمې ۱۱

۲ . ۱ ډېرې ۱۱

۲ . ۲ خلډېرې یا ضرب ډېرې او اړیکې یې... ۲۶

۲ . ۳ نیمنظم یا نیمترتیب ۳۶

۲ . ۴ مینیمالشرطونه ۳۸

۳ . الجبري جوړښتونه ۴۱

۳ . ۱ ګروپ ۴۴

۳ . ۲ بدن یا تن او کړې ۵۹

نورمي شوې ټولینوم ۶۶ څه مانا لري

۳ . ۳ . لاندیګروپ او لاندې کړې ۷۰

۳ . ۴ ایزومورفیزم ۸۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۵ د نیمګروپ په ګروپ او کړی په یوه (ناضرور
کموتاتیو) تن یا بدن کی خوندیونه ۹۲
۳ . ۶ نورمالپرویشنه ۹۵
۳ . ۷ ایدیال او پاتیتولګیکړی ۱۰۵
۴ د بول الجبر، سرکټ الجبر.......... ۱۱۶
۴ . ۱ د ول الجبر سټ کلیمی ۱۱۶
۴ . ۲ د بول فنکشنونه او پولینومونه ۱۲۹
سویچ الجبر یا بریښناجریان الجبر ۱۴۶
۵ الجبرونه ۱۵۶
یو څو بنسټکلیمی ۱۵۶
۵ . ۲ لاندي الجبر یا سب الجبر ۱۷۳
۵ . ۳ ایزمورفیزم ، هومومورفیزم ۱۸۰
۶ . ترونونه یا ترونی ۲۰۷
۶ . ۱ ترونی او مکمل - یا پوره تروني.. ۲۰۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ګڼونډيري

د دې لپاره، چې دا د الجبر کليمي مو پوره څيړلی وي او ښه پوهور شي، نو په سر کي غواړم هغه د ښوونځي بايد (چې متآسفانه دا مو په هيواد کي، په دې نامه نه وو نومولي) ورسره بلد ، د ګڼونو ډيري يو په بل پسی تعريف کړم، يا بهتره لنډه ګوته ورته ونيسم او دا په هغو کی د باوري کارونو يا اپريشنونو يا عمليو او يا ګنډنو او يا د تړونونو په بنسټ.

۱ . ۱ طبيعي ګڼونډيری

Die Menge der natürliche Zahlen

(the set of non negative integer)

دا د ګڼونو ډيری چې صفر ورسه نه وي په لاندې ډول دی:

$$N = \{ 1,2,3,...,n , ... \}$$

دا لاندې د طبيعي ګڼونو ډيري دی، چی صفر ورسره دی، يا په بل عبارت : د طبيعي ګنونو ډيری د صفر سره

$$N^* = \{0,1,2,...,n,...\}$$

په دې ډيري کی لاندې شيمر قاعدې باور لري

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۱ . ۲ په طبيعي ګڼونو کې شميرقاعدې

الف : و زياتون ته يا بهتره، نسبت وزياتون ته:

اول : د هرو دوه طبيعى ګڼونو $a,b \in N$ لپاره، و زياتون ته، يا نسبت وزياتون ته، يو دريم طبيعي ګڼ $c \in N$ شته د کومو لپاره چې باور لري: $a + b = c$

دوېم : اسوشياتيو قانون Assotiative : د طبيعي ګڼونو لپاره د اسوشياتيو قانون باور لري:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

دريم : کموتاتيو قانون commutative : د طبيعي ګڼونو لپاره د کموتاتيو قانون باور لري، يعني:

$$a + b = b + a$$

څلورم: بي تاثيره يا ناپيلى توکى das neutrales Element: په طبيعي ګڼونو کى چى صفر ورسره وي باور لري

$$a + 0 = 0 + a = a$$

صفر د طبيعي ګڼونو ناپيلى يا بهتره بى تاثيره توکى بلل کيږي.

ب : و ځل ته يا بهتره نسبت ځل ته

اول : د هرو دوه طبیعی ګڼونو $a , b \in N$ لپاره یو دریم طبیعی ګڼ $c \in N$ شته، د کومو لپاره چی باور لري

$$a.b = c$$

دوم : د طبیعي ګڼونو $a,b,c \in N$ لپار اسوشیاتیو قانون باور لري

$$(a . b) . c = a . (b . c)$$

دریم : د طبیعي ګڼونوډیري کی کموتاتیو قانون باور لري

$$a . b = b . a$$

څلورم. نسبت و ځل ته ناپیلي یا بهتره بي تاثیره توکی : که طبیعي ګنونه له 1 سره ځل شي، نو بیرته پخپله همغه طبیعي ګڼ لاس ته راځي

$$1 . a = a . 1 = a$$

دا 1 د طبیعي ګڼونو یو ناپیلی یا بي تاثیره توکی بلل کیږي، چی یوی (دا ځکه یوی بولو ، چی باید له یو سره یی توپیر شوی وي) یي بولو

یادونه : د بېلګو ډول، چې یوی له یو څخه لوی یا هم [illegible] شي.

یادونه : په پورته نښلونو کی دې ته پام وي، چی ورکړ شوي توکی یو د بل څخه باید توپیریدونکی نه وي، کیدی شي، چی یو له بل سره مساوي هم وي یا بهتره همغه توکي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چې په طبيعي ګڼونډيري کی، نسبت و زیاتون ته، د هر توکی لپاره د هغه په څټ یا برعکس ګڼ نه شته، نو له دې امله مجبوریږو، چې د طبیعی ګڼونو ډیری د ټولګڼونو ډیري ته پراخ کړو،

۱ . ۲ د ټولګڼونوډیری die Menge der ganze Zahlen :

د ټولګڼونو ډیری، د طبیعي ګڼونو ډیری د صفر او د دې طبیعي ګڼونو د توکو په څټ ګڼونو ډیری دی، چی په Z سره یی ښایو او داسی یي لیکو

$$Z = \{ ...,-n, ..., -3,-2,-1,0,1,2,3,...,n,...\}$$

په ټولګڼونو ډیري کی هغه په طبیعی ګڼونډيري کی باوري نښلونی یا عملیي باور لري او په دې برسیره د هر یوه ګڼ لپاره د هغه په څټ ګڼ نسبت و زیاتون ته هم موجود دی، یعنی لاندې باور لري:

د هر ټولګڼ $a \in Z$ لپاره د هغه په څټ ګڼ یعنی $-a \in Z$ موجود دی، چی دا لاندې باوري کوي:

$$a + (-a) = a - a = -a + a = 0$$

دلته $-a$ د a په څټ ګڼ یا inverse دی نسبت و زیاتون ته. دې ته طبعاً پام شته، چی د مثبت ګڼ ځل د منفی ګڼ

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره منځ ته راغلی، چې نتیجه یې یو منفی ګڼ دی، دا په دې مانا، چې دلته اصلي نښلونه یا عملیه زیاتون دی او نه . (ځل).

یادونه : زیاتون دوه ځایزه عملیه binäre Operation یا نښلونه ده او په څټ عملیه یوه یوځایزه عملیه unäre Operation یا نښلونه ده.

ګورو، چې د ټولګڼونو په ډیري کی د ځل لپاره د ګڼونو په څټ ګڼونه inverse Zahlen نه دي تعریف، یعنی د یوې افغانی یو په څلورمه (1 / 4) یو ټولګڼ نه دی، نو له دې امله باید د ټولګڼونو ډیری و ریشنل ګڼونو Q ته پراخه شی .

۱ . ۳ ریشنل ګڼونه rational Zahlen :

د ریشنلګڼونو ډیری له دې امله د ټولګڼونو ډیری Z او د ټولو ماتګڼونو ډیري a / b څخه جوړ دی، چې په Q سره یې په نخښه کو او په لاندې ډول یې لیکو :

$$Q = \{ Z , a/b , a,b \in Z , b \neq 0 \}$$

دا داسی لوستل کیږي : ډیری Q مساوي دی د ټولګڼونو ډیری Z اود مات ګڼونو a / b ډیري سره، a , b ∈ Z .

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ريشنلګڼونو ډيري کې، هغه په Z کې ټول د شميرقوانين باور لري او په دې برسيره د هر ګڼ لپاره نسبت و ځل ته د هغه په څټ ګڼ هم موجود دی ، يعنی په ريشنل ګڼونو کې د هر ګڼ $a \in Z$ لپاره يو $b \in Z$ موجود دی د کوم لپاره چي باور لري:

$$a \cdot b = 1 \Rightarrow b = 1/a, a \neq 0$$

دلته a بايد د صفر سره برابره يا مساوي نه وي، ځکه، چی په صفر ويش نه دی تعريف.
ګورو چی ددوه په څټ ګڼونو ځل د ريشنلګڼ يو يوی راکوي. يوی هغه توکی دی، چی د ريشنلګڼون ډيري هرتوکی سره د ځل نښلونه کی بي تاثيره پاتي کيږي يا ناپيلی. دا يوی موږ له دې امله ناپيلیdas neutrale Element او يا هم بی تاثيره توکی بولو.

په پورته ګڼونو کی توان تعريف دی، يعني هر ګڼ د خپل ځان سره ځل کيدنه شته، خو د دې په څټ کارونه ياعمليه يا بهتره نښلونه موجود نه ده، نو له دې امله بايد دا ګڼونډيری نور هم پراخه شي. يعني د ګڼون ريښه هم بايد په ګڼونډيري کی باور ولري. د بيلګي په توګه د ۲ ريښه يعنی $\sqrt{2}$ په ټولګڼونوکی نه دی تعريف. دا پراختيا مو رييلګڼونډيری ته لاربښودوي، چي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په R سره ښايو يا نخښه کوو.

۱ . ۴ رییل ګڼونډېری R die Menge der reelen Zahlen:

د هغو ګڼونوډېری، چې له ريښو جوړ وي، هغه مو ړ د ايريشنل ګڼونوډېری die Menge der irationale Zahlen بولو چې په Q_i سره یې په نخښه کو . د رييل ګڼونډېری یاد رييل ګڼونو ډېری په دې توګه بيا د ريشنل ګڼونو ډېري او د ايريشنلګڼونو ډېري د ټولنی څخه جوړ دی یعنی

$$R = Q \cup Q_i$$

يادونه : په پورته او راتلونکی کي که U راشي، نود ټولنی په ځاي به یی ځاي نیولی وي، که بل نوم ورسره مل نه وي.
په دې ډېري کي د هرنامنفی ګڼ لپاره د هغه ګڼ ريښه موجود ده. د رییلګڼونوډېری. بیا تکراروو، چی د ټولو ریشنلګڼونو ډېري څخه عبارت دی، چی د نامنفي ریشنلګڼونوګڼونو ریښی هم ورزیاتي شي.
په رییلګڼونو کي د ریشنل ګڼونډېري ټول قوانین باورلري او په همدې ډول په R کی د هر مثبت ګڼ a ریښه هم موجود ده، یعني $\sqrt{a}$ موجود ده، چی a منفي ګڼ نه وي. دا ریښه نیونه یو یوځایز اپریشن یا عملیه او یا ښلونه ده.

دلته هم سملاسی راته جوته کیږي، چی د ریښي یا بهتره د مربع ریښی د منفی ریښه نیونکي یا ریښه ایستونکی ګڼ ریښه نه ده تعریف، نو له دې امله باید د رییلګڼونوډیری د کمپلکش ګڼونډیریۍته پراخه شي.

۱ . ۵ ایماګینار ګڼونډیری:

د ټولو منفی ګڼونو ریښوډیري ته ایماګینار ګڼونډیری وایو die Menge der imaginäre Zahlen . او دا په I سره په نخښه کوو. دا هغه ګڼونه i دي، د کومو لپاره چي باور لري: $i^2 = -1$. یانی $i = \sqrt{-1}$, نو که b یو رییلګڼ وي، نو ib یو ایماګینار ګڼ دی .

اوس راځو د کمپلکس ګڼونو ډیري تعریف ته :

۱ . ۶ کمپلکس ګڼونډیری

die Menge der komplexen Zahlen

کمپلکس ګنونډیری د رییلګڼونډیری او ایماګینارګنونډیري ټولنی ته وایي. یاني که ایماګینارګڼ د I سره په نخښه کړو نو کمپلکسګڼ چی د C سره یي په نخښه کوو، دی

$$C = R \cup I$$

دلته له دې پیژندنی یا تعریف څخه روښانیږي، چی کپلکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

گڼونه دوه برخې لري، رییله برخه او ایماګینار برخه، نو له دې امله د کمپلکس ګڼونو په ډیري کې ټولې نښلونې یا عملیې، چې په رییل ګڼونډیري او ایماګینار ګڼونډیري کې باور لري، باوري دي. او برسیره پردې، دا لاندې قوانین هم باور لري:
دلته که $z = a + ib$ یو کمپلکس ګڼ وي، چې a رییله برخه او $ib = bi$ یې ایماګینار یا ایماجینار برخه ده. او س راځو شمیرقوانینو ته:

الف : $i^5 = i \qquad i^4 = 1 \qquad i^3 = -i \qquad i^2 = -1$

په ټولیزه توګه:

$$i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i \qquad i^{4n+4} = +1 \qquad i^{4n+5} = i$$

ب –

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 + b_2)$$
$$z_1 . z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

کیدی شي، چې وي $z^* = \bar{z} = a - ib$ ، نو دا ګڼ
و $z = a+ib$ ته یو کونجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي

پ–

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z.z^* = z.\bar{z} = (a+ ib)\,(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

دا پورته د جملو يا قضيو په څير هم ښوول کيدی شي، خو مونږ يی دلته د ښوونی څخه تيرېږو او دايی د تعريف له مخی د اعتبار وړ قوانينو په څير راوړو.

يادونه : مونږ کړای شو، چی دا د ګڼونو ډيري په لاندې ډول د ډيريو په توګه يو په بل کي خوندې وليکو:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

دا په ترتيب د ورپسی ډيري اصلي برخډيري دي

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – ډیرېپوهینیزې ستکلیمی

۲ . ۱ . ډیری

په شمیرپوهنه کی پل په پل موږ ددې، د ستونځو سره مل، تعریف شوې کلیمې سره مخامخ کیږو، کومه چی د یوه لغات « ټولګې » سره روښانه کیدی یا پوهیدل کیدی شي. د بیلګې په توګه د انسانانو د ټولګې څخه غږیږو، چی په یوه ټاکلی وخت کی په یوه کوټه کی موجود وي، یا هغه هیلی، چی په یوه ځانګړي وخت کې په یوه ځانګړي ځای کې په اوبو کی لامبی. هغه غرڅه، چی د هسکی مینې د سپینی مورګې په ځنګلونو کی لا پاتی دي او همدا ډول هغه میږې او ووزې، چی په ۱۹۹۹ میلادې کال کی د کوچیانو څخه د لوږې له امله مړې شوي دي. د داسی شیانو ټولګه «ډیری» (Die Menge , set) بلل کیږي یا داسی ټولګې ډیری نوموو.

۲ . ۱ . ۱ لنډ تعریف : ځموږ د خیال یا تصور د ټولو، په روښانه توګه، توپیرکیدونکو شیانو ټولګه «ډیری» نوموو یا بولو.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شیان، چې له هغو ډېرې جوړ شوې دي، د ډېرې «توکي» بلل کیږي. د دې لپاره، چې « x د ډېرې M توکی دی» لیکو: « $x \in M$ ». د دې وینا په څټ یا نفي یا نیګیشن Negationد « $x \notin M$ » له لارې ورکول کیږي.

د « $x_1 \in M$ او .... او $x_n \in M$ » په ځای لیکو:

$$"x_1,x_2,...,x_n \in M"$$

یو ځانګړې ډېرې تشډیرې دی، داسې کرکټریزه کیږي، چې کوم توکی نه لري. دا تشډیرې د سومبول یا نخښې Ø سره نخښنون کیږي یا په نخښه کیږي.

نور هغه ډېرې چې زیات مو مخ ته راځي یا زیات منځ ته راځي، دا لاندې ډېرې دي:

د ټولو طبیعي یا پیدایښتګڼونو ډېرې د N سره په نخښه کیږي، چې صفر ورسره مل دی.

د ټولو ټولګڼونو ډېرې Z

د ټولو راشنلګڼونو ډېرې Q

د ټولو رییلګڼونو ډېرې R

د ټولو کمپلکسګڼونو ډېرې C

د ۳۰ پرویشونو ډېرې، چې له ۸ توکو څخه جوړ ډېرې دی.

یعنی {1,2,3,5, 6,10,15,30} ډېرې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۱ . ۲ تعریف : یو ډیری M د ډیري N برخه ډیری بلل کیږي، که له $x \in M$ څخه تل لاس ته راشی $x \in N$.
په نخښونه یی : $M \supset N$. یا $M \subset N$

۲ . ۱ . ۳ تعریف : هغه ډیری، چی هیڅ توکی ونه لري، تشډیری بلل کیږي او داسی $\emptyset$ یي په نخښه کوو.

تشډیری $\emptyset$ د هرډیري برخډیری دی ، برسیره پردې هر ډیری د خپل ځان برخډیری دی. دا ډول ډیري نااصلي برخډیري بلل کیږي، هغه برخډیری اصلي برخډیری دی یا اصلي برخډیری بلل کیږي، که دا برخډیری له دې دوه ډیریو یعنی له پخپله دې ورکړ شوي ډیرې او تشډیري څخه توپیر ولري. دې ته دې هم باید ګوته نیول شوي وي، چی کله کله برخډیریو ته «لاندې ډیري» هم ویل کیږي
دا نخښی $\subset$، $\subseteq$ د اینکلوزیون نخښو Inklusionszeichen په نامه بل کیږي.

۲ . ۱ . ۴ تعریف : که وي $M \subseteq N$ او $M \models N$ نو M د N اصلي برخډیری بلل کیږي. ($M \neq N$)
په نخښونه یی : $M \subset N$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۱ . ۵ تعريف: د يوه ډيرې S توکي کيدى شي پخپله ډيري وي. دلته نوS د ډيريسيستم په توګه په نخښنه کيدى شي يا د ډيري سيستم په څير ګڼل کيدى شي يا په بل عبارت: د يوه ډيري د توکو ډيري د هغه ډيري برخډيرى دي، چې دا يو د ډيريسيستم جوړوي.

۲ . ۱ . ۶ تعريف: د يوه ناتش ډيري سيتسمS غوڅډيرى (د سيستم هغه برخډيرى، چې د سيستم د هر ډيري برخډ- يرى وي) D د ټولو توکو هغه برخډيرى دى، چې په همغه وخت يا يووخت کې د سيستم S د هر ډيري M توکى وي. يعنى لرو $x \in D$ همغه ارزښته يا برابرارزښته د دې سره دى $x \in M$ د ټولو ډيريو $M \in S$ لپاره .

په نخښونه: $D = \bigcap_{M \in S} M$ يا $D = \bigcap \{ M \mid M \in S \}$

$D = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$

که S يواځي د پای ډيرو برخډيريو $M_1, \dots, M_n$ څخه جوړ دى.

مساوات يا برابرون $M \cap N = \emptyset$ وايي، چې M او N ګډ توکى نه لري، يعني توکى پردي دي يا لنډ پردي يا ديسيونکت دي(Disjnukt) دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۱ . ۷ **تعریف:** د یوه ناتش ډیریسیستم S ټولنه V د ټولو هغو توکو ډیری دی، چی کم له کمه د S ډیریسیستم یوه ډیري M پورې اړه ولري یعنی توکی وي.

په نخښونه : $V = \bigcup\{M \mid M \in S\}$ یا $V = \bigcup_{M \in S} M$

$V = M_1 \cup .... \cup M_n$

که ډیریسیستم S د پای ډیرو برخډیریو $M_1, M_2, ..., M_n$ څخه منځ ته راغلی یا جوړ وي.

د غوڅډیري او ټولنډیري د تعریف په مرسته پسی ترلي لاندې اړیکي لاس ته راځي ، چی ښوونه یی ګرانو لوستونکو ته پریښوول کیږي.

۲ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله:

(a) $M \cup (N \cap N) = (M \cup N) \cap (M \cup N)$

(b) $M \cap (N \cup N) = (M \cap N) \cup (M \cap N)$

(c) $M \cap N = M$

د $M \subset N$ سره په همغه مانا ده

(d) $M \cup N = M$

د $N \subset M$ سره په همغه مانا ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

پایډېري کیدی شي، چې د هغو د غړو له لارې په نخښنه شي.
لیکل کیږي

$$\{ x_1 , x_2, \ldots , x_n \}$$

د همغه ډېرې M لپاره، چې ټیك له دې ورکړشوو توکو څخه جوړ وي. یوتوکیز ډېرې $\{ x \}$ د هغه د توکي x څخه باید توپیر شي:
د بیلګې په توګه $\{ \varnothing \}$ هغه ډېرې دی، چې د هغه یواځنی توکی تشډېری دی .

دیوه ډېرې M د توکو ګڼون یا تعداد د $|M|$ سره په نخښه کیږي. دا ګڼ $|M|$ د ډېرې M زور یا توان بلل کیږي، دا په دې مانا چې د ډېرې د توکو ګڼون یا تقداد د ډېرې زور دی. د بیلګې په توګه دی $|\{ \varnothing \}| = 1$ او $|\varnothing| = 0$.
د یوه ډېرې بل ډول روښانونه یا شمیرنه په دې کی نغښتی، چې دیوه ورکړ شوي ډېرې M ټول توکې ورکړ شوي ، کوم توکی چې ګډ خویونه E ولري، و یوه نوي ډېرې ته سره راټولګه کړي یا را یوځاي کړي. $E(x)$ په دې مانا چې x خویونه E لري، نو دا ډېرې په $\{ x \in X \mid E(x) \}$ سره ښنایو.
د بیلګې په توګه ډېرې $\{ x \in Z \mid x^2 = 1 \}$ د -1 او 1 څخه جوړ شوی، د ټولو ټولګڼونو برخډېري دی. د یوه ډېرې دا
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډول جوړونی سره د انډولډيري X ورکونه مهمه ده، له کومی چی توکی رانيول کيږي، په غير له دې کيدی شي، له تضاد يا مخامخوالی ډك يا په ځتځ ډيري رامنځ ته شي، دا چی انډولډيری په ټوليزه توگه په همغه اړيکو يواځنی ټاکلی دی، نو په دې حالت کی دې په اکسپليځيت(Explizite لاتين : روښانه ، واضح) ورکونه تيريدنه وشي.

۲ . ۱ . ۹ تعريف: د دوه ډيريو M او N کمونډيری دی :

$$M \setminus N = \{ x \in M \mid x \in N \}$$

د غوځي ، ټولنی او کمون لپاره په پوره روښانه توگه لاندې يادوو:

کموتاتيو قانون Kommutativität

$$A \cap B = B \cap A \ , \quad A \cup B = B \cup A$$

اسوځياتيو قانون Assotiativität

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

ديستريبوتيويتي قانون Distributivität :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \ ,$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوليز يا عمومي

$$(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}) \cap B = \bigcup_{\alpha} (A_{\alpha} \cap B)$$

او وروسى

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B), \qquad A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

ډيرې شميرپوهنيزې ښوونې د پوره اندکشن په پرينځيپ ولاړې دې، کوم چې د طبيعي ګڼونو اکسيوماتيکي جوړخت دلايلو راوړنه کې يو غوره رول لوبوي.

۲ . ۱ . ۱۰ د پوره اندکشن ثبوت پرينځيپ:

A دې په طبيعي ګڼونو $n \in N$ يوه ويناو ي. $A(n)$ په دې مانا دی، چې A په n باوري کيږي.

د يوه کره ټاکلى $n_0 \in N$ څخه پيل باور لري:

الف : $A(n_0)$ د اينډکشن پيل:

ب ؛ د اينډکشن پاي : د ټولو $n \geq n_0$ لپاره له $A(n-1)$ څخه هم $A(n)$ لاس ته راځي

نو بيا A د ټولو طبيعي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ريښتيا ده يا صحيح يا ټيك ده(دا ريښتيا مناسبه نومونه ده).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې ته دې ګوته نيول شوي وي، چې خورا ساده دی، که چيرې د ايندکشن پای په لاندې ډول لارښوده کړو:

ب : له $A(i)$ څخه د ټولو i لپاره د $n_0 \leq i < n$ سره $A(n)$ هم لاس ته راځي.
شرايط (b) او ('b) برابرارزښته دي ، لکه چې ورپسې يا ترلي ليدل کيږي.
د انيدکشن ښوونه يا ثبوت بيلګي د لاندې جملو اوبيو يا حلونو ته مرسته کوي يا د لاندې جملی اُبيو په چوپړ کې دي.

۲ . ۱ . ۱۱ تعريف: M دې يو ورکړشوی ډيری وي.
د M د ټولو برخډيريو ډيری. چې په $P(M)$ سره يی په نخښه کوو يا ښايو، د M دپوتنځډيري Potenzmenge يا توانډيري په نامه ياديږي.

۲ . ۱ . ۱۲ جمله: M دې يو n– توکيز ډيری وي.
$P = P(M)$ دې د M د ټولو برخډيريو ډيری وي. نو دا د M په توان ډيری P له 2^n توکو څخه جوړ دی.

اوبی (حل): د ايندکشن پيل: $n = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چې M کوم توکی نه لري. له دې امله M تشډیری Ø دی. د $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$ له امله په P کی یو توکی $1 = 2^0$ موجود دی.

وي دې : $n \in N, n \geq 1$

د ایندکشن نیونه یا فرضیه: هر $(n - 1)$ – توکییز ډیری دې ټیك 2^{n-1} توپیریدونکی برخډیري ولري.

د ایندکشن اوبې یا ثبوت : که M یو ډیری د n توکو سره وي، نو $P(M)$ ټیك له 2^n توکو جوړ دی.

د دې سره دې $M = \{a_1, a_1, ..., a_n\}$ وي.

نو بیا $P(M')$ د $M' = \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ لپاره د ایندکشن د نیونی یا فرضیي سره ټیك 2^{n-1} توکي لري،

که $A \in P(M)$، نو بیا یا $a_n \in A$ دی او یا $a_n \notin A$. په دوم حالت کي A په $P(M')$ پورې اړه لري، او په لومړي حالت کي $A' = A \setminus \{a\} \in P(M')$ نو $P(M)$ ټیك

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1+1) = 2^n$$

توکي لري. د پوره ایندکشن د پرینځیپ له مخی دلته وښوول شو، چی د هر n – توکیز ډیري M لپاره پوتنځ – یا تواندیری $P(M)$ ټیك 2^n توکی لري. *

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو د ثبوت له مرستندوي موادو څخه د ناپاي ډیري زدکړې لپاره د څورن Zorn جملګي ده. S دې یو ناتش ډیریسیستم وي. یو ناتش د S برخډیری K یو ځنځیر بلل کیږي، که له $M_1, M_2 \in K$ څخه تل $M_1 \subseteq M_2$ لاس ته راشي او یا $M_2 \supseteq M_1$ لاس ته راشي.

۲ . ۱ . ۱۳ تعریف :یو ډیري $M \in S$ د S یو ماکزیمال یا لوي توکی بلل کیري، که له $N \in S$ او $M \subseteq N$ څخه تل لاس ته راشي ، چی $M = N$. نو د څورن جملګی په لاندې ډول ده: (ماکزیمال یا ماکسیمال = Maximal)

۲ . ۱ . ۱۳ د څورن جملګیLemma vo n Zorn:
که د ناتش ډیریسیستم S د هر ځنځیر K لپاره ټولنډیري { K | K∈K } هم یو د S ډیریسیستم توکی وي، نو بیا په کي یو ماکزیمال maximales Element توکی موجود دی.
ددې جملګی د ثبوت څخه دلته تیریږو.
وي دې N د یوه نیم منظم ډیرې M لاندې ډیری یا برخه ډیری. هر (ضرور نه دی، چی په N کی ځای وي یا خوندې وي)a له M څخه، کوم چی د ټولو $x \in N$ لپاره شرط $a \geq x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوره کړي د لاندې ډېري پورته بند بلل کيږي يانې ډېرى يې د لته رابند دی. دې ته دوګونی کليمه لاندې بند دی.

په ورکړ شوي نيممنظم ډېري M سره د ټولو څنځيرونو ډېرى د ډېري خونديونی په موخه يا هدف ، هم نيمه منظم دی. دا ټول د اخرني ډېري ماکسيمال توکی ، د خپل طبيعت له مخې د M ماکسيمال څنځير بلل کيږي.

لاندې جملی يو بل ته ورته دي يانې د يوې څخه بله لاس ته راځی او په څټ.

۲ . ۱ . ۱۴ د څرميلو جمله Zermelo: هر ډېرى کيدى شي منظم شي

۲ . ۱ . ۱۵ د هاوزدورف جمله Hausdorff: هره د يوه نيمه منظم ډېري څنځير په يوه ماکسيمال څنځير کي خونديې ده.

۲ . ۱ . ۱۶ د کوراتوفسکي –څورن جمله Kuratowski-Zorn :

که د يوه نيمنظم ډېري M هر څنځير يو پورته بند ولري، نو د M په هر توکی پسې يو په نامه ماکسيمال توګي راځی.

ددې درې جملو له ثبوت څخه دلته تيريږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس دې X او Y دوه ناتش ډیري وي. د یوې د X په Y کی څیرونی (په نخښونه f : X -> Y) لاندې یو تنظیم پوهیږو ، په کوم کی چی د x ∈X هر توکی یواځنی یوه د y ∈Y توکی باندې د څیرې په توګه تنظیم شي یا ترتیب شي، د x څیره y په څیرونه f د f(x) سره او یا هم ساده د fx سره په نخښنه کوو. ډیری X د څیرونی f تعریفډیری بلل کیږي او ډیری Y د هغی موخیډیری یا څیرېډیری بلل کیږي.

که f د x څیرونه یا څیره کونه وي په Y کی او M یو د X برخډیری وي، نو دا د ټولو x ∈ M توکو څیرې ډیری او په ورته توګه د ډیرې M څیره بلل کیږي او داسی په نخښنه کوو f(M) یا په ساده توګه fM . پس باور لري:

$$fX = \{ fx \mid x \in M \},$$

او fM د Y یو برخډیری دی. د تشډیري څیره بیرته تش ډیری دی. د تعریف ډیري څیره fX د f څیره هم بلل کیږي او د Im f سره په نخښنه کیږي.

۱ . ۱ . ۱۰ تعریف: که Im f = Y باور ولري ، د څیرونی f : X -> Y لپاره، نو f یوه سوریکتیوه څیرونه بلل یږي، یو سوریکشن surjektive Abbildung Surjektion یا یوه د X څیرونه په Y باندې. په ځټ دې N یو د S

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخډیری وي. نو بیا د ټولو X د توکو ډیری، چې د هغو ځیره د N یو توکی وي، د N له ځیرې پخوا ځیرونه، په ځیرونه f کی، بلل کیږي او د $f^{-1}(N)$ سره په نخښه کیږي. باور لري

$$f^{-1}(N) = \{ x \in X \mid fx \in N \}$$

او $f^{-1}(N)$ یو د X برخډیری دی.

که $N \neq \emptyset$ هم باور ولري، کیدی شي $f^{-1}(N)$ تشډیری وي، یعنی هلته که $N \cap \mathrm{Im}\, f = \emptyset$ باور ولري.

۲ . ۱ . ۱۷ تعریف : یوه ځیرونه $f: X \to Y$ د خویونو سره،

چې له $x_1 \neq x_2$ تل $fx_1 \neq fx_2$ لاس ته ریشي، اینیکتیو ځیره کونه injektive Abbildung بلل کیږي یا اینیکشن Injektion. که په همدې وخت کی f حتی یو اینیکتیو او سوریکتیو وي، نو f بییکتیو ځیره کوونه bijektive Abbildung بلل کیږي یا بیکشن Bijektion بلل کیږي.

۲ . ۱ . ۱۸ تعریف : $f: X \to Y$ دې یوه بییکتیوه ځیره کونه وي. په هر $y \in Y$ د ځیرې په توګه یو یواځنی

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی توکی $x \in X$ د $y = f(x)$ سره د ځیرې په توګه تنظیم کړي، نو دلته د Y یو بییکشن په X تعریفوي.
دا د f په څېر ځیرونه بلل کیږي او یا دا f ته راګرځیدونکی ځیره کوونکي ده. او د $f^{-1} : Y \to X$ سره په نخښه کیږي

۱ . ۱ . ۱۹ **تعریف:** که دوه ځیرونی $f : X \to Y$ او $g : Y \to Z$ یو په بل پسی رامنځ ته کړی شي او په ټولیزه توګه یوه د $g \circ f$ سره په نخښه شوې ځیره کونه د X په Z کی ترې لاس ته راځي، کوم چې د f او g ځل یا ضرب ځیرونه بلل کیږي زیات وخت د ځنځیرې او یا تړلی بلواك یا ځیره کوني په نامه هم یادیږي. دا په لاندې ډول ورکړ شوی دی.

د ټولو $x \in X$ د پاره $(g \circ f) = g(fx) = g(f(x))$

کیدی شي چې تعریفډیری او ځیره ډیری یو بل باندې پریوځي.
دلته بیا له یوې ځیرونی f غبریږو، چې X په خپل ځان ځیره کوي.

۲ . ۱ ۲۰ **تعریف:** که دډیري X هر توکی په خپل ځان بیرته ځیره شي، نو یو د X بیکشن په خپل ځان لاس ته ترې راځي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی د X کتمټ څیرونه Identität یا identische Abbildung یي بولو او په لاندي ډول یی ښایو id_x او یا په ساده توګه id .

۲ . ۱ . ۲۱ یادونه: د هر $x \in X$ د پاره باور لري $id_x = x$.
که f یو د X بیکشن په Y وي، نود دې په څټ څیره کونه f^{-1} هم موجود ده او لاس ته ترې راځي

$$f^{-1} \circ f = id_x , \quad f \circ f^{-1} = id_y$$

۲ . ۲ ځلېدیری یا ضربېدیری او اړیکی یی

په دې برخه کی کارتیزي ځل د ناتشو ډیریو او همداسی د اکویوالینځ اړیکو یا ورتوالی اړیکو Äquivalenzrelation کلیمه څیړو.

۲ . ۲ . ۱ **تعریف:** د دوه ډیریوA اوB کارتیزې ځل $A \times B$ د تنظیمشوو جوړو (a , b) ټولګه ده، د $a \in A$ او $b \in B$ سره. دلته $(a , b) = (a', b')$ ټیک هلته باور لري، چی $a = a'$ او $b = b'$ وي.

۲ . ۲ . ۲ یادونه: کارتیزي څل په ټولیزه توګه کموتاتیو نه دی ، دا په دې مانا چې $A\times B \neq B\times A$ که $A \neq B$ وي. په پام کې دې دا اڅتنا وي، چې د هر ناتشډیري A او تشډیري $\emptyset$ لپاره باور لري

$$A\times\emptyset = \emptyset \times A$$

په ورته توګه د دوه ډیریو کارتیزي څل په څیر د پاي ډیرو ډیریو دپاره هم کارتیزي څل تعریفیږي.

۲ . ۲ . ۳ تعریف: کارتیزي څل $A = A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ د پاي ډیرو ډیریو A_i د $i = 1,\ldots,n$ لپاره، د ټولو منظمو یا ترتیبشوو n – ګونو $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ د $a_i \in A , i = 1 , 2 , \ldots , n$ سره. دلته

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1', a_2', \ldots ,a_n')$$

ټیك هلته باور لري، که $a_i = a_i'$ د ټول $i = 1,2,\ldots,n$ لپاره وي.

که $A = A_i$ وي، د ټولو $i = 1 , 2,\ldots,n$ لپاره، نو $A^n = \times_{i=1}^{n} A_i$ د A n –ایزی توان یا پوتنځ بلل کیږي. (n-ام [illegible])

ډیری $\{(a,\ldots,a) \in A^n \mid a \in A \}$ د A^n نیمی یا قطر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بینار اړیکی binäre Relationen

۲ . ۲ . ۴ تعریف : یود A×A برخډیری R د ډیري A دوه ځایزه اړیکي بلل کیږي. وایو : د A دوه توکی a او b په اړیکه R کی یو له بل سره پراته دي، په نخښونه a ~ b , هلته او هلته یا په بل عبارت تېیك هلته، که وي

$$(a, b) \in R \quad \text{او} \quad aRb$$

د بینار اړیکو یا دوه ځایزو اړیکو R کومپلیمنت یا پوره کید- ونکی یو دوه ځایزه اړیکي $\overline{R}$ دی چي په لاندې توګه تعریف دي $\overline{R} = (M \times M) \setminus R$. په نورو ویناو سره $a \overline{R} b$ تېیك هلته باور لري، که $(a,b) \notin R$.

د بینار اړیکو د ځل RS لاندې پوهیږو، چی a(RS)b تېیك اوتېیك هلته باور لري، که په M کی یو توکی c موجود وي ، د کوم لپاره چی aRc او cSb باور لري.

د بینار اړیکو ځل اسوځیاتیو دی یعنی

$$(RS)T = R(ST)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینار اړیکو ځل په هیڅ توګه کوموتاتیو نه دی، کله کله اړیکی
R او S یو له بل سره بدلیدونکی وي، دا په دې مانا چې

$$RS = SR$$

یوون اړیکی E په لاندې ډول تعریف دي: aEb ټیک هلته باور
لري که وي، a = b . یا په بل ډول اړیکی E د ټولو هغو توکو
جوړو (a,a) د $a \in M$ سره ډیری دی. دلته په روښانه توګه
باوور لري: $E = E^{-1}$ او دیوه خوښی اړیکیR لپاره باور لري :

$$RE = ER = R$$

موږ تش اړیکو 0 ته هم ګوته نیسو، چې د $M \times M$ تشډیري
په څیر تعریف دی. د هر بینارارېکي R لپاره په ډيري M
کی باور لري:

$$0 \subseteq R \quad \text{او} \quad 0R = R0 = 0$$

موږ کله کله د بینارو اړیکو سره مخامخ کیږو، چې د
لاندې خویونو څخه ځنی په کی باور لري

رفلکسیویتي: aRa د ټولو $a \in M$ لپاره دا په دې مانا
چې $E \subseteq R$

ترانزیتیویتي: له aRb او bRc څخه لاس ته راځي،
aRc دا په دې مانا چې $RR \subseteq R$

سیومتري: له aRb څخه لاس ته راځي bRa دا په دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

مانا چې $R^{-1} = R$

انتيسيومتري: له $a\,R\,b$ او $b\,R\,a$ څخه لاس ته راځي
$a = b$ دا په دې مانا چې $R \cap R^{-1} \subseteq E$

۲ . ۲ . ۵ جمله : که کوم يو بينار اړيکې له دې پورته خويونو څخه کوم يو ولري يا ټول ولري، نو د دې اړيکو په څېر اړيکې R^{-1} هم دا خويونه لري.

اوبې (حل):
په عمل کې له $E \subseteq R$ څخه لاس ته راځي

$$E = E^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $RR \subseteq R$ وي، نو باور لري

$$R^{-1}\,R^{-1} = (RR)^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $R^{-1} = R$ وي ، نو باور لري

$$(R^{-1})^{-1} = R = R^{-1}$$

له $R \cap R^{-1} \subseteq E$ څخه لاس ت هراځي

$$R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R \subseteq E$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکویوالنځ اړیکی :د بینار اړیکو څخه یی خورا مهمي اړیکی ایکویوالنځ اړیکي دي، چی په لاندې کی یي تعریفوو

۲ . ۲ . ۶ تعریف : یو ناتش دوه ځایزه اړیکی ~ په ډیري A کی ورته اړیکي یا اکویوالنځ اړیکی بلل کیږي، که د ټولو a , b , c ∈ A لپاره لاندې اړیکی باور ولري.

الف) a ~ a (رفلکسیو reflexiv)

ب) b~a <=> a ~ b (سیومتري symetrisch)

پ) a ~ b او b ~ c څخه (<=>) a ~ c لاس ته راځي . (ترانزیتیو transitiv)

۲ . ۲ . ۷ بیلګه:

الف) مساوات یا برابرون « = » د هر ډیري A لپاره یو ورته والی اړیکي Äquivalenzrelation دي.

ب) د a , b ∈ Z لپاره a ~ b ټیك هلته باور لري، که 2 د ګڼ a - b پرویشونی وي.

ایکویوالنځ اړیکی په کلکه د دې سره تړاو لري، چی یو ډیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو بل سره په پردیو ټولګي ډیریو ویشي. دوه ډیري یو بل سره پردي بلل کیږي، که دوي ګډ کوم توکی ونه لري یانی غوځي یي تشډیری وي.

غواړم، چی دا ټولګیویشنه داسی لږغوندې روښانه وځیړم، که څه هم زیاتو لوستنکو ته به ستړیکیدونکي وي، مګر لږ پوهوړ به شي. که چیرې طبیعي ګڼونه په 5 وویشو نو دلته پنځه ټولګیویشنی لاس ته راځي، چی ویشپردي دي: هغه ټولګی، چی 1 ولري او ټول 1 + n5 , ... , 1 + 5, 1 + 25 ، دوم هغه ټولګی، چی ۲ ولري او ورسره تر 2 + n5 دریم: هغه ټولګی، چی 3 ولري او ټول ورسره 3 + n5 . څلورم هغه ټولګی، چی ۴ ولري او ټول ورسره 4 + n5 . پنځم هغه ټولګی، چی 5 او ټول ورسره 5 +n 5 . چی دا په 0 سره هم ښوولی شو، چی نور ورسره ټول 0 + n5 ولري. دا ډول شمرنی بیا د ګڼونتیوري دنده ده، چی په همغه ډول کتابونو کي لوستل کیږي. هلته د کونګرو- اینځ اړیکو لاندې لوستل کیږي، چی زه یي دلته په لیك دود هم نورې خبرې نه کوم. په دې کی دې ګران لوستونکی یو پوره پام وځغلوي او ټولګی ویشنه او ایکوالنځ اړیکي دې پخپله نوري هم روښانه کړي، چی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګيويشنه په همدې وخت کي ايکويوالنځ اړيکی هم جوړوي،

دا په دې مانا چی د ايکويوالنځ اړيکو او ټولګی ويشنی ترمنځ راګرځيدونکی يواځنی اړيکي موجود دي. دا په دې مانا چی د اکويوالنځ اړيکو سره يو يواځنی تنظيم راکړ شوی او دا بيا په څټ کيدونکی هم دی.

که R په A کی يو ايکويوالنځ اړيکه وي ، نو A / R د فاکتورډيري په نامه بلل کيږي نسبت و ايکويوالنځ اړيکوR ته. هغه څيرونه چی د A او A / R ترمنځ پرته ده د طبيعي څيرونی په نامه بلل کيږي.

لنډ: ويلی شو، چی ټولګي ويشنه او ايکويوالنځ اړيکی يو له بل څخه لاس ته راځی. موږ دا شمير پوهنيز په لاندې توګه تعريفوو:

۲ . ۲ . ۸ تعريف: که ~ د ډيري A ورته والی اړيکي وي، نو د توکی a ∈ A ورته والی ټولګی يانی کلاسی يا صنف [a] په لاندې توګه ورکړ شوی دی.

$$[a]=\{ b \in A \mid a \sim b \}$$

د ورته والی ټولګي [a] هر توکی b د ټولګي [a] نماينده

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلل کيږي.

۲ . ۲ . ۱۱ مرستندوي جمله: که ~ د ډيري A ورته – والې اړيکې وي، نو د توکو $a, b \in A$ لپاره لاندې وينا وې جوړه برابرارزښته يا جوړه مساوي ارزښته دي

$$(a) \quad [a] \cap [b] \neq \emptyset$$
$$(b) \quad a \sim b$$
$$(c) \quad [a] = [b]$$

اوبې (حل): که $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ وي، نو يو $c \in A$ موجود دی د $a \sim c$ او $b \sim c$ سره. د ~ سيومتري او ترانز– يتيويتي له امله لاس ته راځي $a \sim b$. له دې امله (b) د (a) يوه لاس ته راوړنه ده يا تعقيب دی. اوس باور لري $a \sim b$. له دېامله نو $x \in [a]$ د $a \sim x$ $x \sim a$ سره برابرارز– ښته دی، او همداسې د $x \sim b$ سره. نو $[a] = [b]$ دی، او (c) له (b) څخه لاس ته راځي.
په پوره باور (a) له (c) څخه لاس ته راځي.

زيات موخور يا هدفمند دی، که يو ډيريسيستم S د يوه په نامه ايندکشنډيري يا پيژندډيري A په مرسته په نخښه کړو يا روښانه کړو. د لته A يو (پاي يا ناپای) ناتش

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډيرى دى، او هر ايندكس يا پيژندنخښې $\alpha \in A$ يواځنى يو ډيرى A له S څخه داسې ترتيب شوى دى، چې باور لري: $S = \{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

۲ . ۲ . ۱۲ تعريف : د يوه ډيري $A \neq \emptyset$ د برخډيريو A يو سيستم $\{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$ د د ډيري A يوه ټوټونه (تجزيه) بلل كيږي، كه باور ولري:

(a) $A_\alpha \neq \emptyset$ د پاره $\alpha \in A$ د ټولو

(b) $A = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

(c) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$

د ټولو $\alpha, \beta \in A$ لپاره د $\alpha \neq \beta$ سره

۲ . ۲ .۱۳ جمله : R دې په ډيري A كې يو ورته اړيكي وي. نو د ورته والي ټولګي نسبت و R ته يو د A ټوټونې دى. په څېر يو په خوښه د A ټوټونه $\{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$ يواځنى يو ورته والى اړيكي په A ټاكي، د كوم لپاره چې د ټوټونى ډيرى A ټيك ورته والي ټولګي دي.

اوبى (حل يا ثبوت): سملاسي د پورته مرستندوي جملې ۲ . ۲ . ۸ او تعريف ۲ . ۲ . ۹ څخه لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۳ نیمنظم یا نیم ترتیب

د بینار اړیکو یو بل غوره یا مهم حالت نیمنظم اړیکی جوړوي. دا هغه اړیکی دي، چی رفلکسیو، ترانزیتیو او انتیسیومتري دي. هغه ډیری، چی نیمنظم په کی تعریف وي ، نیممنظم یا نیم په ترتیب بلل کیږي. د نیمنظم لپاره دا سومبول $\leq$ کارول کیږي او د ډیري M د توکو a , b لپاره باور لري $a \leq b$ او داسی لوستل کیږي، چی a له b کوچنی او یا له b سره مساوي ده. یا a په b کی خوندي ده یا a له b څخه مخ ته ځی. که $a \leq b$ وي او $A \neq b$ وي، نو لیکو $a < b$ او وایو چي a له b څخه کوچنی ده، په دې حالت کی a په b کی اصلي خوندې ده. په یوه ډیري Mکی دی نیمنظم تعریف وي. د دې ډیر دوه توکي $a , b \in M$ یو له بل سره انډولوړ دي، که چیرې وي $a \leq b$ او یا $b \geq a$. که له $a \leq b$ څخه $a = b$ لاس ته راشی نو د ساده نیمنظم څخه غږیږو.
یو ډیری، په کوم چی دوه توکی تل یو له بل سره انډولوړ وي، نو دا ډیری لاینی نظم شوی یا منظم یا ترتیب شوی او یا ځنځیر یعنی یو له بل سره تړلی بلل کیږي.

۲ . ۳ . ۱ تعریف: د دوه نیمنظم شوي ډیریو M او 'M

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترمنځ يواځنی او په ځتې څيره کونه f موجود ده يعني

$af = a' \quad , a \in M , a' \in M'$

که له $a, b, \in M$ $a \le b$ تل $af \le bf$ لاس ته را شي او په ځتې، نو f د M او 'M ترمنځ يو ايزومورفيزم ispmorphism بلل کيږي، چی دا به وروسته هم بيا پوره وڅيړل شي او ډيري M', M پخپله ايزومورف نيممنظم ډيري بلل کيږي.

که يوه نيممنظم ډيری M په يوه نيممنظم ډيري N کی ايزومورف خوندې وي، نو دې ته ايزومورف ځايونه يا خونديونه وايو، که د M يوه ايزومورفه څيره کونه په 'N د ډيري N برخه ډيري باندې موجود وي او ډيری 'N پخلپه نيممنظم ډيری وي او که 'N په هغه نظم ترتيب وي ، چی له N ورته راپاتی وي.

۲ . ۳ . ۲ جمله:

هر نيممنظم ډيری M د ډيري N ، چی نسبت وخونديونی ته نيممنظم دی، ټولو لانديډيريو ډيري 'N سره ايزومورف دی. په ځانګړي توګه کيدی شي ، چی د ډيري N لپاره پخپله ډيری M ونيول شي يا راوړل شي.

د دې جملی د خوونی څخه تيرېږو. په کوروش کی کتل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه نیمنظم ته په څټ اړیکی هم نیمنظمی دي.
د ټولو M' $af = a', a \in M, a' \in M$ لپاره، د $a, b \in M$
سره $a \leq b$ ټیك او ټیك هلته یا هلته او هلته باور لري،
که وي: $af \leq bf$.

۲ . ۴ مینیمال شرطونه

یو د نیممنظم ډیري M توکی a د ډیري مینیمالتوکی بلل کیږي، که په M کی داسی یو توکي x موجود نه وي، د کوم لپاره، چی شرط $x < a$ باور ولري. دا روښانه ده، چی M ډیر مختلف مینیمال توکي لرودی شي او یا هیڅ مینیمال توکي .
د بیلګي په توګه ډیری N' د ټولو د ډیري N لاندډیریو یا برخه ډیریو ډیری یواځنی یو مینیمال توکی لري، داسی په نامه تشډیری . په یوه ډیري کی هر لاندې ډیری یا برخډیری مینیمال توکی دی ، که دا ډیری د یوه توکی جوړ وي. دا کلیمه د یوه ځانګړي نیمتنظیم شوي ډیري ټولګیو لپاره کارول کیږي. د دې ټولګی نیمتنظیم شوي ډیري لاندې یو بل سره ورته یا ایکویوالنت شرطونه پوره کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۴ . ۱ جمله(مینیمال شرطونه) : هر د یوه نیمتنظیم شوي ډیري M ناتش لاندې ډیری N یو مینیمال توکی (په N کی) لري.

۲ . ۴ . ۲ (د لویدونکی ځنځیر پریکیدنی شرطونه):
د نیمتنظیم شوي ډیري M په را غونډه موخه هر لویدونکی ځنځیر

$$a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ....$$

د پایډیرو غړو وروسته پرې کیږي یا ماتیږي یا غوڅیږي. په نورو کلیمو سره ، د توکو د هر لویدونکی ځنځیر

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n \geq ....$$

سره یو ایندکس یا پیژند نخښه n شته، له کومی چی د دې ډیري ټول توکی برابر دي دا په دې مانا چی د n وروسته $a_n = a_{n+1} = ...$ باور لري

۲ . ۴ . ۳ جمله (ایندکشن شرطونه): د یوې نیمتنظیم شوي ډیري M ټول توکی څه روښانه خویونه E لري. که دا خویونه په ټولو مینمال توکو (که داسی یو توکی موجود وي) موجود وي او که د دې موجودوالی، د ټولو توکو لپاره، چی له توکي a په کره توګه مخ ته ځي، پخپله په دې خویونو a

(c) ketabton.com: The Digital Library

رابندیدی شي یاني دا خویونه ولري.

د دې جملو، چي یو بل ته ورته دي، د ښوونی یا اوبیونی ثخه تیرېږو.

ویناوې چی د ټاکن اکسیوم سره همغه ارزښته دي:

ډیری N دې د یوه ډیري M لاندې ډیری وي. هر (ضرور نه دی چی په N کی خوندې وي) د M د توکی a د کوم لپاره چی شرط $a \geq x$ پوره وي د ټولو $x \in N$ لپاره، د لاندې ډیري پورته بند بلل کیږي یانی دا ډیری په دې توکی سره پورته لور ته بند دی. دا لاندې بند ته یوه دویزه کلیمه. په یوه ورکړ شوي نیمنظم ډیري M کی هره د ټولو ځنځیرونو ډیری د ډیري پوهنی په بنسټ نیمتنظیم ده. د دې ډیري ټول ماکسیمال توکی په طبیعي توګه د M ماکسیمال ځنځیر جوړوي.

یادونه : د دې پورته جملو ښوونه او زیات ورننوتنه په کروش کی کتل کیدی شي. موږ یی نوره رالنډوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . الجبري جوړښتونه

د الجبر په کتابونو کی ډیر وخت دا دلته څیړل شوي
موضوعات له توپیریدونکو یا له بیلو بیلو لارو څخه
څیړل کیږي، څنی له عمومي الجبر څخه پیل کوي
n–ځایزې عملیې، نښلونی یا کارونی تعریفوي او له
دې څخه بیا ګروپ die Gruppe ، کړۍ Ring ، تن یا
بدن Körper (engl. Field او په همدې ډول ترونونو
یا ترنو Verbände او بول الجبر boolische Algebra
ته راځی. زه دا لار غوره ګنم، چې لمړی له موږ ورسره
بلدو کاروونو یا عملیو څخه پیل وکړم او له دې لارې
بیا الجبر ته راشم، او بیا په لنډ ډول د الجبر له لارې دا
موږ ورسره بلدې کلیمي لنډې تعریف کړم.

د الجبر د مختلفو ځانګو لپاره بنسټیزه کلیمه، چې ډیره
تر څیړنی لاندې نیول شوې ده هغه د الجبري اپریشن یا
الجبري عملیې او یا همدا ډول د الجبري کارونی، الجبري
نښلوني یا الجبري ګنډني کلیمه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موړ ځانونه په یوه دوئیزې کارونی په زیاتون یا څل رابندوو یا محدودوو. دا دوئیزې کارونی یا عملیې، په لړې موخه، هغه عملي دي، چې د یوه ډیري G ټاکلي منظم د توکو جوړه (a,b) د دې ډیري په یوه بل توکی c تنظیم یا څیره کړي(لکه د G د ټاکلو غړو مربع، یعنې دا د لاندې خویونو سره یوه څیرونه ده:

$$G \times G \longrightarrow G$$

دا په دې مانا چې د ټولو $(a,b) \in G \times G$ لپاره یو c د G څخه، یعنې $c \in G$ موجود ده، د کومو لپاره چې باور لري که دا نښلونه څل وي

$$a\,.\,b \longrightarrow c$$

په دې ټولیزه توګه په یوه ډیري کی د بینار یا دوه- ځائیز عملیې کلیمی تعریف، په یوه ډیري کی د یوه ترنار ریلیشن ternäre Relation یا درېځایزو اړیکو سره په همغه یا مساوي مانا دی.

یادونه: اپریشن die Operation، عملیه ، کارونه او یا نښلونه، ګنډنه، او همدارنګه په بلواکو کی کمپوز- یشن die Komposition یا څنګ په څنګ ایښوونه یا بهتره څنځیرونه تل همغه مانا لري، چې ما کله کله

(c) ketabton.com: The Digital Library

تړنه هم کارولی ده. د ډېرو نومونو کارونه، کوم چې همغه مانا ولري، تاوان نه لري. د شمیرپوهني ژبه هم باید پوره پراخه وي او په دې باور لرو چې کومه اشتباه په کې نه رامنځ ته کیږي.

مونږ دلته د نمونې په څیر یوازې یویزې کارونې یا عملیې په ګوته کوو. او ور پسې بیا نور سملاسي خپل اصلي موخه تر مخه نیسو. دا یویزې عملیې هغه عملې دې، چې د کارولو سره یې د ډېري توکي تغیر نه خوري، لکه د صفر سره طبیعي ګڼونو N_0 توکو سره، په زیاتون کې چې هر توکي ته د صفر توکی ورزیاتونه پخپله همغه توکی دی،

د ټولو $a \in N_0$ لپاره $a + 0 = a$

او یا په ځل کې ، چې د طبیعي ګڼډیري N هر توکي سره 1 ځل شي، یعني

د ټولو $a \in N$ لپاره $a . 1 = a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱ ګروپ Gruppe:

که له یوې خوا د ټولګټونو، ریشنلګټونو یا رییلګټونو زیاتون په پام کی ونیسو او له بلی خوا ریشنل یارییلګټونو د صفر توپیرې یا د صفر سره نامساوي توکو څل په پام کي ونیسو، نو دا میندلی شو، چی دواړه نښلونعملیي یا نښلو- نکاروني د همغه یو بل سره په یوغږ شمیرقوانینو لاندې دي. د بیلګي په توګه باور لري:

$(a+b)+c=a+(b+c)$ او $(a.b).c=a.(b.c)$

برسیره پر دې راویستلي یا استثنایي ګټونه موجود دي، دا په نامه 0 همداسی 1 ، کوم چی دې دوه تړنو ته څانونه ناپیلی یا بي تاثیره نیسي. یعني:

$0+a=a$ او $1.a=a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بالاخره باور لري

$(-a) + a = 0$ او $(1/a).a = 1$

دا په دې مانا، چې هر ګڼ a ته یو ګڼ á موجود دی (دا په نامه a- همداسی 1 / a)، چې د هغو زیاتون یا همداسی د هغو ځل یا ضرب د همغی یعنی زیاتون همداسی ځل نښلونی یا نښلونعملیې له لارې ناپیلی یا بی تاثیره توکی ورکوي.

دا چې دا قاعدې ګڼونشمیرنه په پراخه پیمانه په واك کی لري او په ډیرو نورو حالتونو کی هم رامنځ ته کیږي، دا راته نزدې ده، چې دا د ځانګړي طبیعیت، دشمیرنی او د همغو ترنعملیو څخه خپلواك وڅیرو. په دې ذهني راوړون دود سره مو شمیرقاعدې د هر څه له مخه مخ ته پرتي دي. نه هغه څه، د کومو سره چې شمیرنه کیږي غوره دي، بلکه دا غوره دي، چې څنګه شمیرنه کیږي. په یواځني ډول د مخه نیول کیږي، چې د یوه ورکړ شوي ډیري غړو لپاره داسی یوه نښلونه یا ترنه یا عملیه تعریف ده، دکومی له مخی، چې هره منظمه جوړه (a,b) د هغه ډیري د توکو بیرته د هغه ډیري توکی باندې تنظیم شي یا څیره شي او دې پورته

(c) ketabton.com: The Digital Library

ويلشوو قوانينو لاندې پرتې دي يا په بل عبارت دا پورته قوانين په کې باور لري.
دا نښلونه د يوه ناپيلې سومبول ° سره ښايو.

يادونه : دا سومبول له خپل ځاي جګ ليکل شوی دی، خو زما بله چاره نه وه. د دوه ګڼونو نښلونو ټيك منځ کې که وليکل شی ښه به وي.

۳ . ۱ . ۱ **تعريف** : يو ګروپ ديوه ډيري G او يوې ترڼي يا عمليي ° څخه جوړ دی، دکومی نښلونی سره چی د دې ډيري G د توکو هره منظمه جوړه (a,b) يواځنی يو د $a° b$ سره په نخښه شوی د G توکی باندې داسی تنظيم شي، چی دا لاندې اکسيومونه پوره کړي:

اکسيوم ۱ – اسو ځياتيو قانوباور لري

د ټولو $a,b,c \in G$ لپاره $(a° b)° c= a° (b° c)$

اکسيوم ۲ – يو ناپيپلی توکي $e \in G$ شته، د ° تړاو سره ، د کوم لپاره چی باور لري

$$a° e= e ° a = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسیوم ۳ – د هر توکی a لپاره یو په څټ توکی á شته، د کوم لپاره چي لرو:

$$a \circ á = á \circ a = e$$

د G داسی یو توکی ناپیلی توکی بلل کیږي

یو ګروپ کموتاتیو یا ابلي ګروپ abelsche Gruppe بلل کیږي، که پر دې پورته اکسیومونو برسیره، دا لاندې اکسیوم ۴ هم پوره کړي:

اکسیوم ۴ – کوموتاتیو قانون:

د ټولو $a, b \in G$ لپاره $a \circ b = b \circ a$

که ګروپ G پای ډیر توکی ولري ، نو د G د توکو ګڼون یا تعداد |G| د G نظم بلل کیږي.

د ګروپ ټاکنتهوټو پورې د ډیري G ترڅنګ د ګروپتړنه ° داسی په نامه اپریشن، نښلونه یا کارونه یا عملیه هم اړه لري یا تعلق لري.

یو ګروپ نو په دې توګه د یوې جوړې (G , °) سره په نخښه کول کیږي. دا چی ګروپتړنه ډیر واره په دې اړوند

(c) ketabton.com: The Digital Library

کره ټاکلی ده، نو په داسی حالتونوکی ددې جوړې په ځای یواځی G لیکل کیږي. گروپټرنه تر یوې اندازې پورې د گروپځل یا گروپضرب سره هم نومول کیږي، نو په دې توگه دا توکی $a^\circ b$ د توکو a او b د ځل په نامه هم بلل کیږي. په یوه ناابل – یا ناکموتاتیوگروپ کی دې د توکو ترتیب یا لړیپرلپسی ته هم پام وي، ځکه چی په یوه ناابل گروپ کی په ټولیزه توگه $a^\circ b$ له $b^\circ a$ سره توپیر لري .

اکسیوم۱ را په گوته کوي، چی په ډیرواره ځلولو کی په نوکانو کی بندونه یا راگیرونه پورې اړ تیا نه ځرگندیږي. له دې امله کیدی شی ، چی له نوکانو ایښوولو څخه بیخی تیریدنه وشي او د بیلگي په توگه د $a^\circ (b^\circ c)$ لپاره په ساده توگه لیکو

$$a^\circ b^\circ c$$

۳ . ۱ . ۲ بیلگی :

اول – د ټولو ټولگښونوډیری Z د ورسره بلد زیاتون سره، چی د کروپټرنی په څیر یی نیسو، یو ابلگروپ (+; Z) جوړوي. دلته بیا له زیاتونگروپ څخه غبږیږو، په همدې توگه د ریشنلگښونو ډیری او داسی نور. په دې ټولو حالتونو کي د اکسیوم ۱ لپاره د e لپاره 0 او د a په څټ توکی á

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a- سره په نخښه کوو.

دوم – په ځمککچ یا هندسه کی : د ټولو کونګروواینځ ځیرونو (څرخون، ځایبدلون، یا راکښنه ، او اینونه یا هندارونه) ګروپونه جوړوي(ما په دې اړه یوه د هندسی برخه هم په یوه کتاب کی راوړې، چې‌لږڅه‌کتاب څخه به تر مخه چاپ شوي وي، دا کلیمي که نا بلدې وې نو بیا دې هلته وکتل شي).

دریم : د ټولو ریشنلګڼونو ډیری *Q او د ټولو رییلګڼونو ډیري *R توکي، چی د صفر سره، نسبت و ځل یا ضرب ته، نابرابر یا نامساوي وي، یو ابلګروپ جوړوي، دا د ډیریو *Q او *R ځلونکی ګروپ یا ضربګروپ بلل کیږي. په دې ګروپونو کی e د 1 او á د ماتګڼ a / 1 په ځیر لیکل کیږي.

څلورم: M دې یو په خوښه ناتش ډیری وي ، او S_M دې د M د ټولو بییکتیو ځیرونو یا بیکشنونو ډیری وي. د هر دوه ځیرونو $f,g \in S_M$ لپاره $f \circ g$ د دې دواړو ځیرونو یو په بل پسی راوړنو له لارې ټاکل شوی ځل دی. د هر درې ځیرونو f,g,h او هر $x \in M$ لپاره دا لاندې باور لري

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(hx) = f(g(h(x)))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$(f\circ(g\circ h))(x) = f((g\circ h)(x)) = f(g(h(x)));$$

دا په دې مانا چې اکسیوم ۱ پوره دی. که د e لپاره د M کتمټ ځیرونه id وټاکل شي، نو اکسیوم ۲ باور لري.
بالاخره اکسیوم ۳ باور لري، که د ورکړ شوي $f \in S_M$ لپاره د ځیرونی f^{1}، هغه f ته په ځټ ځیرونه f^{-1} وټاکل شي. ډیری S_M د یو په بل پسی د ځیرونو ځلونی یا ضربوني له امله یو ګروپ جوړوي، چې د ډیري M سیو- متري ګروپ بلل کیږي.
که په ځانګړي توکه ډیری M ډیری $\{1,2,3,...,n\}$ وي، نو دا اړونده سیومتري ګروپ ځیفرونه یا ګڼونه $1 , 2 , 3 , ...,n$ په ساده توګه د S_n سره په نخښه کوو. هره ځیرونه $f \in S_n$ د ګڼونو $1,2,3,...,n$ پرموتیشن یا بدلون دی. که $f(1) = a_1 ,\ f(2) = a_2 ,\ ..., f(n)= a_n$ باور ولري، نو f د ځیره ګڼونو پرلپسی لړی $a_1 , a_2 , ...,a_n$ یواځنی ټاکلی ده. موږ لیکو $f = (a_1,a_2,...,a_n)$، که د بیلګي په توګه باور ولري $n = 3$ او $f = (2,3,1) , g = (3,2,1)$ نو لاندې ځلونه یا ضربونه لاس ته راځي

$$f\circ g = (1,3,2) \quad \text{او} \quad g\circ f = (2,1,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بیلګه ښایي، چې S_n د $n = 3$ لپاره ابل ګروپ یا کموتاتیو ګروپ نه دی.

۳ . ۱ . ۳ یادونه: دا د صفر سره نامساوي ټولګټوونه ، نسبت و ځلونی یا ضرب ته ګروپ نه جوړوي، ځکه چې د بیلګي په توګه و 2 ته کوم ټول ګڼ $\acute{a}$ وجود نه لري، د کوم لپاره، چې $2.\acute{a} = 1$ باور ولري.

د ګروپ د اکسیومونو څخه کیدی شي ، چې په لاندې کی یو څو ساده «لاس ته راوړنی » رابیلي کړو. په لاندې کی دې G تل یو ګروپ وي

۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جمله: د هر توکی $e \in G$ لپاره، چې اکسیومونه۱ ، ۲ پوره کوي دا هم باور لري $a^\circ e = a$ د ټولو $a \in G$ لپاره. له $\acute{a}\,{}^\circ a=e$ څخه $a^\circ \acute{a} = e$ لاس ته راځي.

اوبی یا ثبوت: لمړی دوهمه غوښتنه ښوول کیږي: و a' ته د اکسیوم۳ له مخی یو $a \in G$ د $a'.a = e$ سره موجود دی. د اکسیومونو۱ او ۲ په پام کی لرلو سره لاس ته راځي

$$a\,{}^\circ a' = e^\circ(a^\circ a') = (a''^\circ a')^\circ(a^\circ a') = a''^\circ((a'^\circ a)^\circ a')$$
$$= a''^\circ(e^\circ a') = a''^\circ a' = e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه اوس لمړی غوښتنه لاس ته راځی

$$a^\circ e = a^\circ (a' \circ a) = (a^\circ a')^\circ a = e^\circ a = a \qquad *$$

۳ . ۱ . ۵ مرستندوي جمله: ټیك یو توکی $e \in G$ موجود دی، چی هغه په اکسیوم ۲ او اکسیوم ۳ کی غوښتل کیږي. همدا اوس له $x^\circ a = a$ څخه د ټولو $a \in G$ لپاره لاس ته راځي: $x = e$.

اوبی یا ثبوت: توکی e^* دې هم برابرون $e^* \circ a = a$ پوره کړي، د ټولو $a \in G$ لپاره. نو بیا په ځانګړي توګه د ۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جملې له امله باور لري

$$e^* = e^{*\circ}e = e$$

دا په دې مانا چي e یواځنی ټاکلی دی. که بیا هم ورپسی باور ولري $x^\circ a = a$ د یوه کره ټاکلی توکي $a \in G$ لپاره، نو د اکسیوم ۳ له امله یو $a' \in G$ موجود دی د $a' \circ a = e$ سره، او د ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي:

$$x = x^\circ e = x^\circ (a^\circ a') = (x^\circ a) \circ a' = a^\circ a' = e \qquad *$$

دا په دې توګه د اکسیومونو سره یواځنی ټاکلی ناپیلی یا بی

(c) ketabton.com: The Digital Library

تاثيره د ګروپ G توکی e د ګروپG «يوی توکی» بلل کيږي.
په زياتونډوله ليکلي ابلګروپ G کي ناپيلی توکی e د G «صفرتوکی» 0 بلل کيږي.

۳ . ۱ . ۶ مرستندوي جمله : په اکسيوم ۳ کي 'a د a له لارې ياد a سره يواځنی ټاکلی ده .

اوبی يا ثبوت: د $a' \circ a = e$ تر څنګ دې $a^* \circ a = e$ هم باور ولري. پرتله ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$a^* = a^* \circ e = a^* \circ (a \circ a') = (a^* \circ a) \circ a' = e \circ a' = a'$$

دا توکی 'a د a « په څټ توکی» بلل کيږي او د دې لپاره په ټوليزه توګه a^{-1} ليکل کيږي. که په ځانګړي توګه د ګروپ-عمليي يا د ګروپټرنی زياتون ډوله وليکل شي
پرتله ۳ . ۱ ۲ الف، نو ناپيلی توکی په 0 سره ليکل کيږي او د a په څټتوکی د a- سره ليکل کيږي.

۳ . ۱ . ۷ مرستندوي جمله: $(a^{-1})^{-1} = a$
او $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

اوبی: دا په ۱ . ۳ . ۴ کی ښوول شوي برابرون $a \circ a' = e$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مخی لرو، چی a و a^{-1} ته په څتې توکی دی، چی په دې توکه لمړی غوښتنه باور لري. دومه له لاندې څخه لاس ته راځي

$$(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) = b^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ b)$$
$$= b^{-1} \circ (e \circ b) = b^{-1} \circ b = e \qquad *$$

۳ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله: په یوه گروپ G کی برابرون $x \circ a = b$ او $a \circ y = b$ په ورکړشوو توکو $a,b \in G$ سره یواځني ټاکلي حلونه یا اوبیونی $x,y \in G$ لري.

اوبی یا حل : که $x \in G$ د لمړي برابرون اوبی وي، یعني که باور ولري $x \circ a = b$ نو لاس ته راځي:

$$x = x \circ e = x \circ a \circ a = b \circ a$$

دا په دې مانا، چیx د a او b سره یواځنی ټاکلی . په څپ د

$$(b \circ a) \circ a = b \circ (a \circ a) b \circ e = b$$

له امله توکی $x = b \circ a$ په رېښتونی یو اوبی یا حل دی.
په همدې توگه دوهم برابرون هم پاي کولی شو. *

په لاندې کی غواړم، چي داپورته د گروپ تعریف لږ وغزوم

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په دې توګه ګروپوئید او نیمګروپ تعریف کړم. دا کار په زیاتو ادبیاتو کې لمړی سر ته رسیږي، خو داسې تعریفونه یې هم په پوهیدلو کې ستونځې نه رامنځ ته کوي او ما هم غوښتل، چې موږ لمړی د ګروپ کلیمه باندې وپوهیږو، چې بنسټیزه ده.

۳ . ۱ . ۹ تعریف : یو ډیری G ، چې نسبت و یوه اپریشن یا ګنډنې یا عملي ° ، چې موږ یې دلته د ځل عملیې « . » په ځیر ښایو، ته رابند وي، نو دې ډیرې ته ګروپویید وایو، یانې که د هرې جوړې (a,b) د $a, b \in G$ لپاره یو توکی $c \in G$ موجود وي ، د کوم لپاره چې باور ولري $a.b = c$ لیکنه یې په لاندې توګه ده $(G , .)$.

دا د ګروپوئید کلیمه لږ را تنګوو او نیمګروپ تعریفوو.

۳ . ۱ . ۱۰ تعریف . هغه ګروپوئید G، په کوم کې، چې پورته د ګروپ اکسیوم ۱ باور ولري یا نې ځل یې اسو- ځیاتیو وي، نیمګروپ بلل کیږي، چې په همغه پورته توګه د اوس لپاره نخښوو٘ن کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چی نیمگروپ همغه گروپ دی، دا لاندې جمله یې روښانه را په ګوته کوي

۳ . ۱ . ۱۱ جمله : یو نیمګروپ G هلته او هلته یو ګروپ G دی، که په G کې کم له کمه یو ښی یویتوکی e موجودوي، چی لاندې شرطونه پوره کړي

د ټولو $a \in G$ لپاره $ae = a$

او دا توکی e داسی وټاکل شي، چی د هر $a \in G$ لپاره کم له کمه یو ښی په څټ توکي $a \in G$ موجود وي، چی غوښتنی

$$a \,.\, a^{-1} = e$$

پوره کړي.

اوبی یا حل : که دا پورته ورکړ شوې غوښتنی پوره وي، خو دا مو وښوول، چی ګروپ جوړوي. اوس دې یو نیمګروپ G راکړ شوی وي، چی پورته نیونی پوره کوي. دا غواړو وښایو، چی e په G کی یو کیڼ یویتوکي هم دی. که د a^{-1} سره د a ښی په څټ توکی وښایو ، نولاس ته راځي

$$eaa^{-1} = ee = e = aa^{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د برابرون دواړه خواوې د یوه و a ته په ځتې توکي سره ځل کړو او د نیمګروپ د ځل یواځنوالي قوانین وکاروو یا استعمال کړو، نو لاس ته راځي

$$eae = ae$$

له کوم ځخه چې د حلونکی یا اوبیوونکی اړیکی $ea = a$ لاس ته راځي.

بالاخره د G ګین یویتوکي e' او ښی یویتوکي e'' رانیسو، نو د مخ ته تیرو جملو ثبوت ځخه دا اوبي یا حل $e'' = e'$ لاس ته راځي، چې په دې توګه د G یوي(یویتوکي) e موجودیت او یواځنتوب وښوول شو.

بیا دې a^{-1} د یوه توکی $a \in G$ ښی په ځتې توکی وي.

که برابرون $aa^{-1} = e$ له کینې لور د a^{-1} سره ځل کړو، نو لاس ته راځي

$$a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$$

د a د ښي په ځتې توکي د اخرني برابرون ځلولو یا ضربولو ځخه لاندې نتیجی ته راځو

$$a^{-1}ae = e$$

له کوم، چې $a^{-1}a = e$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا توکی a^{-1} ته له دې امله یو کیڼ په څټ توکی هم دی.
لکه د مخه تیرې جمله د د ثبوت په توګه، کیې شي ساده وښوول شي، چی د a هر ښی په څټتوکي د کیڼ په څټتو کی سره پریوځي یا هغي سره ورته دی.
په دې توګه په G کې د هر توکی a لپاره د هغه توکی په څټتوکي موجودیت په یواځنی توکه تضمین دی.
د جملي د ثبوت د پوره کیدو لپاره دې په ګوته شوی وي، چې توکي

$$x = a^{-1}b \quad \text{او} \quad y = ba^{-1}$$

د برابرون $ax = b$ او $ya = b$ حل ښايي. دا حلونه یواځنی دي، ځکه، چی $ax = xa$ دی، نو له کیڼ څخه یی د a' سره ځلوو او $x = x$ لاس ته راځي. پای یا *

د ابلګروپ د څیړنی لپاره، د ځل عملیي په ځای د زیاتون ګنډنه یا عملیه په کار اچوو، چی ناپیلی توکی یی 0 دی او هر توکی a ته په څټ توکی یی د $-a$ سره په نخښه کوو.
دلته هم همغه پورته جمله کاروول کیږي، خو د ښی یویتوکي لپاره 0 صفر یوي توکی دی او ښی په څټ یی $-a$ دی. د په څټ عملیي یواځنتوب

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه نیمګروپ بیلګه چې ګروپ نه وي.
که د طبیعي ګڼونوډیرې N پام کې ولرو، نو دا ډیرې د زیاتونعملیې ته نیمګروپ جوړوي، خو دا ګروپ نه دی، ځکه، چې په دې ډیرې کې، په هر حالت کې کمون نه دی تعریف.

که نسبت و ځل ته د ګڼونو څخه ګروپ جوړوو، نو باید دا مو پوره په پام کې وي، چې دا ګڼونډیرې د صفر توکی ونه لري، ځکه چې په صفر پرویشنه نه ده تعریف.

۳ . ۲ بدن یا تن او کړی

Körper und Ring (Field and ring)

په داسې حال کې چې د ګروپ اپریشنونه یا ګروپ عملیې یوازې له یوه تړونعملیې څخه منځ ته راځي، اوس دوه عملیې څنګ په څنګ راوړل کیږي، چې په ورسره د ګڼو- نشمیرني بلد ډول، چې زیاتون «+ » او ځل یا ضرب « . » سره ښوولکیږي، تکیه کوو. که له ریشنل ګڼونو څخه مخ ته ولاړ شو، نو د هلته باوري شمیر قاعدو څخه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته ذهنیت، لکه په ګروپونو کی، نوي الجبري جوړ-ښتونه لاس ته راځي.

۳ . ۲ . ۱ **تعریف** : یو بدن یا تن د یوه ډیري F او دوه عملیو + او . څخه جوړدی، چی د F د توکوهره جوړه (a,b) د F په یوه یواځنی توکی a+b همداسی a.b باندې داسی څیره کړي، چی لاندې باوري کړي یا لاندې په کی باور ولري:

ډیری F دې و + ته یو ابل ګروپ وي، دا په دې مانا، چی لاندې باوري کیږي

۱ – د زیاتون اسوڅاتیو قانون

. د ټولو $a,b,c \in F$ دلپاره $(a+b)+c = a+(b+c)$

۲ – د زیاتون کموتاتیو قانون

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a+b = b + a$

۳ – په F کی یو صفر توکی 0 شته، دا په دې مانا چی $0+a = a+0 = a$ باور لري د ټولو $a \in F$ لپاره.

۴ – هر توکی $a \in F$ ته یو توکی $-a$ په F کی موجود

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د $(-a)+a = 0$ سره ، د کوم سره چي 0 په F کی صفر توکی دی

د F توکو د ځل یا ضرب . لپاره باور لري

۵ - اسوشیاتیو قانون

د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره $(a.b).c = a.(b.c)$

۶ - په F کی یو یویتوکی 1 شته ، دا په دې مانا ، چی $1.a = a.1 = 1$ د ټولو $a \in F$ لپاره .

۷ - هر توکی $a \in F$ ته د $a \neq 0$ سره ، یو توکی a' د $a.a' = 1$ سره موجود دی ، چیرته چی 1 د F یوی توکی دی.

۸ - دیستریبوتیو قانون

$a.(b+c) = a.b + a.c$ او $(b+c).a = b.a + c.a$

د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره

۹ - $1 \neq 0$

که یوائې د اکیسیومونو ۱ - ۵ او ۸ باوریتوب وغوښتل شي، نو F ته کړی بللل کیږي.

که برسیره پر دې اکسیوم ۱۰ باور ولري یعنی

۱۰ - د ځل کموتاتیو قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a . b = b.a$
نو F یو کموتاتیو تن یا کموتاتیو بدن او همداسی کموتاتیوکړی بلل کیږي

لکه څنګه په ګروپ کی په همدې توګه یوه کړی یا تن هم د $(F.,+,.)$ په ځاي د F سره په نخښه کوو. د ځل لپاره سومبول «.» نه لیکل کیږي او د دې لپاره لنډ لیکو ab . ډیر واره د «بدن» یا «تن» لاندې کموتاتیو بدنونه پو- هیږو، په داسی حال کي، چی ناکموتاتیو بدنونه، «کاږه بدنونه» بلل کیږي. دلته به موږ تل کموتاتیتو بدنونه تر څیړنی لاندې نیولي وي.

د اکسیوم ۱ او اکیسوم ۵ له امله کیدی شي، چی نوکان نور هم پرینښوول شي یا تیریدنه ترې وشي یا ونه لیکل شي. د نوکانو د نه لیکلو لپاره یو بل د مخه پیژندل شوی قرارداد یا پریکړې یو قاعده هم شته، چی د ټکو لکه ځل عملیه د کرښو لکه زیاتون عملي څخه د مخه اجرا کیږي.
لکه د $(ab)+c$ په ساده توکه $ab+c$ لیکل کیږي. دا ساده- والی همدا اوس د اکسیوم ۸ په فرمولولو کی وکارول شو.
د بدن F یا همداسی د کړی R ناپیلی توکی وزیاتون ته صفر-

(c) ketabton.com: The Digital Library

توکی دی او یا لنډ صفر دی. دا په ځنې توکي $-a$ و a ته منفي توکی بلل کیږي. د $b+(-a)$ په ځاي لنډ لیکوو $b-a$ او دا کارونه د a او b کمون بولو.
باور لري $a+(b-a)=b$ او $b-a$ د ۳ . ۱ . ۸ له مخی د برابرون $a+x=b$ یواځني حل دی. د ۳ . ۱ . ۷ له امله بالاخره باور لري $-(-a)=a$ او $-(a+b)=-a+(-b)=-a-b$.
دا د $F^*=F\setminus\{0\}$ ځلګروپ ناپیلي توکی 1 د بدن یا تن F یویتوګي یا ساده یوی بلل کیږي. کړی دي ته ضرورت نه لري چی یویتوکي ولري» که یویتوکی موجود وي نو یواځنی به ټاکلي وي.

۳ . ۲ . ۲ د بدنونو لپاره بیلګي

الف – د ریشنلګڼونو ډیری Q او همداسی د رییل ګڼونو ډیري R په ورسره بلدو ترنو یا عملیو له لارې یعنی زیاتون او ځل له لارې هر یوکموتاتیو بدن یا تن جوړوي،

ب – د ټولو کمپلکسګڼونوډیری C هم یو کموتاتیو بدن یا تن جوړوي. په روښانه توګه یا ډول یو کملکس ګڼ a دا لاندې بڼه لري $a=a_1+a_2i$ د رییل ګڼونو a_1 , a_2 سره او

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایماګیناریوون i سره، د کوم لپاره چې $i^2 = -1$ باور لري.
دا a_1 د a رییل برخه او a_2 د a ایماګینار برخه بلل کیږي.
په نخښونه : $a_1 = Re(a)$ او $a_2 = Im(a)$
که $b = b_1 + b_2 i$ یو دوم کمپلکس ګڼ وي، نو زیاتون، کمون او ځل یی په ځرګنده توګه په لاندې ډول روښانه دي یا تشریح شوي دي:

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) \pm (a_2 + b_2)i,$$
$$a\,b = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,i$$

دا و کمپلکس ګڼ $a = a + ai$ ته کوجوګیري کمپلکس ګڼ $\bar{a}$ د $\bar{a} = a_1 - a_2 i$ سره تعریف دی. په دې پسې تړلي لاس ته راځي

$$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}, \quad \overline{ab} = \bar{a}\,.\,b, \quad \bar{\bar{a}} = a,$$
$$a + \bar{a} = 2Re(a) \quad , \quad a - \bar{a} = 2iIm(a)$$

د یوه په خوښه کمپلکسګڼ a لپاره باور لري

$$a\bar{a} = (Re(a))^2 + (Im(a))^2$$

له دې امله $a\bar{a}$ تل یو نامنفی رییلګڼ دی، او $a\bar{a} = 0$ د $a = 0$ سره برابر ارزښته دی.
که $a \neq 0$ یو کمپلکسګڼ وي، نو باور لري $a\bar{a} \neq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $C \ni aa$ / $a = \bar{a}$. د کمپلکس ګڼ ارزښت $|a|$ ،
چې $a = a_1 + a_2 i$ د نامنفی رییلګڼونو ريښه ارزښت
دی. $a\bar{a} = a_1^2 + a_2^2$ دا په دې مانا، چي

$$|a| = +\sqrt{a^2 + a^2}.$$

رییلګڼونه ځانګړي کمپلکس ګڼونه دي، په نامه هغه ګڼونه،
چی ایماګینار یی ورکیږي: کمپلکسګڼ ټیك هلته یا هلته او
هلته یو رییلګڼ دی، که $a = \bar{a}$ وي.

۳ . ۲ . ۳ د کړیو لپاره بیلګی:

الف –د ټولو ټولګڼون ډیری Z یوهٔکموتاتیو کړی‌ده، دٔیوي
سره.* مګر Z بدن نه دی، ځکه، چی د بیلګي په توګه ۲
په Z کی نسبت و ځل ته په ځټ نه لري. یعنی 1/2 په Z
و 2 ته په ځټ توکی نه دی.

ب – جوړه ټولګڼونه $R = 2Z$ ددي لپاره بیلګه ده، چی
صفرتوکی نه لري.

پ – F دې یو کموتاتیو تن وي. یوه د لاندې بڼې افاده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

د $a_i \in F$, $i = 0,1,2,...,n-1,n$ سره پولینوم بلل کیږي د یوې نامعلومې x سره او چې ځلووني یا ضریبونه او یا کوایفځینتونه يي له F وي. که $a \neq 0$ وي، نو n د پولینوم f (x) درجه بلل کیږي.

نخښونه یې: ګراد $\text{Grad } f = n$

که حتی $a = 1$ وي، نو f(x) يو نورمي شوی پولینوم normiertes Polynom بلل کیږي. د صفر درجي پولینومونه ثابتی دی د $0 \neq a \in F$ سره. صفر پولینوم $0(n=0,a=0)$ سره درجه نه ترتیب یا تنظیم کیږي.

د ټولو پولینومونو f(x) ډیری، چې ځلووني یې له بدن F څخه وي د F[x] سره په نخښونو یا په نخښنه کوو. په F[x] باندې زیاتون (په ورکړشوی حالتکي د صفرځلوونو سره) او یو ځل یا ضرب په دې لاندې ډول تشریح شوي

$$(a_0 + a_1x+a_2x^2+,,,+a_nx^n)+(b_0+b_1x+ b_2x^2+...+b_nx^n)$$
$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x +...+(a_n+b_n)x^n \; ,$$

$$(a_0+a_1x+...+a_mx^m).(b_0+b_1x+...+b_nx^n)$$
$$= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+ ...+a_mb_nx^{n+m}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

و زیاتون « + » او ځل « . » ته F[x] یوه کړی‌ده، د پولینو 1 سره د یویتوکي په څیر. پولینومډیری F[x] پولینوم کړي په F باندې بللکیږي، د ناپیژنونکی x سره.

دې تراوسه یادشوو بدنونو ترمنځ د کمپلکس ګنونوګروپ یو ځانګړی ځای لري، له دې امله په ځانګړي څیړنی کی ځانګړی رول لري، ځکه چی ددې لپاره د الجبر اصلي جمله باور لري کومه چی په لاندې ډول ده :

۳ . ۲ . ۴ جمله: هر یو پولینوم $f(x) \in C[x]$ د $Grad\ f > 1$ سره د لاینې پولینومونو په ځلوونویا ضریبونو توټه کیږي، دا په دې مانا، چی $f(x)$ ته ډیر پای مختلف کمپلکس ګنونه c موجود دي، او طبیعي ګڼونه k په داسی توګه یا ډول چی لاندې باوري کوي:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - c_i)^{k_i} \quad \text{او} \quad Grad\ f = \sum_{i=1}^{m} k_i.$$

دا جمله دلته نه ثبوت کیږي.

دا لاندې جملی دا را په ګوته کوي، چی په خوښه کړیو او بدنونو یا تنونوکي ، په ورسره بلد ډول شمیرنه کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۲ . ۵ مرستندوي جمله:
په یوه کړی کی باو رلي: $0.a = a.0 = 0$ د هر توکي a لپاره .
اوبی یا حل :د $0 = 0+0$ اوی د اکسیوم۸ له امله باورلري:

$$0.a+0.a = (0+0)\ .a = 0.a$$

د دې او ۳ . ۱ . ۴ څخه لمړی اوبی $0.a = 0$ لاس ته راځي، دوهم اوبی یا حل په ورته توګه لاس ته راځی . *

۳ . ۲ . ۶ مرستندوي جمله: په یوه کړی کي باور ري

$$a(-b) = (-a).b = -ab$$

په ځانګړي توګه دا لاندې باور لري

$$(-a)(-b) = ab$$

اوبی: د ۸ او ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$ab + a(-b) = a(b-(b)) = a\ .\ 0 = 0$$

په دې پسی $a(-b)$ و ab ته منفي توکی دی، دا په دې مانا چی باور لري

$$a(-b) = -(ab)$$

په ورته توګه دوم برابرون لاس ته راځي. *

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مخه مو د بدن کليمه روښانه کړه، اوس غواړم، چي دا کليمه له يوې بېلې لورې هم، يا بهتره، په يوه بل ډول تر څېړنې لاندې ونيسم او هغه په دې ډول، چې هغه مو ورسره بلد د ټرونکارونو نخښې ونه کاروم او دوه ذهني ټرونونه راوړم، چي وروسته کار مو بيا همداسي مخ ته بيولی دی:

۳ . ۲ . ۷ **تعريف** :د ډيري M هغه جوړښتونه بدن بلل کيږي، د کومو لپاره چي باور ولري:

۱ – په ډيري M کی دوه ټراونه ° او o تعريف دي
۲ – دلته (M ; °) کموتاتيو گروپ دی
۳ – دلته ($M\backslash e_0$; o) يو گروپ دی او e_0 يو ناپيلی توکی دی و° ته.

دا لاندېقوانين باور لري:

۴ – ديستريبوتيو قانون: $ao(b°c) = (a° b)o(a°c)$

$(a° b)oc = (aoc)°(boc)$

په يوه کموتاتيو بدن کي په دې برسيره باور لري

۵ – کموتاتيو قانون : $aob = boa$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ لاندېګروپ او لاندېکړی

۳ . ۳ . ۱ تعریف : د یوه ګروپوئید G برخډیری یا لاندګڼیري U ګرپوئید بلل کیږي، که د U د هرو دوه توکو همغه تړنه ° (ځل) د دې ډیري U توکی وي.
که G نیمګروپ وي، نو بیا په نتیجه نیونه کی له یوه لاندې نیمګروپ څخه غږیږو.

۳ . ۳ . ۲ تعریف : یو د ګروپ G برخډیری U یو د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ Subgrupp بلل کیږي، که U نسبت د ګروپ G ګرڅې عملیو یا ګروپتړون ° ته پخپله ګروپ وي.
په نخښونه $U < G$.

۳ . ۳ . ۳ مرستندوي جمله: د ګروپ $(G,°)$ یو ناتش برخډیری U ټیك هلته یا هلته او هلته د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ دی، که د هرې جوړې $a,b \in U$ لپاره تل باور ولري

$$a \circ b \in U$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبې یا حل: شرایط په پوره باور ضرور دي. دا باید وښوول شي، چې پوره کیدونکي هم دي.
دلته دې e د G یوی توکی وي. د U |= Ø له امله یو $a \in U$ موجود دی. نو لرو $e = a^\circ a' \in U$ او e د U یوی توکی دی. وربسی باور لري $a = e^\circ a \in U$ د هر $a \in U$ لپاره. د مرستندوي جملي له امله لرو $a^\circ b \in U$ د ټولو $a,b \in U$ لپاره.
ساده کتل کیږي، چې په U کی اسوځیاتیو قانون باور لري.
پس $(G , ^\circ)$ یو ګروپ دی.

۳ . ۳ . ۴ تعریف : د یوې کړی R لاندېډیری A، نسبت و هغه په R کی تعریف شوو عملیو ته، یوه لاندې- کړی بلل کیږي. دا په دې مانا، چې په A کی د R ټولې ترنې یا عملیې باور ولري. یا په بل عبارت، چې A نسبت و زیاتونګروپ ته یو لاندې زیاتونګروپ جوړوي او د R ځلګروپوئید ته لاندېګروپوئید جوړوي، او په همدې ډول په R کي تعریف دیستریبوتیو قانون په لاندېډیري A کی هم باور لري.

په ورته توګه د بدن یا تن F لاندې تن هم تعریف دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ . ۵ جمله : د G لاندېګروپونه پخپله G او یونلاندیګروپ E ، چې له یویتوکی څخه جوړ دی، دي. په ورته توګه د کړی R لاندیکړی پخپله R او د صفر- توکي څخه جوړه شوې ، صفرکړی دي.

د نورو لاندیګروپونو غوره بیلګو جوړولو لپاره د یوه توکی د پوتنځ (Potenz) کلیمه پلی کوو یا رامنځ ته کوو. G دې یو په خوښه نیمګروپ وي او a دېد هغه په خوښه یو توکي وي.د ځل اسوځیاتیو قانون دا اجازه راکوي، چې په یواځنی توګه (یواځنی ته دې د ګرانو لوستونکو تل پاموي، چې د څه لپاره کارول کیږي) د یو په خوښه پوتنځ یا توان

$$a^n, \quad n = 1,2,...,n$$

تعریف کړو، او دا باور لري

$$a^k . a^l = a^{k+l} \qquad (1)$$
$$(a^k)^l = a^{kl} \qquad (2)$$

له (1) څخه لاس ته راځي، چې په یوه نیمګروپ G کی د یوه توکی ټول مثبت توانونه یو ابل نیمګروپ جوړوي، چې د a توکي څخه منځ ته راغلی یا جوړ ځیکلیکي یا بیرته راګرځیدونکی لاندېګروپ بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که G برسیره پر دې یو ګروپ وي، نو لمړی داسی نیسو، چی $a^0 = 1$ او بالاخره د توکي a منفی توانونه هم پلي کوو. که n یو طبیعي ګڼ وي نو د لاندې برابرون

$$a^n (a^{-1})^n = 1$$

راجوړیدنه په ساده توګه کتل کیږي، له کومی چی بیالاس ته راځي

$$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} \qquad (3)$$

دا توکی، چی د (3) دواړه خواو کی یی ځاي نیولی د a^{-n} سره ښایو یا په نخښه کوو. برابرونونه (1) او (2) د ګروپG د یوه ټولګنیز توکي a لپاره ریښتوني پاتي کیږي او د a ټول توانونه د صفر او منفی پوتنځ پورې له دې امله د G یو لاندیګروپ جوړوي. دا لاندې ګروپ د a څخه جوړ بیرته راګرځیدونکی zyklische Untergruppe لاندېګروپ بلل کیږي او په {a} سره په نخښه کیږي.
په زیاتون لیکدود سره بیا د a دپوتنځ په ځاي د هغه ډیرځلی راوړل کیږي.

په ګروپ G کی د یوه توکي a توان یا پوتنځ په مختلف جګګڼ یا اکسپوننت Exponent سره ضرور د مختلف

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګروپ توکي نه ورکوي یا نه رامنځ ته کوي، کوم چې د ناپای ګروپ له موجودیت څخه جوتیږي. که د a ټول توانونه توپیر ولري یا په بل عبارت مختلف وي، نو a د ناپایښیر نظم توکی بلل کیږي، په بل ډول بیا یو د پاینظم توکی بلل کیږي.

په دوم حالت کی یو ټولګڼ k او یو ټول ګڼ l د $k > l$ او

$$a^k = a^l$$

سره موجود دي.

له دې څخه لاس ته راځي $a^{k-l} = 1$ ، چیرته چی $k - l > 1$ دی، نو له دې امله د a توانونه شته، چی د یویتوکي سره برابر دي. ددې اکسپوننت یا جګګڼ کوچنی مورډ د a نظم بولو یا نوموو.

که a یو د پاینظم n توکی وي، نو بیا په روښانه توګه توکي

$$1 = a^{0}, a, a^{2}, \ldots, a^{n-1} \qquad (4)$$

ټول یو له بل توپیر لري او هر وریسي منفی یا مثبت د a پوتنځ a^k د یوه دې په (4) کی وکړشوو توکو سره برابر دی. دا په لاندې ډول لیدل کیږي: دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$k = nq + r, \qquad 0 < r < n$$

نو له (1) او(2) اړیکو a = 1 څخه لاس ته راځی:

$$a^k = (a^n)^q a^r = a^r$$

له دې سره د پاینظم توکو لپاره لاس ته راځي: دیوه توکي a نظم د هغه توکی n څخه تولید شوي یا جوړ شوي بیرته راګرځیدونکي یا څیوکلیکي لاندې کروپ {a} سره برابر دی یا د هغه سره سر خوري.

هغه ګروپونه، چی یواځي د پاینظم توکي لري تورزیونګرپونه Tursionsgruppen یا پریودي ګروپونهperiodische Gruppen یا بیرته راګځیدونکي ګرپونه بللکیږي، په بل ډول ناپریودي ګروپونه Torsionsfrei Gruppen بلل کیږي.

اوس دا پوښتنه د کړیو لپاره، لکه د بیرته راګرځیدونکی لاندیګروپ لپاره، رامنځ ته کیږي، چی ایا داسی یوه لاندېکړی یا مینیمال لاندیکړی شته، چي یو ورکړ شوی توکی ولري. R دې یوه ورکړشوې (ناضروري اسوڅیاتیو) کړی وي اوa دې یو د هغی کړی په خوښه توکو څخه یو توکی وي. هر د هغه لاندیکړی د توکي a سره ټول څلونه، په کومو

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی چی ټیك فاکتور a رامنځ ته کیږي، د کوم یوه ګڼون یا تعداد ..,3 , 2 , 1 = n سره، دا فاکتور د a د مثبت پوتنځ یا توان رول لوبوي. دا چی ځل باید ضرور اسوځیاتیو نه وي، نو په ټولو توپیریزو ډولونو ، جوړه ډوله په نوکانو کی نیول کیږي، چی په دې توګه د کړی دوه فاکتورونه یو د بل سره ځلیږي یا ضربیږي. د 3 = n لپاره ځل (a(aa او a(aa)) او 4 = n لپاره ، او همداسی د 5 = n لپاره اوداسی وریسی.
هر لاندېکړی د a سره ټول زیاتونونه ، ورکړشوي پاي زیاتو ځلونه، کوم چی د ټولګڼیز فاکتور سره سنبال وي خوندي لري.
داسی د R توکی . چی په دې زیاتونیز ډول لیکل کیږي د خپلی لور ځخه په R یو لاندې کړی جوړوي او دا، هغه غوښتونکې یا لټوونکې د a ځخه جوړه، لاندېکړي بلل کیږي.
د یوه اسوځیاتیوې کړیR لپاره د یوه توکی a ځخه جوړ لاندېکړی لاندې د R د ټولو توکو ځخه جوړه لاندېکړی، چی په یوه ډول د a زیاتون او مثبت پوتنځ ځخه جوړه وي لاس ته راځي(د ټولګڼیز ځلوونو سره). دا کړی له دې امله کموتاتیو ده.

د یوه ګروپ هر لاندېګروپ د دې ګروپ یویتوکی لري، د

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوې کړۍ هره لاندېکړۍ په همدې توګه د دې صفر توکي لري. دګروپ G لاندې ګروپونو (په همدې توګه د کړۍ R لاندېکړيو) غوڅی له دې امله تشېدېری نه دی .

۳ . ۳ . ۶ جمله : د ګروپ G د لاندېکروپونو یوه سیستم غوڅی بیرته د G لاندېګروپ دی. په همدې توګه دکړۍ R د لاندېکړيو د یو سیستم غوڅی، د دې کړۍ لاندېکړۍ جوړوي. د لاندې نیمګرپونو یوه سیستم غوڅی بیرته لاندینیمګروپ دی، که دا تش نه وي، او همداسی ورپسی..

موږ دلته د لمړنی غوښتنی ثبوت مخ ته بیایو. ددې لپاره دې په ګروپ G کی یو لاندېګروپ سیستم A_i ورکړ شوی وي، چیرته چی i یو پژندډيری یا ایندکسډيریIndexmenge کی ځغلی، او D دې د دې لاندېګروپونو غوڅی وي. که چیرې b او c د D په خوښه کوم توکی وي، نو د دوي خل bc په هر لاندې ډيري A_i کی پروت دی او په ورپسی توګه یا په لاس ته راوړنی سره سملاسی هم په D کی پروت دی. نو له دې امله b^{-1} د په خوښه $b \in D$ لپاره په هر A_i کی پروت دی او له دې امله په D کی هم پروت دی. پس D د G لاندې ډيری دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس نیسو چی G دې یو ګروپ، کړی او یا په همدې توګه یو تن یا بدن یا کوم یو بل، موږ ته څرګند، الجبري سیستم وي، کوم چی تراوسه پیژنو. د M سره د G لاندېګروپ ښایو، نو یو مینیمال لاندېګروپ(په ورته ډول لاندېکړی، لاندې تن یا لاندېبدن) شته، کوم چی M خوندي لري. دا د M سره جوړه شوي یا تولید شوي لاندې کروپ {M } جوړوي او د ټولو M خوندي لرونکود G د لاندېګروپونو غوڅی دی، د کومو څخه، چی کم له کمه یو دا په نامه ګروپ G موجود دی.

د مخه ویل شوي یا ورکړ شوي څیوکلیکي لاندې ګروپ تعریف د ټولیزولو له لارې ساده ښوول کیدی شي، چی لاندیګروپ {M } ټیك د ټولو هغو G توکو څخه جوړ دی، چی د په خوښه ترتیب د پایډیرو M توکو د پوتنځځل په بڼه لیکل کیدی شي.

ټیك په همدې توګه د مخه لوستل شوي ټولیزولو له لارې لاندېکړی، چی په R کی له M تولید ټولو توکو جوړ دی، کوم چی په M کي د پاي ډیرو توکو د ځلولو د زیاتون(د ټولګنیز ضریب سره) څخه انځوریدلی شي. په نااسوڅیا- تیو حالت کی دې طبعآ ضریبونه د ټول ممکنو نوکانو سره بندې شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ . ۷ یا دونه یا تعریف: که د تیرې برخې د M لپاره، د ګروپ G د ټولو لاندې ګروپونو A_i , $i \in I$ سیستم ونیول شي یا فرض شي، نو د یوه لاندې ګروپ کلیمي ته راځو، چې د ورکړشوو لاندې ګرپونو سیستم له خوا تولید شوی دی. ددې لپاره { A_i , $i \in I$ } لیکو، یا هم {A,B} { }، که دا دلاندې کروپونو ټولنه وي. په همدې توګه کیدی شي په یوه کړی کې هم د لاندېکړی سیستم له لارې تعریف لاندېکړې هم پوهیدل کیدی شي.

۳ . ۳ . ۸ یا دونه یا تعریف . دلته دې G یو ګروپ وي، یوه کړی او همداسې ورپسې. نو په G کې داسې لاندېډیري M شته، د بیلګې په توګه پخپله G، د کوم لپاره چې باور لري

$$\{M\} = G$$

هر داسې لاندېډیري د G لپاره یو جوړیدونکی یا تولیدیږو ینکی سیستم بلل کیږي . تر هغې، چې G یو پای د تولید- ونکو سیستم ولري، نو دلته د ګروپ (یو نیمګروپ، یو کړی) G ځخه غږیږو، چې پایتولیدیدونکی ګڼون یا

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیر ولري. په ځانګړې توګه کیدی شي، چې دا جوړوونکی یا تولیدونکی له یوه توکی ځخه جوړ وي. دا ګروپ چې یو جوړیدونکی توکی لري او د هغه د څیوکلیکي لاندې ګروپ سره سر وخوري، څیوکلیك ګروپ بلل کیږي.

۳ . ۴ . ایزومورفیزم Isomorphimus

دا دلته د هر الجبري سیستم راوړلو کلیمو لپاره د ایزمو- رفیزم کلیمه روښانه کیدی یا تشریح کیدی شي، کومه چې همغه رو ل لوبوي لکه په نیم نظم شوي ډیري کی یی چې لروده.
د بیلګي په توګه ایزمورف ګروپونه یو بل ته کتمټ دي، د یو او همغه ګروپ دوه اکسمپلاره یا نموني ، چې په نیولی دې وي، چې که د ګروپ عملیي یی ترونونه همغه وي، په داسی حال کی چی توکي له کومو چی ګروپونه جوړ دي، طبیعیت یا پیدایښت کوم رول نه لوبوي.
په کره کلك تعریف سره لاندې راوړو:

۳ . ۴ . ۱ تعریف : ګروپوئید G او G' ایزومورف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي، كه د ګروپوئيد يواځنى او په ځټ ځيرونه f د ګروپو-
ئيد G په ګروپوئيد 'G داسى موجود وي، چى د په
خوښه a,b ∈ G لپاره باور ولري

$$(ab)f = af.bf$$

په همدې توګه هره ځيرونه ، چى دا غوښتنى پوره كوي، د ايزومورفى ځيرونى په ځير يي په نخښه كوو يا يى ايز-
ومورف ځيرونه بولو. د دوه ګروپوئيدو خويونه، چى يو بل سره ايزومورف وي، سيومتري خويونه دي، (هغه و
ايزومورفى ځيرونى ته په ځټ ځيرونه بيرته ايزومورف ځيرونه ده)، او ترانزيتيو، دا برسيره پر دې ، كه ځيرې
ځوك د ګروپوئيد كتمټ په ځان ځيرونه ورسره وګڼي، رفلكسيو هم دی. د ايزومورف ګروپوئيدو لپاره په ټوليزه
توګه لاندې ليكدود كارول كيږي يا استعماليږي

$$G \sim G'$$

كه چيرې د نورو الجبري جوړښتونو ايزومورفي مو هم مطلب وي ، نو موږ به بيا هم همدا نخښه وكاروو.
طبعاً به د ګروپوئيد په ايزومورف ځيرونه كى ټول هغه خويونه، چى په ګروپوئيد كى ليكل كيږي، لكه اسوځياتيو

(c) ketabton.com: The Digital Library

قانون، کموتایتو، د یویتوکي موجودیت او د په ځېتوکي موجودیت، د ګروپوئید ځیرې چه هم ور کارول کیږي یا وروړل کیږي. موږ په ساده بیلګه سره ښایو، چې دا وینا څنګه ښوول کیدی شي. G دې یو کومتایتو ګروپوئید وي او f دې د G یوه ایزمورف ځیرونه په G' وي. که a' او b' دوه د G' په خوښه توکي وي او a, b د G هغه توکی وي، د کوم لپاره چې باور لري

$$af = f(a) = a' \quad , bf = f(b) = (b)f = b'$$

نو لرو

$$(ab)f = a'.b' \quad , (b.a)f = b'.a'$$

او د برابرون ab = ba او د ځیرونی د یوائنتوب څخه a'b' = b'a' دي. له دې څخ لاس ته راځي،

۳ . ۴ . ۲ جمله: د نیمګروپ، ګروپ او همداسی د ابلګروپ یا کموتاتیو ګروپ ایزومورفی ځیرې بیرته نیمګروپ، ګروپ او همداسی ابلګروپ دی.

۳ . ۴ . ۳ مرستندوي جمله: دوه کړي یو بل سره ایزومورف دي، که د هغو د توکو ترمنځ یو یواځنی اوپه

(c) ketabton.com: The Digital Library

څېړکیدونکی نظم یا ځیرونه موجوده وي، چی هغه ځیرونه نسبت و زیاتونګروپ ته ایزومورفیزم وي او هم د کړی و ځلګروپوئید ته ایزمورفیزم وي. د ایزومورف ځیرونی سره طبعاً کړی هغه خویونه، اسوځیاتیو، او کمو- تایتو یا لیکړی liesche Ring او داسی نور وي، ساتي.
د ایزومورف ګروپونو لپاره یوه په زړه پوري بیلګه، د مثبت ریيلګڼونو ځلیزه ګروپ او د ټول ریيلو ګڼونو زیاتونګروپ جوړوي. که هر مثبت ګڼ د هغه په لوګاریتم باندي تنظیم یا ځیره شي، چی بنسټ یی کره کلك ټاکلی وي ، نو د لمړي ګروپ یو ایزومورف ځیرونه، په دوم ګروپ، لاس ته راځي.
ایزومورفیز له دي ریښتینیو څخه لاس ته راځي، چی د یوه ځل لوګاریتم دي د لوګاریتم د یوګونو فاکتورونو د زیاتون سره برابر یا مساوي دی (د لوګاریتم او قوانینو لپاره دي ځما د شمیر پوهنی کتاب وکتل شي).

موږ اوس هغه ځمخه په ګوته شوي پاملرنه په ځیوکلیکي زیاتونګروپ کی رامخ ته کوو او په یوه بیلګه پیل کوو.
د ټولګڼونو زیاتونګروپ د یوه ناپای ځیوکلیکي ګروپ لپاره بیلګه ده، ځکه، چی هر ټول ګڼ د ۱ څو ځله دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۴ . ۴ جمله : ټول ناپای څیوکلیکي ګروپونه د ټولګڼونو زیاتونګروپ سره ایزومورف دي او همداډول په خپلو منځونو کې هم. همداسې پای د n–نظم څیوکلکي ګروپونه یو بل سره ایزومورف دي.
ددې جملې له ثبوت څخه دلته تیرېږو (ثبوت یې په Kuroŝ کې کتل کیدی شي).

۳ . ۴ . ۵ جمله: د ټولګڼونو د صفر لاندیګروپ، څخه توپیري ټول لاندیګروپونه د یوه څرګند طبیعي ګڼ n د ډیرواره ډیري څخه راپیدا دي.
او بې : روښانه ده، چې د یوه طبیعي ګڼ ټول څوواره یو لاندېګروپ، دا په نامه له n څخه جوړ لاندېګروپ جوړوي.
د یو بل څخه توپیري ګڼونو n لپاره لاندېګرپونه هم یو له بل توپیر لري. کیدی شي یود ټولګڼونو زیاتون ګروپ، لاندېګروپ A، چې یواځې د منفي ګڼونو څخه نه وي جوړ، ځکه چې د هر ګڼ سره د هغې په څټ هم لري. n دې کوچنی طبیعي ګڼ وي، چې په A کې خوندي ده. د یوه په خوښه $a \in A$ لپاره باور لري

$$a = qn + r\ ,\ \ 0 < r < n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دی

$$r = a - qn \in A$$

او په دې لاس ته راوړني $r = 0$ (د n له ټاکنی څخه) ، دا په دې مانا چي دی $a = qn$ ، څه مو چی ښوول.

۳ . ۴ . ۶ جمله : هر د یوه ناپای څیوکلیکي ګروپ لاندېګروپ څیوکلیکي دی، او دا د پای څیوکلیکي ګروپ لپاره هم باور لري.

۳ . ۴ . ۷ تعریف : وایو، چی ګرپوئید G په ګرپو-ئید 'G کی ایزومورف خوندي دی، او یا په 'G کی ایزومورف نغښتی دی، که چیرې له G یوه ایزمورفه څیرونه د ګروپو-ئید 'G په کوم یوه لاندېګروپوئید باندې موجود وي. دا کلیمه کړیو ته هم غزول کیدی شي،

هره کړی R، په کړی R باندې د پوره ماتریکسکړی R_n کی ایزومورف خوندې دی.

سکالار ماتریکسونه ، دا په دې مانا، چی د همغه توکي $a \in R$، چی په اصلي نیمي یا قطر کی پروت وي او نور د نیمي دواړو خواو ته صفرونه وي، په نامه R_n یو لاندېکړی، د R سره ایزمورف ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۴ . ۷ جمله : هره کړی R په ورکړ شوي ډیري M
باندې یوه پوره فنکشنکړی سره، چی ارزښت يي په R کی
پروت دی ، ایزومورف دی.
د ټولو x Є M لپاره هر فنکشن د همغه برابر ارزښت a Є R
سره، هغه و R سره ایزومورف فنکشنکړی راکوي.
د یوه په خوښه اسوشیاتیو، کموتاتیو کړی R کی پولینومکړی
R[x] پوتنځلړیکړی R{x} کی ایزومورف خوندې دی.
پوتنځکړی د زیاتو پاي صفر څخه توپیریدونکو ځلوونو یا
ضریبونو سره، یو وR[x] ته ایزومورف د R{x} لاندېکړی
جوړوي.

یو لوي کار د لاندې جملي اوبی یا حل غواړي:

۳ . ۴ . ۹ جمله : هره کړی R په یوه کړی کی، چی
یویتوکی لري، ایزومورف خوندي ده. که کړی R په دې
برسیره اسوشیاتیو یا کموتاتیو وي، نو کیدی شي ، چی دا
همداسی په یوه اسوشیاتیو، کموتاتیو دیویتوکي سره کړی
کی خوندي شي.
اوبی یا ثبوت: موږ د ټولو جوړو (a,k) ډیری په نظر کي

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیسو، چې $a \in R$ او k یو ټولګڼ دی او د دې جوړو لپاره د لاندې مساواتو له لارې زیاتون او ځل تعریفوو:

$$(a,k) + (b,l) = (a+b,k+l) \qquad (1)$$
$$(a,k)(b,l) = (ab+la+kb,kl) \qquad (2)$$

نسبت و زیاتون ته یو ابلګروپ لاس ته راځي. دا چې برسیره پر دې

$$[(a,k)+(b,l)](c,m) = (a+b,k+l)(c,m)$$
$$= ((a+b)c+m(a+b)+(k+l)c,(k+l)m$$
$$= (ac+ma+kc+bc+mb+lc,km+lm)\ m$$
$$= (ac+ma+kc,km)+(bc+mb+lc,lm)$$
$$= (a,k)(c,m)+(b,l)(c,m)$$

باور لري او ټیك په همدې ډول د دیستریبوتیو دوم قانون هم ښوولی شو، نو ډیری یوه کړی انځوروي. له (2) څخه وریسی لاس ته راځي

$$(a,k)(0,1) = (0,1)(a,k) = (a,k)$$

دا جوړه (0.1) په دې کړیکی د یویتوکي ځاي نیسی یا نمایندګي کوي. بر سیره پر دې د (1) او(2) سره سم لرو

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0)\ ,$$
$$(a,0)(b,0) = (ab,0)$$

د کومو سره ، چې د ټولو د (a,0) فورمجوړو ډیری د ټولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړو(a,k) په کړی کی یو وR ته ایزومورف لاندېکړی جوړوي.
له دي سره د ثبوت لمړی برخه تکمیل ده، دومه برخه د (2)
استعمال سره په ساده توګه لاس ته راځي.
موږ دا په ګوته کوو، چی دا له موږ جوړه شوې کړی یواځنی
کړی نه ده (او همداسی هم نامینیماله کړی) د یویتوکي سره،

کوم چی یورکړه شوېکړی R (د ایزومورف خوندیونی په موخه)
خونديې لري، کیدی شي چی R پخپله یو یویتوکی ولري.

۳ . ۴ . ۱۰ جمله : هر ګروپوئید کیدی شي ، چی د
یوې کړی په ځلګروپوئید کی خوندي شي، یو اسوشیاتیو یا
کموتاتیو ګروپوئید کیدی شي، چی په یوه کړیکی، چی
همغه خویونه ولري خوندي شي.
د ثبوت لپاره ټول ممکن د زیاتون فورمولونو زیاتون رانیسو

$$\sum_{a \in G} k_a a \qquad (3)$$

د کومو سره ، چی a د ورکړشوي ګروپوئید G ټولو توکو
کی ځغلی، په داسی حال کی چی ځلووني یاضریبونه k_a
ټولګڼونه دي او په رینښتونی، داسی چی زیات ترزیات پای
ډیر د صفر څخه توپیري رامنځ ته کیږي د زیاتون (3)
زیاتون او ځل د برابرونونو یا مساواتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{a\in G} k_a a + \sum_{a\in G} l_a a = \sum_{a\in G} (k_a + l_a)a \qquad (4)$$

$$\sum_{a\in G} k_a a \, . \sum_{a\in G} l_b b = \sum_{c\in G} m_c c \qquad (5)$$

سره روښانه یا تشریح دی، په کومو کې، چې m_c د ټولو صفر څخه توپیر څلونو $k_a\, l_a$ زیاتون په مانا دی، چې په ټولو a او b کی ځغلیدلی وي، د $ab = c$ سره. روښانه ده، چې د برابرونونو ښی لور (4) او (5) د (3) فورم زیاتون انځوروي. مساوات (5) وایي، چې په کیڼ لور، د فاکتورونو په څیر رامنځ ته شوي، پای زیاتونونه د غړو په څیر یو له بل سره ځلیږي، او په ریښتونی د قانون

$$k_a a . l_a b = (k_a l_a)(ab)$$

لاندې، چې دab سره د ګروپوئید په موخه ورکړ شوې عملیه مو مطلب دی، د کومو سره چې د ځل ab رامنځ ته کیدو سره همغه توکی c ورکوي، سره یوځای راټول شي.

د زیاتون لپاره په هره توګه یو ابلګروپ لاس ته راځي. د دیستریبوتیو قانو او د هغه ثبوت چې د G په ګروپ کی د ځل اسوشیاتیو همداسی کموتاتیو قانون او همغه مساوي یي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتونونو ځل، چې فورم (3) لري لاس ته راځي، که څه هم خورا پراخ دی، مگر په پرینځیپ یا اصولوکې ستونځې نه رامنځ ته کوي، د هغو پرمخ بیول دې د لوستونکو دنده وي.

د ټول زیاتون، چې فورم (3) لري له دې امله نسبت و(4) او (5) مساواتو تعریف شوو اپریشن ته یوه کړی جوړوي، هغه زیاتون (3) په کومو کې، چې $k_a = 1$ دی، د په خوښه a لپاره، چې له G دی. د (5) پسې یو گروپ G سره ایزومورف لاندېگروپوئید، د دې کړی د ځلوونکي گروپوئید سره، جوړوي. له دې سره دا ښونه سر ته ورسیده.

دا له موږ جوړ شوې د گروپوئید G کړی د ټولګڼونو گروپو-ئیدکړی بلل کیږي.
که G یو نیمگروپ وي او یا گروپ، ~~نو د~~ نو د دې په ځای د ټولگڼیزنیمگروپ او همداسی د ټولگڼیزگروپ څخه غږیږو.

۳ . ۴ . ۱۱ جمله: هر گروپ د یوه ډیري M په سیو-متري گروپ کی ایزومورف خوندي دی، کیدی شي، چې د M په ځای په ځانگړې توگه د گروپ ټولو توکو ډیری وکارول شي.
دلته د گروپ G هر توکی a هغه ترانسفورمیشن باندې تنظیمو، چې یو د G توکی x په توکي xa باندې تنظیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کړي. دا چي له $x \neq y$ څخه هم $ax \neq ay$ لاس ته راځي
او برسیره پر دې د هر $x \in G$ لپاره برابرون

$$(xa^{-1})a = x$$

رامنځ ته کیږي، ترانسفورمیشن $x \to xa$ ګروپ G په ځان
په ځېږ یواځنی ځیره کوی یا تنظیموي، دا نو له دې امله یو
پرموتیشن (پرموتیشن ځما د شمیرپوهنه کتاب کی په پراخه
توګه روښانه شوی دی) دی. د $a \neq b$ لپاره په دې برسیره
په دې د غوښتونکو پرموتیشنونو توکي یو له بل توپیر لرود-
ونکی دي، ځکه، چی $1.a \neq 1.b$ دی.
بالاخره برابرون

$$(xa)b = x(ab)$$

په ګوته کوي، چی د ab پورې اړونده پرموتیشن د a و b او
پورې اړونده یوبه بل پسی راوړنو څخه لاس ته راځي.

۳ . ۴ . ۱۲ جمله : هر نیمګروپ G ، د یوه ډیري M
سیومتري نیمګروپ کی خوندي دی.
اوبی یا حل: د ثبوپ لپاره نیمګروپ G د ۳ . ۴ ، ۱۰
سره سم په یوه، د یوه اسوځیاتیو کړی R, په ځلیز ګروپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی خونديږ کوو، دا بیرته د ۳ . ۴ ، ۹ سره سم په یوه اسوشیاتویکړی R کی د یویتوکي سره خونديږ کوو او د G سره یې په نخښه کوو، چی داد اخرنی کړی ځلیزه نیمګروپ دی. لکه څنګه، چی په G کی هم یو توکی 1 د 1.a |= 1.b سره له a |= b څخه موجود دی، نو د لغاتو پوري د پورته جملی ثبوت سره دا سر خوري ، چی دا نیمګروپ G د نیمګروپ سره پخپله، په دې ډيرګ G باندې، ایزومورف خونديږي دی. له دې څخه د سرچینیز ګروپ G خوندیونه لاس ته راځي.

موږ غواړو، چی دې ته ګوته ونیسو، چی د یوه ګروپوئید (په ځانګړي توګه یو ه نیمګروپ) په بل ګروپوئید (یوه نیمګروپ) کي خوندیونه سیده وښایو، بی له دې، چی یوه کړی د یویتوکی سره وکاروو.

۳ . ۵ د نیمګرپونو په ګروپ کی او کړی په یوه (ناضرورکموتاتیو) تن یا بدن کی خوندیونه

هر نیمګروپ، ضروریه یوه ګروپ کی، ایزومورفف نه شی خونديږ کیدی، د دې لپاره ضروري شرطونه هغه باید ورسره بلد د لنډونی قاعدې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۵ . ۱ جمله: له $ac = bc$ او همداسی $ca = cb$ څخه لاس ته راځي $a = b$.

یادونه : دلته ګورو، چې د لنډونی قاعدې کارول شوي دي.

په لاندې برخه کی غواړو وښایو، دا راوړلشوي ضروري شر-طونه، چې د نیمګروپونو په ګروپونو همداسی د اسوشیاتیو کړی په یوه (ناسو(۸) کموتایتو) بدن کی د کموتایتو په حالت کی پوره کیدونکي هم دي.د دې لپاره د لاندې مرستندوي جملي په ښوونه پیل کوو.

۳ . ۵ . ۲ مرستندوي جمله: د ابل په یوه نیمګروپ G کی دې یو لاندې نیمګروپ S ورکړ شوی وي، او په G کی دې د S د توکو سره لنډونه وشي، دا په دې مانا، چې له

$$ax = bx \, , \, x \in S; \, a,b \in G$$

څخه دې تل $a = b$ لاس ته راشی. نو کیدی شي، چې G د ابل نیمګروپ ایزومورف په یوه داسی ابل ګروپ G کی د یویتوکي سره ، ایزومورف خوندې شي، چې د S هر توکی په G کی یو په څټ توکی ولري.

(۸) ناځوره د کموتایتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د دې جملې له ثبوت څخه تیرېږو. دا د الجبر په درسي کتابونو کې کتل کیدی شي،

په دې پورته غوښتنو له مخې لاندې جمله لاس ته راځي

۳ . ۵ . ۳ جمله : هر ابل ګروپ د لنډونو قاعدو سره په یوه ابل ګروپ کې خوندې کیدی شي .
د دې ورکړ شوي جوړښت د طبیعي ګڼونو په یوه زیاتون نیمګروپ ، کوم چې د لنډونو قاعدو سره یو ابل نیمګر-وپ دی ، په ساده توګه د ټولګڼونو په زیاتونګروپ کې میندل کیدی شي ،

۳ . ۵ . ۴ جمله: په یوه اسوشیاتیو - کوموتاتیو کړی R کې دې د توکو یو ډیری N راوستل شوی وي، په کوم کې چې صفر او پرصفرویشنه نه وي موجود. نو کیدی شي، چې کړی R ایزومورف په یوه اسوشیاتیو-کموتایتو کړی R کې، د یویتوکي سره، داسي خوندي شي، چې د N هر توکي په R کې یوه په څټ توکی ولري.

یادونه : دا ثبوت هم پرېږدو او په دې توګه نورو غوښتنو ته هم پاي ورکوو، چې موضوع اوږده نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۶ نورمالپرویشونی

۳ . ۶ . ۱ تعریف : یو ګروپ G او په هغه کی دې توګه یو لاندېګروپ H دې ورکړ شسوې وي. که یوه a د G په خوښه توکی وي، نو ممکنه ځلونی ah چی د aH ټولګه ده ، چیرته چی h په لاندې ګروپ H کی ځغلي، دا د ah a تعریف شوې، د ګروپ G کیڼ اړخیزځنګ- ټولګی یا ګاونډی ټولګی (موږ به کوښښ وکړو چی دا تل ګاونډیټولګی وبولو) بلل کیږي و لاندې ګروپ H پسی. په څرګنده توګه $a \in aH$ دی، ځکه چی لاندېګروپ H یویتوکی لري.

د یوه توکی b لپاره دې، چی د ګاونډیټولګی aH څخه دی، تل باور ولري $bH = aH$ ، دا داسی بلللکیږي، چی د ګروپی G هر کیڼ اړخیز ګاونډیټولګی و H پسی د هغه د هر توکی سره تعریفیږي. که $b = aH , h \in H$ باور ولري، نو د په خوښه $h',h'' \in H$ لپاره باور لري:

$$bh' = a(hh') \quad \text{او} \quad a h'' = b(hh'')$$

پس $bH \subseteq aH$ او $aH \subseteq bH$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې سره هر دوه کینې اړخیز ګاونډیتوبولګي، یو د بل سره کټمټ دي او یا یی غوڅی تشډیری دی.
مور ددې سره د ګروپ G یوه ټوټونه یا تجزیه لاس ته راوړو، په لاندېګروپ H پسي، چی د یوه مخه یی کینې اړخیزو ګاونډیتوبولګیو یو له بل څخه پردې دي، دا ګروپ G کینې اړخیزه ټوټونه بلل کیږي په یوه لاندېګروپ H پسی. د دې ټوټوونو یاتجزیي یو ټولګی پخپله H دی:
د $a \in H$ سره باور لري $aH = H$.

په ورته توګه د ګروپ G ښی اړخیزه ټوټونه یا تجزیه لاس ته راوړی شو، په یوه لاندېګروپ H پسی، کوم چی له ښی اړخیز ګانډېټولګی $ha , a \in G$ څخه جوړدی، که یو ګروپ کموتاتیو نه وي، نو کیدی شي، چی کینې ګاونډیتو- لګي او ښی ګاونډي ټولګی باندې د یوه ګروپ G ټوټونه د لاندېګروپ H پسی یو له بل توپیر ولري. په هر صورت دواړه ټوټونی د ټولګیو برابر ګڼون لري: ځیرونه چی د G هرتوکی a د G په a^{-1} توکی ځیره کوي، په ځتهکیدو- نکی یواځنی ځیرونه ده، د ګروپ G په خپل ځان او کینې اړخیز aH ګاونډیتولګی په همغه ورته ښی اړخیز ګانډیتو- لګي Ha^{-1} ځیره کوي او په ځتې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۶ . ۳ تعریف: د ګروپ G ټوټونه په لاندېګروپ H پسي ، د ګاونډیو ټولګیو ګڼون په دې دواړو هر ټوټونو یا تجزیه کی ، که دا پاي وي، د لاندې ګروپ پیژند نخښه یا ایندکس Index، په ګروپ G کی بلل کیږي.

ګروپ G دې د n نظم پاي ګروپ وي او H دې د هغه لاندېګروپ وي، د k نظم او j پیژند نخښی یا ایندکس سره. هرګاونډټولګي aH د ټیك k توکو څخه جوړ دی او له دې امه باور ولري

$$n = k.j$$

له دې څخه لاندې جمله لاس ته راځی

۳ . ۶ . ۳ د لاګرانژ Lagramge جمله: د یوه په خوښه پای لاندېګروپ نظم او پیژندنخښه د ټول ګروپ د نظم پرویشوني دي.

دا جمله د ۳ . ۳ . ۴ سره سم لاس ته رکوي ، چی د پاي ګروپ د هر په خوښه توکی نظم همداسی د ګروپ نظم ویشي. د دې جملی بله پسی راتلنه ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۶ . ۴ پسی راتلنه: هر د لمړي ګڼ نظم(لمړیګڼ هغه ګڼ دی ، چی پرویشوني یی ساده پرویشوني وي، یعنی پخپله دا ګروپ او یویتوکی) څیوکلیك یا په بل نوم، راګرځیدونکی دی.
دا باید د په خوښه د هغه توکي جوړه څیوکلیکي لاندی ګروپ سره سر وخوري، تر هغي چی دا توکی له ۱ څخه توپیر ولري.

۳ . ۶ . ۵ تعریف: یو لاندښنیمګروپ H د ګروپ G نورمالپرویشونی Nrmalteiler (یا اینواریانتي invariante Untergrupp لاندېګروپ) بلل کیږي، که د G کینڼ اړخیزه ټوټونه یا تجزیه د ښی خوا ټوټونی سره، نسبت و H ته، سر وخوري، دا په دې مانا، چی د هر a ∈ G لپاره (په G کی د دواړو برخېیریو یو بل سره د سر په سر خوړلو په موخه وي) مساوات

$$aH = Ha \qquad (1)$$

رامنځ ته کیږي. یا باوري کیږي. کیدی شي چی د لته د ګروپ G ټوټونی و H پسی د نورمالګروپ څخه وغږیږو.
په لاندې کی د نورمالپرویشونی یو بل تعریف ورکوو، چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې همدا اوس ورکړشوي تعریف سره برابرارزښته دی.

۳ . ۶ . ۶ تعریف : په ګروپ G کی توکی x او y یو د بل سره کونجوګیري konjugiert **بلل کیږي**، که په G کی یو توکی a داسی پیداکیدي شي ، چی باور ولري

$$y = a^{-1}xa$$

داسی هم ویل کیږي، چی له y څخه د x سره ، د a ترانفورمیشن له لارې لاس ته راځي.

۳ . ۶ . ۷ جمله : د ګروپ G لاندې ګروپ H هلته او هلته په G کی نور مالپرویشونی دی، که H وهر توکی ته دده توکی په G کي ټول کونجوګیري توکی هم ولري.

اوبی : د دې لپاره دې H په G کی نورمالپرویشونی وي، او په ورزیات دې یا برسیره پر دې دې h د H په خوښه توکی وي. a دې د G یو په خوښه توکی وي، په H کی د (۱) پسی یا د (۱) له مخی یو توکی h' د

$$ah' = ha \qquad (2)$$

سره موجود دی. پس دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^{-1}ha = h' \in H \qquad (3)$$

او په ځتې که د $h \in H$ په خوښه توکی لپاره او $a \in G$
په H کی یو توکي 'h موجود وي، کوم چی برابرون (۳)
پوره کړي او د دې پسی یا د دې په تعقیب(۲) پوره کړي،
نو باور لري $aH \subseteq Ha$. که په دې رامنځ ته شوې اړیکی،
چی د ټولو a لپاره رامنځ ته شوي یا باور لري، د a په
ځای a^{-1} ولیکي ، نو و $a^{-1}H \subseteq Ha^{-1}$ ته راځي او
همداسی $Ha \subseteq aH$.کوم چی د مخ ته تیر سره برابرون
(۱) ورکوي.

۳ . ۶ . ۸ تعریف : دوه لاندېګروپونه U اوV په G
کی یو د بل سره کونجوګیرkonjugiert **بلل کیږي**، که یو
داسی توکی $a \in G$ موجود وي، چی د هغه سره د
ترانسفورمیشن له لارې لاندېګروپ U په لاندېګروپ V
پریباسي، یعنی باور ولري

$$a^{-1}Ua = V$$

ډیري $a^{-1}Ua$ بی له دې هم د هر $a \in G$ لپاره د په خوښه
یو (په ریښتونی U سره ایزومورف) لاندېګروپ سره
تل بیرته یو لاندې ګروپ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه توکو $u_1, u_2 \in U$ لپاره لاندې اړیکی رامنځ ته کیږي

$$(a^{-1}u_1a)(a^{-1}u_2a) = a^{-1}(u_1u_2)a$$

او له

$$a^{-1}u_1a = a^{-1}u_2a$$

څخه برسیره پردې لاس ته راځي $u_1 = u_2$ ، د کوم سره چی څیرونه یا نظم $u \rightarrow a^{-1}ua$ د $u \in U$ سره، یو ایزومورف څیرونه د U په $a^{-1}Ua$ ده: aUa هم یو لاندېګروپ انځوروي.

۳ . ۶ . ۹ جمله :د یوه ګروپ G هر نورمالپرویشونی د ټولو خپلو په G کی کونجوګیر لاندېګرپونو سره یوځای پریوزی. په څټ: د ګروپ G یولاندې ګروپ H ټولي و H ته په G کی کونجوګیر لاندېګروپونه خوندي لري، نو له دې امله دا نورمالپرویشونی دی.

له (۱) څخه په لمړی وار لاس ته راځي

$$a^{-1}Ha = H \qquad (4)$$

کوم چی د جملی لمړی برخه ثبوتوي. اوس نو باور لري

$$a^{-1}Ha \subset H$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اصلي خونديلرنى په موخه. دا رات راكوي

$$H \subset aHa = (a^{-1})^{-1}Ha^{-1}$$

او د H لاندې ګروپ بايد ، كه هغه ټولى و هغى ته كونجوګير خوندي ولري، د دې توافق يا يو په بل سرخوړنى سره . د په خوښه توكي $a \in G$ لپاره له دې امله (۴) رامنځ ته كيږي، له كوم چى (۱) رابيليدلى شي.

۳ . ۶ . ۱۰ جمله: د يوه ګروپ G د په خوښه نومالپرو- يشونو ډيريو غوڅى ، بيرته نومال پرويشونى دي.

اوبى : كه D د $i \in I$, A_i غوڅى وي ، نو په هرترتيب D د G لاندې ګروپ انځوروي. (پرتله ۳ . ۳ . ۶) برسيره پر دې د هر توكى ، چى يوه د D توكي سره كونجوګير وي، په ټولو A_i كى پروت دى او په دې پسى لاس ته راځي، چى په غوڅ كى هم پروت دى.

۳ . ۶ . ۱۱ جمله :د يوه ګروپ G په خوښه نورمالپرو- يشونو سيستم څخه توليد يا راپيداشوي لاندېګروپ(پرتله ۲ . ۳ . ۸) په همدې حالت كى د G يو نومرمالپرويشونى دى

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوی دي نورمالپرویشونی $A_i \ , i \in I$ وي او د هغه څخه جوړ شوي یا تولید شوی د لاندې ګروپ B وی لکه په ۳ . ۳ . ۷ کی ښوول شوي وو، هر د B توکی b په لاندې بڼه لیکل کیدی شي

$$b = a_1 a_2 ... a_n$$

د ورکړ شوي $a_j \in A_j \ , j = 1,2,...,n$ سره . له G څخه په خوښه توکي g لپاره باور لري

$$g^{-1}bg = (g^{-1}a_1g)(g^{-1}a_2g)...(g^{-1}a_ng)$$

او دا چی

$$g^{-1}a_jg \in A_j \quad , j=1,2,...,n$$

دی ، نو لاس ته راځي

$$g^{-1}bg \in B$$

۶ . د ابلګروپ ټول لاندې ګروپونه د هغی خپل نورمالپر-ویشونی دي. په دې ورزیات یا برسیره پر دې په هر ګروپ G کی یوونګروپ E د نورمالپرویشونی په څیر موجود دی او په همدې توګه پخپله ګروپ G هم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱۲.۶ تعریف : یو ګروپ ، چی نورمال پرویشونی یی یواځی یوونګروپ او پخپله خپل ځان وي، ساده بلل کیږي.

۳ . ۱۳.۶ جمله : یواځني ساده ابل ګروپونه، هغه څیو- کلیکي ګروپونه دي، چی نظم یی پریمګڼ یا لمړی ګڼ وي.

اوبی : که یو ابل - یا کموتاتیو ګروپ ساده وي، نودا بیخي ناساده یا نااصلي لاندې ګروپ نه لري: دا چی په دې کي څیوکلیکي لاندې ګرپونه باید خوندې وي، نو دا پخپله څیوکلیکي دی. یو ناپاي څیوکلیکي لاندې ګروپ نااصلي یا ساده لاندېګروپونه لري، په کوم چی د ټولګڼونو زیاتون- ګروپ دی ، په هغه کي چی د جفت ګڼونو ګروپ په ځان کی دننه یا خوندي لري. که یو پای څیوکلیکي ګروپ $G = \{a\}$ راواخلو چی نظم یی n دی، نو د ټوټونی n له لارې څخه لرو $n = kl$ ، چی لاندې ګروپ $\{a^k\}$ نظم l او په دې لاس ته راوړنی سره د E او G څخه توپیر لري.
د دې په څټ: ګروپ $G=\{a\}$ کیدی شي چی هیڅ ناساده لاندېګروپ ولري، که نظم یی یو پریمګڼ یا لمړی ګڼ وي.
چی د لاګرانژ له جملی څخه ساده په لاس راتلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: دا موضوع دلته رالنډوم او داسی نور ې په دې هکله موضوعګاني په خارجي ژبو درسی کتابونو کی شته، چی هلته کتل کیدی شي، دلته به زيات وخت او ځاي ونیسی. زما هئله هم دا ده، چی د زیاتو شیانو سره په دا لمړي کی داسی لږ غوندې بلد شو.

۳ . ۷ ایدیال او پاتي ټولګیکړی

Ideal und Restklassenring

یادونه: ی ما دا پاتیټولګیکړی بللی، چی یو نوم وي، خو دا کیدی شي، چی د پاتیټولګی کړی هم وبلل شي. د نومونو په هکله ستونځي به منو، تر څو، چی څموږ په هیواد کي شمیرپوهنی خپله لار نیولي وي.

په دې برخه کی ګورو، چی د نورمالپرویشونی په ځاي د ایدیال کلیمه رامنځ ته کیږي.
په دې برخه کي R تل یوه کموتاتیوه کړی د یوښتوکی ۱ سره په نخښه کوي یا ښايي. اوس د یوې کړی د « ایدیال»کلیمه پیل کیږي. لاس ته راځی، چی د R هر ایدیال Y په R باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو ایکویوالنت یا ورته ټولګی ~ تعریفوي. د دې سره ښوول کیږي، چې د هر $r \in R$ کړیتوکی اړونده ایکویوالنتټولګي [r] بیرته یوه کړی R / Y جوړوي.

۳ . ۷ . ۱ تعریف : د کړی R یو ناتش برخډیرې Y یو ایدایال دی، که Y د زیاتونګروپ (R , +) یو لاندې ګروپ وي او د ټولو $y \in Y$ او $r \in R$ لپاره باور ولري $yr \in Y$.
دا د R ایدیال Y اصلي ایدایل بلل کیږي که $Y \neq R$ وي .

۳ . ۷ . ۲ بیلګی:

الف) دا د R یواځي د صفرتوکی څخه جوړ برخډیری { 0 } د R یو ایدیال دی، دا صفرایدیال دی او له همدا اوسه به په 0 سره په نخښه شي.

ب) که $R = Z$ د ټولګښونو کړی وي، نو ډیری Y د ټولو جوړه ګڼونو $Y = 2z$ د $z \in Z$ سره جوړ ډیری د Z یو ایدیال دی. د دوه جوړه ګڼونو زیاتون او کمون تل یو جوړه ګڼ دی، او برسیره پر دې yz د ټولو $y \in Y$ لپاره او د ټولو $z \in Z$ لپاره یو جوړه ګڼ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) که $R = F$ يو بدن وي، نو 0 او F د R يواځني ايديالونه دي.

۳ . ۷ . ۳ تعريف: د R يو ايديال Y اصلي ايديال بلل کيږي، که $Y = yR$ وي، د يوه $y \in Y$ لپاره، دا په دې مانا چې يو $y \in Y$ داسې موجود دی، چې د هر $z \in R$ لپاره يو $r \in R$ د $z = ry$ سره موجود وي. داسې هم ويل کيدی شي : چې دا توکی y ايديال Y جوړوي يا توليدوي او يا y د Y جوړوونکي يا توليدوونکی دی.

۳ . ۷ . ۴ تعريف: Y دې د R يو ايديال وي. نو دوه توکی $r, s \in R$ و Y ته ايکويوالنت يا ورته بلل کيږي، که باور ولري : $r - s \in Y$

په نخښوونه يی : $r \sim s$ يا $s \sim r$.

دا په ساده توګه ليدل کيږي، چې $\sim$ په R باندې يو ايکوبوالنځ اړيکه يا ورته اړيکه ده.

۳ . ۷ . ۵ مرستندوي جمله: Y دې د R يو ايديال وي د $R =| Y$ سره او R / Y دې د R له توکو r څخه جوړ، د ورته ټولګيو $[r] = \{ s \in R \mid s \sim r \}$ ډيری وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو R / Y به د زیاتون $[r_1] + [r_2]$ او ځل $[r_1] . [r_2]$ سره د ټولو $r_1 , r_2 \in R$ لپاره یوه کړۍ وي د یوې توکی $[1]$ سره .

اوبې: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله ورته ټولګی $[r] , r \in R$ ډیری R په پردیو برخډیریو باندې ټوټه یا تجزیه کوي. وي دې

$$[r_1] , [r_2] \in R / Y ,$$

نو دا باید وښوول شي، چې زیاتون

$$[r_1] + [r_2] = [r_1 + r_2]$$

او ځل

$$[r_1] . [r_2] = [r_1 . r_2]$$

د هغو د نماینده توکو څخه خپلواك ایکیوالنځټولګي یا ورته ټولګي دي. که $s_1 , s_2 \in R$ نور د ټولګي $[r_1]$ او همدا ډول د ټولګی $[r_2]$ نماینده ګان وي نو $r - s = y \in Y$ هم دي، د ټولو $i = 1 , 2$ لپاره، د کوم څخه چې لومړی

$$[r_1 + r_2] - [s_1 + s_2] = [r_1 + r_2 - s_1 - s_2] =$$
$$=[(r_1 - s_1) + (r_2 - s_2)]$$
$$=[y_1 - y_2] = [0] \in R / Y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي. له دې امله زياتون + کره تعريف دی او [0] د ابل د ګروپ R / Y يو صفرتوکی دی او ترنی يا نښلونی يا عمليې + ته.
په R / Y باندې ځل . هم کره تعريف دی ځکه چې

$$r_1r_2 - s_1s_2 = (s_1 + y_1)(s_2 + y_2) - s_1s_2$$
$$= s_1s_2 + y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 - s_1s_2$$
$$= y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 \in Y$$

له کوم چې $[r_1][r_2] = [r_1r_2] = [s_1s_2] = [s_1][s_2]$ لاس ته راځي. سړی په دې پسې ترلی په دې باور راوړی شي، چې R / Y (د کړی د تعريف سره سم) يوه کړی ده د يوي توکی [1] سره.

۳ . ۷ . ۶ تعريف : دا کړی R / Y د R يو د پاتې- ټولګيو کړی و ايډيال Y ته بلل کيږي.

۳ . ۷ . ۷ تعريف : د کړی R يو ايډيال M ماکزيمال ايډيال بلل کيږي، که M ≠ R باور ولري او Y، د R يو بل ايډيال، موجود نه وي د $M \subset Y \subset R$ سره.

۳ . ۷ . ۸ جمله: R دې يوه کموتاتيوه کړی وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $1 \in R$ سره، نو باور لري:

الف) د R هر اصلي ایدال Y په یوه ماکزیمال ایدیال کي خوندي دی.
ب) که M د R یو ماکزیمال ایدیال وي، نو د پاتیټولګی کړی $F = R / Y$ یو بدن یا تن دی.

اوبی:
الف) دا چی Y د R یو اصلي ایدیال دی، نو $1 \notin Y$ دی.

$$Y \subseteq y_1 \subseteq y_2 \subseteq \ldots \subseteq Y$$

دي د کړی R د ایدیالونو Y_i یو جګیدونکی ځنځیر وي د $1 \notin Y_i$ سره.، چیرته چي $i \in I$ او I یو اندکس ډیری یا پیژندډیری دی. وي دې $W = \bigcup_{i \in I} Y_i$ ، نو $u, v \in W$، د $i \in I$ سره موجود دی د $u, v \in Y_i$ سره، ځکه چي ایدیال Y_i یو ځنځیر جوړوي. نو لرو $u - v \in Y_i \subseteq W$، همدا ډول $ur \in W$ لاس ته راځي، د ټولو $u \in W$ لپاره او $r \in R$. له دې امله W د R یو ایدیال دی، او $1 \notin W$ دی. نود کړی R د ټولو Z ایدیالونو ډیری M د $Y \subseteq Z$ سره، او $1 \notin Z$ سره، د څورن لیما پسی یو ماکزیمالتوکی M لري. داچی هر اصلي لوي ایدیال $M' > M$ دا یویتوکي 1

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري او له دې امله $M' = R$ باور لري، نو لاس ته ترې اخي ، چې M د R يو ماکزيمال ايديال دی. دا Y خوندي لري.
ب) وي دې $[r] \neq [0]$. نو $M + rR$ د R يو ايديال دی، کوم چې M اصلي خوندې لري. دا چې M د R يو ماکزيمال ايديال دی، نو باور لري

$$R = M + rR$$

پس د R يوی په $M + rR$ کې پروت دی، دا په دې مانا چې $1 = m + rs$ د توکو $m \in M$ او $s \in R$ لپاره باور لري.
له دې امله $[r][s] = [1] \in R/M$ دی.
او له دې سره $[s] = [r]^{-1}$ دی.
نو پاتی ټولگی کړی يو بدن يا تن دی. خ چ د ښ و

۳ . ۷ . ۹ بيلگې

اول : د ټولگښونو Z په کړی کیY د ټولو جفتو گڼونو ډيری ماکزيمال ايديال دی. پاتيټولگي بدن Z/Y يی د دواړو پاتيټولگيو $[0]$ او $[1]$ څخه جوړ دی. دا نو له دې امله دوه توکی لري او د $Z/2Z$ سره په نخښه کيږي.
دوم : په پولينومکړی $R = F[X]$ کی په بدن يا تن F باندې د نا ټاکلی يا مجهولی X سره $Y = \{ X f(X) \mid f(X) \in R \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو ماکزیمال ایدیال دی د پاتی ټولګیتن $R / Y \sim F$ سره د مخ ته تیر تعریف له مخی، ځکه چی دی

$$f(X) = f_0 + f_1X + ... + f_nX^n \in R$$

نو $[f] = [f(X)]$ په R / Y کي پروت دی. د مرستندوي جملی۳ . ۷ . ۵ له مخی دا ځیرونه $[f_0] \to f_0 \in F$ د بدنونو یا تنونو R / Y او F ترمنځ یو ایزومورفیزم دی.

۳ . ۷ . ۱۰ تعریف: د کموتاتیو کړی R د یویتوکي 1 سره یو توکي u یوون بلل کیږي، که یو $v \in R$ ځخه موجود وي د $uv = 1$ سره.

۳ . ۷ . ۱۱ جمله : د یوه توکي $u \in R$ لاندې خویونه ایکویوالنت یا ورته دي

الف) u د R یو یوون دی.

ب) R د u ځخه جوړ شوی یا تولید شوی اصلي ایدیال دی ، دا په دې مانا چی $uR = R$.

پ) u د R په هیڅ ماکزیما ایدیال کي خوندي دی یا په بل ډول : په کوم ماکزیمال ایدیالکی خوندي نه دی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت یا اوبی: پ) په ساده توګه له ب) څخه لاس ته راځی. که u د R په کوم ماکزیمال ایدیال کی خوندي نه وي، نو د جملي ۳ . ۷ . ۸ له مخی اصلي ایدیال نه دی.
پس لرو $R = uR$ او $1 = uv$ د یو $v \in R$ لپاره، که چیرې الف ښوول شوی وي. دا ایمپلیکیشن $(b) \Leftarrow (a)$ ساده دی. ځ چ ښ و (څه چی د ښوولو وو)

۳ . ۷ . ۱۲ تعریف: د کړی R یو ناتش برخه‌یری U لاندېکړی بلل کیږي، که د ټولو $u_1, u_2 \in U$ لپاره هم $u_1 - u_2 \in U$ او هم $u_1 u_2 \in R$ باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۳ بیلګي:

الف) د R هر ایدیال Y د R یو لاندي کړی ده.

ب) Z د Q یو لاندېګروپ دی، مګر د Q ایدیال نه دی.

پ) د Z د ټولو جفتو ګڼونو ډیری Y د Z لاندي کړی ده. په ځانګړې توګه دا Y داسی لاندي کړی ده، کومه چی یویتوکی نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چی په ټولیزه توګه یوه لاندېکړی U یویتوکی نه لري، نو ضرور دا ده چی د لاندیکړی د « ایدیال» کلیمه رامنځ ته کړو.

۳ . ۷ . ۱۴ تعریف : U دي د R یوه لاندي کړۍ وي. د U دا ناتشړیری Y د لاندي کړی U یو ایدیال دی، که د ټولو $y_1 , y_2 \in Y$ لپاره $y_1 - y_2 \in Y$ وي او که $yu \in Y$ د ټولو $y \in Y$ او ټولو $u \in U$ لپاره باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۵ لاسته راوړنی: U دي د R یوه لاندېکړی وي او Y دې د کړی R یو ایدیال وي. نو باور لري:

الف) $Y_1 = U \cap Y$ د U یو ایدیال دی

ب) $U + Y = \{ r \in R \mid r = u + r$
د ټولو $u \in U$ او یوه $y \in Y$ لپاره}
یوه د لاندېکړی ده.

پ) $(U + Y) / Y$ د پاتیټولګیکړی R / Y ، لاندېکړی ده.

ت) د R / Y د هر لاندېکړی T لپاره

$$T^{-} = \{ r \in R \mid r[r] \in T \}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د R لاندې کړی ده.

ټ) د R / Y د هر ایدیال I لپاره

$$I^{-} = \{ r \in R \mid [r] \in I \}$$

د R یو ایدیال دی، د $Y \subseteq I^{-}$ او $I^{-} / Y = I$ سره.

اوبی: الف) د تعریف ۳ . ۷ . ۱۲ او تعریف ۳ . ۷ . ۱۴
ښخه ترلی لاس ته راځي

ب) $r_1 = u_1 + y_1 \,,\; r_2 = u_2 + y_2 \in U + Y$ دي،
د $u \in U$ او $y \in Y$ سره، نو لرو

$$r_1 - r_2 = (u_1 - u_2) - (y_1 - y_2) \in U + Y$$

دا چې Y د R یو ایدیال دی نو دا لاندې هم لرو:

$$r_1 \,.\, r_2 = (u_1 + y_1)(u_2 + y_2)$$
$$= u_1u_2 + (y_1u_2 + u_1y_2 + y_1y_2) \in U + Y$$

دا نورې ساده د پ) ، ت) او ټ) اوبیونی د کورکار دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ د بول الجبر ، سرکیټ الجبر

۴ . ۱ د بول د الجبر سټکلیمی

په برخه ۱ کی مو د ډیري M برخډیریو ترمنځ ټړونونه یا عملی ولوستلی. په دې عملیو کی، که چیرته د ډیري M برخډیریو ترمنځ دوه ځایز اپریشنونه یا کارونی (د ډیریو ټړنی) غوڅی ، ټولنه او همداسی کمپلیمنت جوړونه په پوتنځ یا تواندیري باندې یوه «جوړښت» ته سره راټولګه کړي، نو هغه «جوړښت» چی لاس ته راځي، د ډیري M د برخډیریو بول الجبر بلل کیږي. په دې جوړښت کی تشډیری Ø او ټولډیری M یو راوتلی یا کره راوتلی رول لوبوي. د ټړونو لپاره مو د مخه په برخه ۱ کی یوه لړی شمیرقوانین کره کړل او په لیست کی مو راوستل.دا ډول شمیرنی د پوره بل ډول شمیرپوهنیزو شیانو لپاره هم باور لري یا کارول کیږي. دا ګټور دي، چی دا ډول شمیرقاعدې لمړی په دې لاس ته راغلی پرپریکندنی یا پریکړي یا لاس ته راغلي نتیجی په عمومی توګه تر څیړنی لاندې ونیول شي. « ټولیز» دلته په دې مانا

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی، چی د عملي په ډول نه پیچوٌبلکه په هغو توکو، د کومو لپاره چي دا عمليي باور لري. له دې څخه مخ ته ځو، چی د شیا ڼنو یو ډیری مو مخ ته پروت دی د کومو لپاره چي عملیی روښانه یا تشریح دی یا کره شوي دي(یعنی چی یو بل سره « تړلکیدی» شي، د کومو سره چی شمیرنه ممکن وي)، او د دې عملیو سره شمیرنی له لارې، هغه تر څیړنی لاندې نیولي شمیرقوانین باور ولري. له دې څخه په فورمال توگه لاندې تعریف لاس ته راځي. دلته یو دوه ځایزه عملیه یا کارونه یا اپریشن یو تړون یا تړنه ده یو «شمیرقاعده» ده د کوم له مخی، چی له دوه توکو څخه یو دریم توکی لاس ته راځي. (د بیلگي په توگه په گڼونو کي زیاتون یا ځل). یو یوځایزه عملیه له هر توکی څخه یو ټاکلی بل توکی جوړوي (لکه مربع یا د کوم گڼ ریښه یا بهتره ریښه ویستنه).

۴ . ۱ . ۱ تعریف : د بول الجبر د هغو توکو یو ډیری دی ، د کومو لپاره چی دوه دوه ځایزې نخښلونی یا اپریشنونه (عملیي)،غوځی $\cap$ ، ټولنه $\cup$ او یوه یوځایزه عملیه ' کارول کیږي او په هغو کی دوه توکی 0 (په صفر یی په نخښه کوو) او 1 (په یوې باندې په نخښه کیږي) داسی راوتلي یا غوره شوي وي، چی د M د ټولو توکو a , b , c

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره لاندې اړیکې باور لري:

۱ - اسوشیاتیو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$$
$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$$

۲ - کموتاتیو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$a \cap b = b \cap a$$
$$a \cup b = b \cup a$$

۳ - رازغمني یا راکښنی یا جذب قانونونه

$$a \cap (b \cup c) = a$$
$$a \cup (b \cap c) = a$$

۴ - دیستریبوتیو قانون

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$
$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

۵ - د صفر او یوې خویونه

$$a \cup 0 = a \ , \ a \cap 0 = 0$$
$$a \cup 1 = 1 \ , \ a \cap 1 = 1$$

۶ - د کمپلیمنت یا پوره کیدونکی خویونه

$$a \cup \acute{a} = 1 \ , \ a \cap \acute{a} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا اړيکي د بول د الجبر اکسيومونه هم بلل کيږي (د اکسيوم تعريف څما د شميرپوهني کتاب کی ورکړ شوی دی) . موږ تر يوې اندازې زيات اکسيومونه ورکړل، څکه چی برخسيستمونه شته ، له کومو چی بيا دا نور اکسيو- مونه لاس ته راتللی شي.

په دې برخه کی ددې مينيمالسيستمونو کارونی يا استعمال باندې ځانونه نه مشغولوو، همدومره دلته مهم دی، چی ټول شمير قوانين باور ولري.

که د توان يا پوتنځ ډيری P(M) په پام کی ونيول شي، د هغه د غوڅي ∩ (انگريزي meet)، ټولنه ∪ (join) او کملپليمنت جوړونی سره او Ø = 0 , M = 1 سره نو دا د ∩ پورته تعريف سره سم يو د بول الجبر جوړوي. دا کارول شوي سومبولونه يوونيز يا واحد نورم ته نه دي راوړل شوي. د ∩ لپاره ∧ هم کارول کيږي او د ∪ په ځاي ∨ او د á په ځاي $\bar{a}$ هم کارول کيږي.

۴ . ۱ . ۲ بيلگه : يو د بول الجبر بايد تل يو صفر 0 او يو 1 (يوی) خوندې ولري. داکيدی شي ، چی يواځي د 0 او 1 څخه جوړ وي، چی دا يی د بول ساده الجبر دی. وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې 0 او 1 کوم په خوښه سومبولونه. نو په $B=\{0,1\}$
باندې عملیې $\cup , \cap , '$ په لاندې ډول تشریح کیږي:

$$0 \cap 0 = 0 , \quad 0 \cap 1 = 0 , \quad 1 \cap 0 = 0 , \quad 1 \cap 1 = 1$$

$$0 \cup 0 = 0 , \quad 0 \cup 1 = 1 , \quad 1 \cup 0 = 1 , \quad 1 \cup 1 = 1$$

$$0' = 1 \quad , 1' = 0$$

دلته په ساده توګه د بول د الجبر قوانین ازمایل کیدی شي.
له دې سره نو جوړښت یا سترکچر $(B , \cap , \cup , ')$ یو
د بول الجبر دی د دوه توکو سره .

د بول الجبر راوړل شوو اکسیومونو ته یو بل مهم خوي رامنځ
ته کیږي: که په همغه وخت کي اکسیومونه $\cup$ د $\cap$ سره او $\cap$
د $\cup$ سره او 0 د 1 سره بدل شي، په دې ګروپ کی هغه بل
اکسیوم لاس ته راځي . وایو: په ګروپ کی ورکړ شوي اکسیو-
مونه یو بل ته دوال Dual یا دوه ګونی دي.
د بول الجبر هر خوي کیدی شي ، چی له اکسیومونوڅخه لاس
ته راوړل شي، او د بول الجبر د هرې وینا څخه کیدیشي چی
نومولي بدلونونه رامنځ ته شي، دا په دې مانا ، چی دوه ګونی
وینا وې جوړې شي. « وینا دوګونی کیدنه ».دلته یوه ریښتیا
وینا بیرته ریښتیا («د بول د الجبر یوه جمله ») وینا باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلیږي، ځکه چی د سیستم دوه ګونوالی ساتلی پاتی کیږي.
دا د بول د الجبرد دوه ګونی پرینځیپ متن دی: د هرې جملی د ثبوت سره د هغی جملی دوه ګونی هم ثبوت ده.

د بول د الجبر خویونه دې ورکړ شي او په حقیقت کي . د اکسیومونو څخه د لاس ته راوړنو په څیر .

۱ – باور لري $a = a \cap a$ او $a = a \cup a$ د بول د الجبر ټولو توکو a لپاره
اوبی: دی

$$a = a \cap 1 = a \cap (a \cup a') = (a \cap a) \cup (a \cap a')$$
$$= (a \cap a) \cup 0 = a \cap a$$

د $a = a \cup a$ لپاره ښوونه د دوه ګونوالی څخه لاس ته راځي .

۲ – د a کمپلیمنت a' د ورکړ شوو خویونو سره یواځنی ټاکلی دی، دا په دې ماناچي باور لري $a \cap c = 0$ او $a \cup c = a$ نو دی $c = a'$.
اوبي: لمړی دی

$$a' = 0 \cup a' = (a \cap c) \cup a' = (a \cup a') \cap (c \cup a') = c \cup a'$$

او د دې سره دوه ګوني هم $a' = c \cap a'$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله

$$a' = c \cap a' = c \cap (c \cup a') = c$$

دی . څه چی د ښوولو وو (لنډ : څ ښ وو).

۳ – صفر 0 او يوی 1 په بول الجبر کی يواځنی ټاکلي دي،
دا په دې مانا چی دا يواځني تو کی دي، د هغو خويونو
سره، چی په ټکی ۵ کی ورکړ شوي دي.
اوبی : د يوه توکی n لپاره دې د بول د الجبر د ټولو توکوa
لپاره باور ولري $a \cup n = a$ او $a \cap n = n$. که د $a = 0$ لپاره
کيږدو، نو لاس ته راځي $0 \cup n = 0$.له بلی خوا هم $0 \cup n = 0$
او له دې امله $n = 0$ دی. د 1 لپاره اوبيونه د دوه ګونوالی
څخه لاس ته راځي.

۴ – باور لري $(a')' = a$ د ټولو توکو a لپاره. دا له $a' \cap a = 0$
او $a' \cup a = 1$ څخه لاس ته راځي او د کمپليمنت د
يواځنوالی څخه.

۵ – د دې مورګان De Morgan قانون

$$(a \cup b)' = a' \cap b' \quad \text{او} \quad (a \cap b)' = a' \cup b'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت : د دوه ګونپرینځپ له لارې بسیا کوي، که یواځي یوه له دې دوه ګونو ویناو څخه وښایو. دبیلګي په توګه کینه.
د دې لپاره لاندې شمیرقوانین کاروو:

$$(a \cup b) \cup (a' \cap b') = ((a \cup b) \cup a') \cap ((a \cup b) \cup b') =$$

$$= ((a \cup a') \cup b') \cap (a \cup (b \cup b') = 1 \cap 1 = 1$$

او

$$(a \cup b) \cap (a' \cap b') = (a \cap (a' \cap b')) \cup (b \cap (a' \cap b')) =$$

$$= ((a \cap a') \cap b') \cup ((b \cap b') \cap a') = 0 \cup 0 = 0$$

د دواړو مساواتځنځیرڅخه په ګډه لاس ته راځي،
چې $a' \cap b'$ د $a \cup b$ کمپلیمنت دی.
۶ – د اسوځیاتیو و کموتاتیو قوانینو او له

$$a = a \cup a = a \cap a$$

څخه لاس ته راځي: د غوځي (ټولنی) جوړولو نتیجه

په یوه توکو پای ډیرې کې، د لړیپرلپسی څخه خپلواک دی او له دې هم خپلواک دی، چې یو توکي یواځي یوځل او که یا زیات رامنځ ته کیږي. زیاتون نخښي ته ورته لیکل کیږي: $\bigcap_{i=1} a_i$ همداسی د $\bigcup_{i=1} a_i$
د ټولو $a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ لپاره، همداسی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ لپاره.

۷ – دیستریبوتیو قانون هم ټولیز کیدی شي او په رینښتونی داسی

$$\left(\bigcup_{i\in I} a_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J} b_j\right) = \bigcup_{i\in I, j\in J}(a_i \cap b_j)$$

او

$$\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right)\cup\left(\bigcap_{j\in J} b_j\right) = \bigcap_{i\in I, j\in J}(a_i \cup b_j)$$

چیرته چی I او J پاي ایندکسډیري (پیژندډیري) دي

۸ – له $a \cap x = a \cap y$ او $a \cup x = a \cup y$ لاس ته راځی $x = y$

ښوونه : باور لري

$$x = x\cap(x\cup a) = x\cap(y\cup a) = (x\cap y)\cup(x\cap a) =$$
$$(x\cap y)\cup(y\cap a) = y\cap(x\cup a) = y\cap(y\cup a) = y$$

پای.

موږ دلته د بول الجبر ، لکه چی په پیل کی وویل شو، د یوه ذهني نظر له لارې تر څیړنی لاندې نیسو، په دې کی چی موږ د توکو په ډول (چی څه شی دی) کی خپله علاقه نه ګورو، بلکه یوائې دا علاقه لرو، چی له دې توکو سره څنګه شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي. له دې امله د بول الجبرونو M_1 او M_2 ترمنځ يو بييکتيوه ځيرونه داسی موجوده ده، چی د M_1 دوه توکو ټولنه (غوځی) د تنظيم شوو توکو ټولنه (غوځي) تنظيم دي، او د هر توکي کمپليمنت د ورسره تنظيم شوي توکی کمپليمنت دی، نو په دې توګه کيدی شي ، چی دواړه الجبرونه «سوچه شميريز» مساوي و ليدل شي. يو داسی بييکتيو ځيرونه $f : M_1 \longrightarrow M_2$ لکه د مخه مو چی هم ګوته ورته نيولی ايزمورفيزم Isomorphismus نوميږي او دا راوړل شوي شرايط لنډ په لاندې ډول دي. د ټولو $a , b \in M_1$ لپاره باور لري:

$$f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$$
$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$$
$$f(a') = f(a)'$$

د دې سره په کينې لور '، ∪، ∩ د M_1 عمليي او په ښي لور د M_2 عمليي. نخښلونی يا کارونی دي.

د نور الجبرونو په خټې يا خلاف کيدی شي، چی په ټولو (پای) د بول الجبرونو باندې په ساده توګه يو د يوه پام يا نظر امکانات برابر شي. د داسي يوه پاملرنی ته دوه د بول الجبرونه بايد برابر وکتل شي، که د دوي ترمنځ يو ايزومور–

فیزم موجود وي، یعنی که دا ایزمورف وي. دا لاندې مهمه جمله باور لري، چی ثبوت لپاره یی په لیو (LIU 1977) حواله ورکوو .

۴ . ۱ . ۳ جمله : هر یو د بول الجبر د یوه پاي ډیري M د برخډیریو څخه جوړ د بول د الجبر سره ایزومورف دی . په ځانګړي توګه د یوه پای بول د الجبر توکو ګڼون تل د 2^n فورم یا ډول دی ، او هر دوه پاي د بول الجبرونه د برابر ډیرو توکو سره یو د بل سره ایزومورف دي.

که څه هم موږ د پاي بول الجبرونو سره سر او کار لرو، دا باید په ګوته شی، چی په پورته جمله کی ورکړ شوي خویونه یا کرکتریي د ناپای ډیرو توکو ډیري لپاره باور نه لري . ناپای ډیر د بول الجبرونه شته، کوم چی د ډیري د ټولو برخډیریو د الجبر سره ایزومورف نه دي. د دې لپاره چی ټولی ناپای ډیر د بول الجبرونه کرکتریزه کړی شو، لاندې کلیمو ته اړ یو. M دې یو ډیری وي. یو سیستم K د M برخډیریو ډیریبدن یا ډیریتن بلل کیږي، که K د A, B سره $A \cap B$, $A \cup B$ او $A \cap B$ هم خوندې ولري.
د بیلګي په توګه ټول د تواندیری ډیریتن دی. K دې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډيري M برخډيريو يو ډيريتن وي، د $M \in K$ سره.
په K باندې کيدی شي بيا يو بول الجبر توضيح شي، په کوم کي چی ⊔ د ټولنی ،⊓د غوځی ، تشډيری Ø د صفر ، يو ډيری M د يوې ډيری، 'A د $A \in K$ کمپليمنت M - A سره نيسی ، يعني دا ډيري تيوريتيکي کومپليمنت. داسی يو الجبر ډيريبدن الجبر هم بلل کيږي او په ټوليزه توګه د M هر برخډيری خوندې نه لري. اوس دا لاندې جمله باور لري، چی د ثبوت لپاره دې
GRÄTZER(1977) وکتل شي.

۴ . ۱ . ۴ جمله : (د ستون Stone جمله) هر د بول الجبر د ډيريتن الجبر سره ايزومورف دی.

د بول د الجبر کرکتريزه کولو سره په اړوند ، کيدی شي چی د بول د الجبر سيده ځل ګټور وکارول شي يا استعمال شي.

۴ . ۱ . ۵ تعريف : V او W دې دوه د بول الجبرونه وي، چی د هغی بنسټيز ډيري هم په V او W سره په نخښه کوو. نو دا د V او W سيده ځل $V \times W$ د بول الجبر دی د ټولو منظمو جوړو (v,w) په ډيري، چی $v \in V$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $w \in W$ وي، د لاندي عمليو سره

$$(v,w) \cap (v_1,w_1) = (v \cap v_1, w \cap w_1)$$
$$(v,w) \cup (v_1,w_1) = (v \cup v_1, w \cup w_1)$$
$$(v,w)' = (v',w')$$

او د صفر توکی (0,0) او د يوي توکي (1,1) سره، چی د V او W همغه مساوي توکي دي.

د دې ښوونه دې د ګرانو لوستونکو دنده وي، چی وښايي، چی سيده ځل $V \times W$ په رينښتيا دبول الجبر دی.

اوس دې B د بول الجبر وي په دوه توکو باندې، يعني $B = \{0,1\}$ د ترونونو

$$0 \cap 0 = 0, \quad 0 \cup 1 = 1, \quad 1 \cup 1 = 1$$
$$1 \cap 1 = 1, \; 1' = 0, \; 0' = 1$$

سره. د B^n لاندې، دا n–ځله، د B دخپل ځان سره سيده ځل پوهيږو. د B^n توکی منظم n–ګونی دې له توکو 0, 1 او د بول ترونونو کمپوننت ډوله تشريح شوي. دا په دې مانا چی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a_1, ..., a_n) \cap (b_1,...,b_n) = (a_1 \cap b_1,...,a_n \cap b_n)$$
$$(a_1,....,a_n) \cup (b_1,...,b_n) = (a_1 \cup b_1,...,a_n \cup b_n)$$
$$(a_1,...,a_n)' = (a_1',...,a_n')$$
$$1 = (1,...,1)$$
$$0 = (0,...,0)$$

د بیلګې په توګه د $n = 5$ لپاره باور لري

$$(0,1,0,1,0) \cup (1,0,1,1,0) = (1,1,1,1,0)$$
$$(0,10,10) \cap (1,0,0,1,1) = (0,0,1,1,0)$$
$$(1,1,0,0,1)' = (0,0,1,1,0)$$

له دې بیلګې لیدل کیږي، چې په B^n کې ساده شمیرنه کیدی شي. له بلې خوا د B^n توکو ګڼون 2^n دی او د جملې ۴ . ۱ . ۳ هر د بول الجبر د 2^n توکو سره د B^n سره ایزومورف دی. د بول الجبر د څیړنې لپاره کیدی شي، چې دا د الجبر درس په B رالنډ کړي.

۴ . ۲ . د بول فنکشنونه او پولینومونه

مو ږد فنکشنونو لپاره، د ترونونو په تعریف پیل کوو، چې ارزښتېدیرې یې د بول الجبر وي. دلته دې M یو په خوښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیری وي او V دې یو د بول الجبر. د دوه ځیرونو

$$f, g : M \longrightarrow V$$

لپاره لاندې عملیې ∩ ، ∪ تشریح کوو، د

$$(f \cap g)(x) = f(x) \cap g(x) \quad , x \in M$$
$$(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x) \quad , x \in M$$

سره ، او همداسې یوکمپلیمنتجوړښت د

$$f'(x) = (f(x))' \quad , x \in M$$

سره.

د دې تعریفونو ښی اړخ پوره یا ټیك تعریف دی، ځکه چې f(x) او g(x) د V توکی دي او له دې امله ∩، ∪ موخه ور یا هدفمند دي. اوس په ساده توگه شمیرل کیږي، چې د ټولو د M په V کې ځیرونو ټولگه له دې سره یو د بول الجبر کیږي، چې د هغه صفر توکي د ځیرونه f ده، د f(x) سره، ټول $x \in M$ او د هغې یوي توکي د ځیروني f له لارې ښخه د f(x) سره، ټولو $x \in M$ دي.

یو ځانگړی حالت هلته لرو که ډیری M د V n–ځله د خپل ځان سره سیده ځل وي. موږ غواړو ټولی د V^n ځیرونی په V کی د $A_n(V)$ سره په نخښه کړو او دا $A_n(V)$ د n– ځایزې د بول فنکشنونه په V باندې نومو یا بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هره د f ځیرونه له $A_n(V)$ هر n–ګونی $(v_1,...,v_n)$ چې د V له n توکو څخه جوړ وي، د V په یوه توکی $f(v_1,...,v_n)$ تنظیموي. د دې ځیرونو لاندې یی ثابتی ځیرونی او پرویکشنونه د ځانګړو ماناو یا اهمیت دی. یوه ثابته ځیرونه د ټولو$(v_1,...,v_n)$ لپاره همغه فنکشن ارزښت لري. یو i–ام پرویکشن x په لاندې توګه تعریف دی.

د ټولو $V^n \in (v_1,...,v_n)$ لپاره , $x_i(v_1,...,v_n) = v_i$

یادونه : موږ دا ستونځې لرو، چې د شمیرپوهنې لیکنه کې کله کله د کینې وښی لور ته او بیا بیرته له ښي وکینې لور ته لوستل کیږي، نو کیدی شي ، چې داپورته داسی هم ولیکل شي: د ټولو $(v_1,...,v_n)$ ∋ V^n لپاره

دا دا مانا لري چې : ځیرونه x_i (داهم تر یوې اندازې ورسره نا بلد کار دی، چې فنکشن په x_i ښایو، خو فکر کوم، چې کومی ستونځي به د دې سره مل نه وي) هر n–ګونی د هغه په i– ام کمپوننت تنظیموي. له ثابتو ځیرونو او پرویکشنونو یا پریوستونونو د∩، ∪ ، / ' عملیو. نخښلونو یا کارونو په مرسته یوه ځانګړې n–ځایز د بول فنکشنونو، مهم ټولګی د بول پولینومونه جوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ . ۲ . ۱ تعریف : هره څیرونه $f : V^n \to V$ ، کومه چی په $A_n(V)$ د پاي زیاتو د عملیو ∩، ∪، ' کارونو یا استعمال څخه، له ثابتو او پرویکشنونو، لاس ته راوړي، د بول n – ځایز پولینوم فنکشنونه بلل کیږي.

۴ . ۲ . ۲ بیلګه : که ثابت فنکشن په ساده توګه د هغه د ارزښت سره وښایو، داپه دې مانا چی د V د یوه توکی په څیر ، نو

$$(a \cap x_1) \cup (b \cap x_2 \cap x_3 \cap x_4) \cup (x_1 \cap x_2)'$$

یو د بول پولینومفنکشن $P : V^4 \to V$ انځوروي: دکوم لپاره چی باور لري

$$P(v_1,v_2,v_3,v_4) = (a \cap v_1) \cup (b \cap v_2 \cap v_3 \cap v_4) \cup (v_1 \cap v_2)'$$

دلته a,b د V په کلکه ځاي په ځاي توکی دي.

یو د بول پولینوم فنکشن د یوې افادي له لارې کره ټاکلی دی، چی له ثابتو (له V څخه) او پرویکشنونو x څخه د ' ، ∩ ، ∪ له لارې جوړ وي. داسی یوه افاده د بول پولینوم بلل کیږي او دا یو د شمیرنی قانون د فنکشن ارزښت ټاکنی یا تعین لپاره راکوي، که د x لپاره i –ام

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپوننت يو n–ګونی له V^n څخه کيښوول شي. دا شميرنه په رابنديزه توګه په V کی باور لري او دا توکي $P(v_1,...,v_n) \in V$ راکوي. د پولينوم (= افاده) او په دې پورې اړوند پولينومفنکشن(=څيرونی) ترمنځ بايد ټيک توپير وشي. اړيکی « پولينوم» د دې بول د فنکشن لپاره دا لاس ته راکوي، چی له $x_1,...,x_n$ او ثابتو څخه د ' ، ∩ ، ∪ سره ټيک راجوړي دي يا بهتره په دې باندې جوړې دي، لکه څنګه نور رييل پولينومونه د نښلونو + , * او − سره، چی نمونه يی ده

$$p(x) = a_0 + a_1x + ...+a_nx^n$$

دلته x له يوه بنسټيزې څخه دی او a_i د ټولو $i \in I$ لپاره يو رييل ګڼ دی.

دوه د بول مختلف پولينومونه په کوم کي چی x او کومی ټاکلی ثابتی، او ' ، ∩ ، ∪ کړی شي ، چی هغه پولينومونه وټاکی: دبيلګی په توګه د $x \cup (a \cap x)'$ او $x \cup (a' \cup x')$ لپاره همغه حالت دی. که دوه داسی پولينومونه له مخه ورکړ شوي وي، نو مهمه ده چی وڅيړل شي يا پريکړه په وشي، چي ايا د دوې سره برابر فنکشنونه مساوي دي. دا داسی پيښيږی، چی د هر پولينو–

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفنکشن f لپاره یو نورمالفورم N(f) د یوه ټاکلی افادې په څیر داسی ورکول کیږي، چی د $f_1 \mid= f_2$ لپاره $N(f_1) \mid= N(f_2)$ باور ولري. برسیره پردې یوه تګلار ورکول کیږي، دکومي سره چی هر پولینوم په نورمالفورم ترانسفورمي کیدی شي. نو بیا دوه پولینومونه ټیك هلته همغه پولینومفنکشن دی، کله چی د هغوی نورمالفورم یو له بل سره پریوزي. دا پروګرام اوس غواړو پلی کړو.

۴ . ۲ . ۳ تعریف: ویل کیږي، چی یو n– ځایزه پولینوم په دیسیونکتیو نورمالفورم (disjnktiver Normalform) یا نورمالبڼه دی، که دا د لاندې فورم یا بڼی وي:

$$P = \bigcup_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$$

د دې سره $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in V$ دی ، د ټولو $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ لپاره، هر $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ یو n–ګونی دی له ۱ او ۱– سره، او ټولنه یی په دې ټولو 2^n n –ګونو غزول کیږي، چیرته چی x_i^1 د x_i او x_i^{-1} د x_i' لپاره ځاي په ځای یا ځایول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته قانونيت يا قرارداد سره د هر پولينوم P کونيو- نکتيو نورمالفورم بلل کيږي، دلاندې ډبنی سره:

$$P = \bigcap_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$$

که يو ځانګړی ديسيونکتيو نورمالبڼه وليکل شي، نوټول غړي به د ديسيونکتيو نورمالفورم سره $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$ له ليکلو پرينښوول شي يا صرف نظر به پرې وشي، ځکه چې دا په نتيجه کوم تاثير نه پريباسی. په ورته توګه دا د ديسيو- نکتيو نورمالفورم لپاره باور لري، که $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$ وي.

۴ . ۲ . ۴ بيلګه : يو پولينوم په ديسيونکتيو نورما- لفورم دی (د $a,b,c,\ldots \in V$ سره):

$$(a \cap x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (b \cap x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup$$
$$(c \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3) \cup (d \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

لاندې يو کونيونکتيو نورمالفورم دی:

$$(a \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3) \cap (b \cup x_1 \cup x_2' \cup x_3) \cap$$
$$(c \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3') \cap (d \cup x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap$$
$$(e \cup x_1' \cup x_2' \cup x_3')$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ . ۲ . ۵ جمله : هر د بول پولینومفنکشن
$P : V^n \to V$ لپاره ټيك يو ديسيونكتيو نورمالفورم موجود
دی. نو په دې توګه ټيك يو د بول پولینوم لاس ته راځي، کله
چی ټول ديسيونكتيو نورمالفورمونه جوړ شي. په همدې توګه
(دوه ګوني) ویناد كونیونكتيو نورمالفورم لپاره هم باور لري.

د دې جملی د ښوونی څخه هم دلته تیریږو، دا په نورو ادبیاتو
کی شته(دا دې ګران لوستونکی په پام کی ونیسی، چی دا
به څما پوره وخت ونیسی که دا هرڅه راوګورم. څما هدف
همدومره دی، لکه چی په نورو ځایونوکی می هم ګوته ورته
نیولی، دا بنستیز څه راټول کړم)
د نورمالفورم د څیړلولپاره کله کله لاندې خویونه (قاعدې)
ګټورې دي، کومی چی په نورمالفورم کی د $V \ni 0,1$
« ځایونو یا اینښوونو » له لارې لاسته راوړل کیږي. څکه چی
د بیلګي په توګه $x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \dots \cap x_n^{i_n}$ یواځې د n -ګونو لپاره
له $V \ni 0 , 1$ نا مساوي 0 دي(په ریښتونی مساوي په 1)،
په کوم کی ، چی $x_j = 1$ د $i_j = 1$ لپاره او $x_j = 0$
د $i_j = -1$ لپاره دی، یعنی د دې n–ګونی
$(1^{i_1}, 1^{i_2}, \dots, 1^{i_n})$ لپاره .

(c) ketabton.com: The Digital Library

قاعده ۱ : که دا لاندې

$$\bigcup_{(i_1, \ldots, i_n)} a_{i_1 \ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$$

د بول د پولينوم فنکشن $P \in A_n(V)$ ديسيونکتيو نورمالفورم وي، نو د $1' = 0$ ، $1^1 = 1$ ، $\bar{1}^1 = 1' = 0$ سره باور لري

$$a_{i_1 \ldots i_n} = P(1^{i_1}, \ldots, 1^{i_n})$$

د ټولو $(i_1, \ldots, i_n)$ لپاره.

نو د بيلګې په توګه د $n = 3$, لپاره دی:

$$a_{1,-1,1} = P(1,0.1), \quad a_{-1,-1,-1} = P(0,0,0),$$
$$a_{1,1,1} = P(1,1,1)$$

ددې اړيکو وروسته د P د ديسيونکتيو نورمالفورم د ټاکلو لپاره بسيا کوي، که د P د 2^n فنکشن ارزښتونه په ټولو n–ګونو کی له 0 او 1 (د V څخه) راپيدا کړو.

ليدوړ دا لاس ته راوړنی د $n = 2$ لپاره د P ديسيونکتيو نورمالفورم په لاندې توګه راکوي:

$$P = (P(1,1) \cap x_1 \cap x_2) \cup (P(0,1) \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$(P(1,0) \cap x_1 \cap x_2') \cup (P(0,0) \cap x_1' \cap x_2')$$

د دې سره د ديسيونکتيو نورمالفورم لپاره دوه ګوني نتيجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې توګه ده:

قاعده ۲ : که

$$\bigcap_{i_1, \ldots, i_n} a_{i_1 \ldots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$$

د بول د پولینومفنکشن P دیسیونکتیو نورمالفورم وي، نو د $0^1 = 0$, $0^{-1} = 0' = 1$ سره باور لري

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = P(0^{i_1}, 0^{i_2}, \ldots, 0^{i_n})$$

د بیلګي په توګه د $n = 3$ لپاره دی :

$$a_{1,1,-1} = P(0,0,1) \quad \text{او} \quad a_{-1,-1,1} = P(1,1,0)$$

پخوا له دې چې موږ د نورمالفورم ترانفورمیشن لپاره تګلار روښانه کوو، یا لیکو، نو د مختلفو څیرو ګڼون(تعداد یا شمیر) دې ورکړ شي. دلته طبعاً بول الجبرونه پای دي. که V تیك $2^k = m$ توکي ولري، نو $A_n(V)$ لکه چې پوهیږو $m^{(m)^n}$ توکی لري، ځکه چې V^n ټیك m^n توکی لري. د بول پولینومفنکشن ګڼون د دې په څټ m^{2^n} دی، کوم چې سملاسی د نورمال فورم په څیر انځورونی څخه لاس ته راځي، ځکه چې د دلته 2^n څلوونې یا ضریبونه $a_{i_1 \ldots i_n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په خوښه د m توکو سره (له V څخه) ځاینیونکی یا ځاي په ځاي کیدی شي. که $m > 2$ وي، نو په ټولیزه توګه کم پولینومفنکشنونه موجود دي نسبت و ځیرونو ته. که $m = 2$ وي، کوم چې د کارونی یا استعمال لپاره مهم حالت انځوروي، نو بیا دواړه ګڼونه مساوي دي، په نامه 2^2 سره . له دې لاس ته راځي

۴ . ۲ . ۶ **جمله:** که $B = \{0,1\}$ دوه توکیزه د بول الجبر وي، نو هر n – ځایز د بول فنکشن ، یو د بول پولینومفنکشن په ځیر انځوروړدی.

اوس د دیسیونکیو نورمالفورم د راپیداکولو تګلار و یوه پولینومفنکشن P ته، په P باندې لاندې پلونه کارول کیږي:

۱ – د دې مورګان de Morgan قاعدې د استعمال له لارې ټول کمپلیمنت ' جوړښتونه ترلې x_i ته راوړل کیږي، همداسی ثابتو ته راوړل کیږي.

۲ – د دسیتریبوتیو قانونه کارونی یا استعمال سره سم P د غوځیو ټولنی ته راوړل کیږي. په دې فورم کی په ټولیزه توګه ځنی «زیاتووني» (د x_i او x_i' غوځي دي) یو ځو x_i ورکیږي، مګر د هر i لپاره په یوه زیاتووني کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیات تر زیاته یو له x_i او x_i' رامنځ ته یا راڅرګندیږي.

۳ – که د دیسیونکشن په یوه زیاتون کی یو x_i ورك شي، نو $x_i' \cup x_i$ په دې زیاتون کی د یوه «فاکتور» په څیر ورزیاتیږي(دا اړوند پولینومفنکشن نه تغیروي، ځکه چی $x_i' \cup x_i$ تل 1 ورکوي)

۴ – په دې داسی تغیر شوې زیاتوونی باندې تر هغی پورې دیستریبوتیو قانون کارول کیږي یا استعمالیږي، تر څو چی بیرته د غوڅیو ټولنه رامنځ ته شي یا راپیدا شي. دا د برابرو زیاتونونو د ټولګی (دا په دې مانا، چی چیرته چی همغه x_i کمپلیمنت شوی وي او یا نه وي کمپلیمنت شوی) او دیسیونکتیو نورمالفورم ترتیبوو (بیرته د دیستریبوتیو قامون د کارونی لاندې) ، که چیرې ممکن دا ورك زیاتوونی(د x_i او x_i' غوڅی) د ځلوونو 0 سره تکمیل شي.

دا روښانه ده، چی د ټول هغه بڼه اړونی یا فورمبدلون سره، چی همغه مطلوب پولینوم پورې اړه لرونکی پولینوم فنکشن، همغه پولینومفنکشن لکه پخپله P دی. په ریښتونی سره له دې امله د پولینومفنکشن نورمالفورم وP ته لاس ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ . ۲ . ۷ بيلګه : P دې په V باندې په لاندې توګه دوه ځايز پولينومونه وي

$$P = ((a \cap x_1) \cup (b \cap x_2)')' \cup (x_1 \cup b)'$$

د $a,b \in V$ سره

لمړی پل :

$$((a' \cup x_1') \cap (b \cap x_2)) \cup (x_1' \cap b')$$

دوم پل :

$$(a' \cap b \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1')$$

دريم پل

$$(a' \cap b \cap (x_1 \cup x_2') \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b' \cap x_1' \cap (x_2 \cup x_2'))$$

ځلورم پل

$$(a' \cap b \cap x_1 \cap x_2) \cup (a' \cap b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$$

د

$$(b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) = (1 \cap x_1' \cap x_2)$$

له امله، د نورمالفورم په بڼه لاس ته راځي:

$((a' \cap b) \cap x_1 \cap x_2) \cup (1 \cap x_1' \cap x_2) \cup (0 \cap x_1 \cap x_2') \cup$
$\cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$

لوستونکي دې دا نتیجې د قاعدې ۱ سره و ازمایي.

په پای کي دې n – ځایز ځانګړی د بول فنکشنونه په $B = \{0,1\}$ باندې وڅیړل شي، کوم چې همدا اوس د n– ځایز پولینومونو له لارې ، د مخه تیرې جملی سره سم راونیول کیدی یا لاس ته راتلی شي.

که P یو داسی پولینوم وي، نو P هر n–ګونی د 1 , 0 یا په 0 او یاپه 1 تنظیموي. په دیسیونیکتیو (کونیونکتیو) نورمالفورم کی ځلووني هم یا 0 او یا 1 دي او لاندې پریکړه کوو: په دیسیونکتیو نورالفورم کی ټول زیاتووني یانی $x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap .. \cap x_n^{i_n} \cap a_{i_1 i_2 .. i_n}$ د ځلونو $a_{i_1 i_2 ... i_n} = 0$ سره پریښوول کیږي او ځلوونی 1 نه لیکل کیږي. په کونیونکتیو نورمالفورم کی به ټول فاکتورونه (دا اوس ټولنه $x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup .. \cup x_n^{i_n}$ ده) د ځلونو $a_{i_1 i_2 .... i_n} = 1$ سره پریښوول کیږي یعنی صرف نظر پري کیږي او ځلوونی 0 نه لیکل کیږي. دا چی 1 او 0 د $\cup$ او $\cap$ لپاره ناپیلی یا بیتاثیره توکی دي، نو د هغه نورمالفورم باندې لیکلي پولینوم کی تغیر نه راځي . په هر حالت بیا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثابت فنکشن د 0 ارزښت سره (داسې لیکوړ دی) دیسیونکتیو نورمالفورم نه لري. او ثابت فنکشن د ارزښت سره کوم کونیونکتیو نورمالفورم نه لري.

۴ . ۲ . ۸ بیلګه: د لته دې ۳ -ځایز فنکشن

$P: B^3 \longrightarrow B$ د لاندې جدول سره ورکړ شوی وي:

x_1	x_2	x_3	P
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

د قاعدې ۱ سره سم د P دیسیونکتیو نورمالفورم د لاندې سره برابر دی.

$$(x_1 \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3) \cup$$
$$\cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

دیسیونکتیو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت ۱ لپاره یو زیاتوونی خوندي لري، په کوم کې چې x_i ولاړ دی ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $x_i = 1$ وي، او x_i' ولاړ وي، که $x_i = 0$ وي(په ورته توګه n– ګونی $(x_1,x_2,...,x_n)$ د فنکشن ارزښت 1 سره) . که x_i د یوه شرط په څیر ونیول شي($x_i = 1$) نو بیا « شرطونه پوره دی » بلل کیږي، $x_i = 0$ په همدې توګه « شرطونه نه دې پوره» بلل کیږي) ، نو په دې توګه دیسیونکتیو نورمالفورم د ټول کمبینیشنونو یو لیستونه یا یوجوړشوی لیست راکوي د ټولو n شرطونو x_i سره ، په کومو کی چي 1 د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي: $x_1 \cap x_2 \cap x_3'$ په همدې توګه x_1 او x_2 پوره دې او x_3 پوره نه دی.

د قانون ۲ د کونیونکتیو نورمالفورم P د لاندې سره برابر دی :

$$(x_1' \cup x_2 \cup x_3') \cap (x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap (x_1 \cup x_2 \cup x_3')$$

کونیونکتیو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت 0 لپاره یو فاکتور خوندې لري، په کوم کی چي x_i ولاړ دی یا ځای دی، که $x_i = 0$ وي او x_i' ځاي په ځاي وي ، که $x = 1$ وي (په همدې توګه n – ګونی $(x_1 , ...x_n)$ له B^n څخه د فنکشن ارزښت 0 سره) . کونیونکتیو نورمالفورم پس د کمبینیشن د شرطونو یو لیست جوړونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ده، د کومو لاندې چې 0 د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي : $x_1' \cup x_2 \cup x_3'$ په دې مانا دې، چې x_1 یا x_2 پوره دي او یا x_3 پوره نه دی.

په الجبر $A_n(B)$ کې د $A_n(B)$ څخه دیوه د مخه ورکړ شوي پولینوم فنکشن P کمپلیمنت 'P څنګه ټاکل کیږي؟
د ورکړ شوې قانونمندی له مخی د دې لپاره په ساده توګه P په یوه دیسیونکتیو نورمالفورم انځوروي، بیا نو 'P ټیك د غوڅیو ټولنه ده، کومه چې د P په نورمالفورم کې نه رامنځ ته کیږي(یعنی 0 ځلوونی لري).
په ورته توګه د دیسیونکتیو نورمالفورم لپاره هم مخ ته تللی شو.

۴ . ۲ . ۹ بیلګه : د اخرنی بیلګی څخه د پولینوم فنکشن P لپاره د 'P دیسیونکتیونورمالفورم په لاندې توګه ورکړ شویدی

$$(x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3)$$

پام دې وي، چې $(p')' = P$ دی او د دېمورګان قانون له مخې د یوه دیسیونکتیونورمالفورم کمپلیمنت کونیو- نکتیو نورمالفورم دی، نو ګورو، چې د د دیسیونکتیو

(c) ketabton.com: The Digital Library

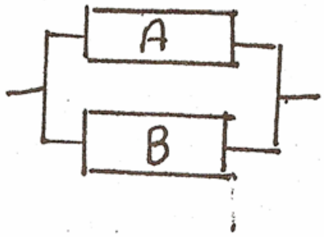
نورمالفورم 'P ځخه کونیونکتیونورمالفورم P د کمپلیمنت دجوړولو له لارې لاس ته راوړي،

۴ . ۳ سویچ الجبر یا برېښنا جیریان الجبر

په برېښنایي یا برقي سرکیتونو (Schlatkreise (En. circuit (یا برېښناجیریانکړی یا په ساده توګه :برېښنادوران) کی سویچ د برېښنا اړیکو یا برېښنا ټرونونو کی، د وازولو او بندولو لپاره دنده په غاړه لري. موږ دلته دوه ګوني دوه اړیکیز سویچونه تر ځیړنی لاندې نیسو، کوم چی په بند حالت کی برق جیریان په دواړو لورو ممکنوي. د سویچ حالت کیدی شي بند یا واز وي، یعنی ټیك دوه ازښتونه نیولی شي. واز سویچ سره ارزښت 0 تنظیموو او بند تړلي سویچ سره ارزښت 1 تنظیموو، داسی چی 0 په دې مانا دی ، چی«برق نه شته یا برق جریان نه لري» او 1 دا مانا لري، چی« برق جریان لري» . دلته 0,1 د سویچ ارزښتونه هم بلل کیږي.

کیدی شي، چی سویچونه په زیاتو ډولونو یوه سرکت ته سره

یوځای کړی شي. دلته خورا مهم یی هغه سرکیټري circuitary دی، چی د پایډیرو غبرګسرکیټریو یا همداسی سیریالسرکیټریو په ځیر جوړ شوي وي. په ټولیزه توګه سویچونه هغه جوړښتونه وي ،کوم ، چی«واز» یا « بند یعنی تړلی» کیدی شي.



ځیره

که A او B دوه سویچونه وي، نو غبرګسرکیټري، لکه په پورته ځیره کی انځور شوی په کار واچول شي، او دا به د A v B سره په نخښنه کیږي.

په ځرګند ډول A v B یو سویچ ارزښت 1 لري، که کم له کمه یو له دې سویچونو څخه واز وي او ارزښت 0 لري، که دواړه سویچونه ارزښت 0 ولري. کیدی شی د سویچ ارزښتونو لپاره پخپله غبرګ سرکیټري (یا شاید په انګریزي سرکیټ وببل شي) داسی ولیکل شي

$$0 \vee 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 , 1 \vee 0 = 1 , 1 \wedge 1 = 1$$

کیدیٔ شي ، چی $A \vee B$ د یوځاي اآینبوول شوي سویچ په څیر وکتل شي، چی دا د A او B په اړتیا یا په واك برقجریان بهیږي یا برق جایان لري او که یا نه بهیږي یا نه پریږدي.

د A او B سویچونو زیریالسرکیټري $A \wedge B$ د A او B یو بل پسی یعنی په پرلپسی توګه اینبوونی یا ځاي په ځاي کونی څخه منځ ته راځي، لکه په څیره کی چی انځور شوي. سرکیټ یا بریښنادوران $A \wedge B$ ټیك او ټیك هلته ارزښت1 لري، که دواړهٔ سویچونه ارزښت 1 ولري او په غیر له دې ارزښت 0 . لنډ : $0 \wedge 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$

او $1 \wedge 1 = 1$

دلته هم $A \wedge B$ یو رایوځاي شوی سویچ دی.

ددې سره ترنی $A \vee B$ او $A \wedge B$ د سویچ لپاره همغه فورمالی قاعدې ډکوي یا پوره کوي، لکه د ویناو لپاره د سمسوځ له پوهی ورسره بلده په $\vee$ او په $\wedge$ راوړل شوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټرونونو کي. هلته د يوې وينا نه والی هم موجود دی.
که ۷ ، ۸ د سويچ ارزښتونو1 , 0 په څير راونيسو، نوهغه
په باندې شميرقوانين د ۷ او۸ ديوه بول الجبر لپاره .
په { 0 , 1 } پوره دي. هلته کومپليمنټ هم په واک کی لرو.
دا کليمي جوړونی د سويچ لپاره هم يوه موخه لري: د 'A
سره يو سويچ په نخښه کوو، کوم چی تل يو و A ته په خټ
ارزښت لري، د کوم سره، چی مور په تخنيکي رينښتينوالی
يا رياليزه باندې ددې

څيره

غوښتنو (لکه د مناسبو چالانماشين له لارې) په غم کی نه
يو.'A د A نيگيشن يا نفي هم بلل کيږي. د سويچ ارزښت
لپاره دا دامانا لري، چی 0 = '1 , 1 = '0 . په دې توگه سويچ
ارزښتونه د عمليو يا کارونو۷، ۸ ، ' سره يو دوه توکيزه
بول الجبر جوړوي.

۴ . ۳ . ۱ تعريف : يو زيريالغبرگ سرکيټېږي دپای ډيرو
سويچونو څخه جوړيږي د پای زيات فورمال عمليو ، ، '
د کارونی يا استعمال سره. په داسی سرکيټ کی دوه سويچونه،
کوم چی همغه د سويچ ارزښتونه لري په همغه يا برابر سومبول
سره په نخښه کيږي.
ټيک داسی تعريفولی شو: هر سويچ يو زيريالغبرگ سرکيټېږي
جوړوي. که S_1 ، S_2 زيريالغبرگ سرکيټونه وي(يعنی سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

رایوځاي اینښوولي سرکیټېري یا سویچونه) ،
نو $S_1 \wedge S_2$, $S_1 \vee S_2$ او S' هم زیریالغبرګ سرکیټرونه دي.
هر زیریالغبرګ سرکیټري په ټولیزه توګه زیات پیچلی جوړ شوی سویچ دی، چې د «برخسویچونو»ځاینیوني څخه په واکوالي کي یا په اړه، واز (ارزښت 0) یا تړلی (ارزښت 1) دی. له دې امله کیدی شي، چې بیرته دوه سرکیټونه د $\wedge$ او $\vee$ له لارې سره وتړل شي. کیدی شي، چې مور لنډ له سرکیټونو یا سرکیټریو څخه وغږیږو.
د یوه زیریالغبرګ سکریټري S د سویچ د هر ځاي نیوني لپاره د یوه ټاکلی سویچ ارزښت ټول سرکیټري لاس ته راکوي ، په دې اړوند، چې ایا د دوي ترمنځ بریښنا بهیږي (جریان لري) او که نه. پس وي دې $A_1 , ..., A_n$ د پورته تعریف سره سم د سرکیټ $S(A_1,...,A_n)$ سویچونه ، د کومو سره چې A_i زیات واره جوړیدی شي. د سویچونو $A_1,...,A_n$ هر ځاینیونه د 1 , 0 د یو n-ګونو سره برابر دی او د S له لارې یا د S سره به دا n-ګوني یا 0 او یا 1 د S په سویچ ارزښت باندې تنظیمیږي. په دې توګه سرکیټ S یو n -ځایز د بول-فنکشن f_S په دوه توکیز د بول په الجبر $B=\{0,1\}$, $f_S : B^n \rightarrow B$ تعریفوي(دې ته دې دلته هم پام وي او داسې نور ورته لیکنو ته ، چې دا د لاتین تورو لیکنې له کیڼ وښي لوز ته لوستل کیږي، په دې ګران لوستونکي پوهیږي، چې یادونې ته اړتیا نه شته،خو زما زړه نه ودریده) . دلته f_S په سرکیټ S اړه لرونکې

(c) ketabton.com: The Digital Library

سویچ فنکشن بلل کیږي. اوس څنګه کیدی شي، چې سرکیټ په $A_n(B)$ کې د سرکیټري لپاره د $\cap$، $\cup$، $'$ کارونې یا عملیې وکارونه واضح کړای شي؟ اوس دې S,T دوه سرکیټونه وي، له سویچونو A_i څخه د سویچفنکشنونو f_S , f_T سره، نو کیدی شي، چې له S , T څخه هم زیریالسرکیټري $S \wedge T$ او هم یو غبرګسرکیټري $S \vee T$ جوړ شي، پوره و یوګونو سویچونو ته ورته یا لکه همغسې لکه یو ګوني سویچونه. دا نو اوس روښانه ده، چې $f_T \cap f_S$ د $S \wedge T$ سویچفنکشن دی او $f_S \cup f_T$ د $S \vee T$ سویچفنکشن دی. بالاخره f_S' سویچفنکشن دی و سرکیټ S' ته، کوم چې تل و S ته مخامخ- یا په بل عبارت په خټ سویچ ارزښت لري.

۴ . ۳ . ۲ تعریف : دوه زیریالغبرګ سرکیټري S او T و همغو سویچونو $A_1 , A_2 , \ldots, A_n$ ته، ایکویوالنت یا همغه ارزښتیز بلل کیږي، که دا همغه سویچفنکشن ورکړي، دا په دې مانا چې که د هغو سویچفنکشنونو f_S او f_T لپاره باور ولري $f_T = f_S$.

د استعمال یا کارونې د لیدټکي څخه دا تعریف موخور (همدفمند) دی، ځکه چې لمړی علاقه مو د سویچفنکشن سره ده، یعني د سرکیټ ځانګیونې ته ده او کم د هغه دننۍ جوړښت ته.

د سرکیټونو ترمنځ په دې پورته ورکړ شوي تعریف کې روښانه شوی اړیکه په رښتینې برابرارزښته اړیکې دی، په داسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

حال کی چی دې برابرارزښتتولګی پورې تړل سرکیټونه اړه لري یا په هغه ټولګی کی دي، د همغه سویچفنکشن سره.
له دې سره د سرکیټ څیړنه د بول الجبر په څیړنه بیرته واړول شوه او په دې توګه شمیرپوهنیزو متودو یا لارو ته لار ,ور جوړه یا ور وازه شوه، لکه په مخته تیره برخه کی چی ودیزه شوې وې.
په سرکیټړي تیوری(Swiching Theory) او همداسی په ټولیزه توګه په سرکیټ تیوري کی دوه غوره پرابلمونه دا لاندې دي:
اول) د ورکړ شوي سرکیټړي شننه یا تحلیل او
دوم) د پلټونکی سرکیټړي سینتیز Synthese .
په شننیز حالت کی یو سرکیټړي S د مخه ورکړ شوې ده او د هغه سویچفنکشن باید راپیدای شي یا غوښتل کیږي.
د دې لپاره د S د هر سویچ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ د سرکیټړي S لپاره د سویچ ارزښت باید کره وټاکل شي. کیدی چي اوس S په $A_1, A_2, \ldots, A_n$ کی (د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ په ځای) باندې د بول د پولینوم په څیر انځور شي په همدې توګه یا په ورته ډول د S جوړونه په ۸.۷ ' سره له $A_1, A_2, \ldots, A_n$ څخه .
له دې پولینوم څخه یا سیده د فنکشن ارزښت شمیرل کیږي او یا په هغو د دواړو نورمالفورمونو څخه په یوه ترانفورمي کیږي، له کومو چی بیا فنکشن په ساده توګه لوستل کیږي.
۴ . ۳ . ۳ بیلګه : لاندې سرکیټ S دې د سویچونو A , B , C سره مخ ته روت وي، څ...ه دې وکتل شي، په

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورته توګه د بول پولینوم په دې توګه دی

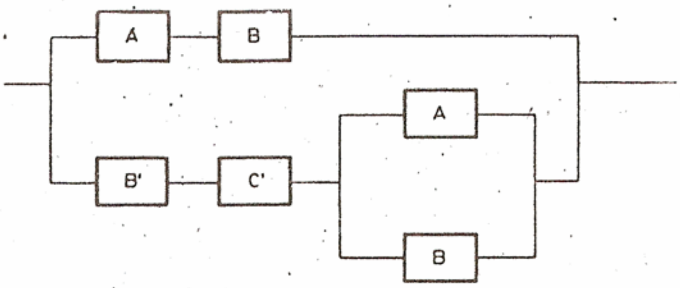
$$(A \wedge B) \vee (B' \wedge C' \wedge (A \vee B))$$

دا په دیسیونکتیو نورمالفورم اړوو:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge B' \wedge C') \vee (B \wedge B' \wedge C)$$

$$(A \wedge B \wedge (C \vee C')) \vee (A \wedge B' \wedge C')$$

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C') \vee (A \wedge B' \wedge C')$$



د نورمالفورم (اخرنی لیکه) سملاسی د S ارزښت جدول لاس ته راځي :

A	B	C	f_S
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

تیک د دې په څټ د سینتیز پرابلم رامنځ ته کیدنی سره د یوهسرکیپ د پرابلم رامنځ ته کیدنه ده.د لته دې د سویچفن- کشن f ورکړ شوی وي، او د دې سویچفنکشن ربنتیاکیدونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا ریالیزه کیدونکی سرکیټري دپیدا شي. دا پرابلم یواځنی ټاکلی اوبی یا حل نه لري او امکانات شته، چی د همغه موخی لپاره جګ اوبی ولټول شي. یو په هر صورت یواځي تیوریکي مانا لرونکی اوبی سملاسی ورکول کیدی شي. که ارزښت جدول پیژندل کیږي، نو کیدی شي، چی د دیسیونکتیو نورمالفورم ولیکل شي او د هغي سره سم یو سرکیټري جوړ کړی شي. په دې سرکیټري کی مګر د دې رامنځته کیدونکی ګټون هر د سویچ په ټولیزه توګه نازغموړ یا بهتره بي وعدي وړ لوي وي، دا په دې مانا، چی تخنیکي رینبتینوالی به یی زیات قمته وي. دلته یو سرکیټري د کمو سویچونو سره لټول کیږي، چی هغهٔ د مخه ورکړ شوی سویچفنکشن رینبتینی کوي. د جوړولو قمت یا مصرف باندې یي یواځی د سویچونو ګټون تاثیر نه لري، بلکه جوړونه هم او همداسی د سرکیټ سکترکتور یا جوړښتډول، د زیاتو مختلفو قمتفنکشنونو له مخی پاملرنه ورته شي. داد کمون پرابلم نسبی تاونی کیدی شي حل شي. د دې پرابلمونو حل یا اوبی د بیلګي په توګه د Kohavi 1970 په کتان کی ورکړ شوی دی. د سرکیټونوکارونه د مختلفو کارخانو په چالانولو کی د خورا لوي اهمیت دي: په مرکزګرمی، خطرزنګ، کنترولخونوکی او داسی نور. یوګوني سویچونه په دې کی ټاکلی پیښي ، حالتونه ، او شرایط په ګوته کوي له کومو، چی د هغو ځاي مربوط دی یا اړه لري. موضوع هم دلته را لنډوو او په همدې لوستلشوو بسیا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ الجبرونه

یو څو بنسټيزې کليمې

لومړی،موخه مو دا ده، چې د دې کتاب د الجبر بنسټيزو کليمو په څېړلو پيل وکړو، چې موږ دا په نامه ټوليز الجبر، يا لنډ الجبر بولو. برسيره پردې دلته درې مهمې جوړښتيز کليمې پيژندل کيږي يا معرفي کيږي، چې د هغو په مرسته بيا له ورکړ شوو الجبرونو څخه نور(واړه يا کوچنی) الجبرونه ګټل کيدی شي، په نامه لاندې الجبرونه ، بيا هومومورفي څېره کونی او بالاخره فاکتور الجبرونه، کوم چې د کونګروااينځ اړيکو له فاکتوره کوونی څخه لاس ته راوړل کيږي.

په تکراري توګه د لته هم د الجبري جوړښتونو د بيلګې لپاره ، لومړی، لکه ددې کتاب هم ، لکه د ګروپونو په

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

درس کی مو چی ګوته ورته ونیوله ، ګروپونه څېړل کیږي.

دا تعریف به د لمړني تعریف سره لکه په برخه ۳ کی موچی کړی وو، یواځی په نخښونه کی توپیر ولري.دلته به مو د ګروپ تعریف داسی وي، چی سملاسی راته د الجبر یوه بیلګه راکوي.

۵ . ۱ . ۱ تعریف: ګروپ په پیژندل شوي ډول یو ډیری G دی، د یوه، په G باندې د دوه ځایزې کارونی یا اپریشن، نښلونی ، ګنډنی یا عملیې د تعریف سره. (دا په دې مانا، چې یوه څیره کونه له G× G څخه په G کې د x.y <-- (x,y) سره) کوم چی لاندې قاعدې پوره کوي یا په کومو کې، چی لاندې قاعدې صدق کوي

(د ټولو) x,y,z ∈ G (لپاره باورل ري):

(اسوڅیاتیو قانون) $(x.y).z = x.(y.z)$

دا اسوڅیاتیو قانون په نخښو داسی لیکلی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\forall\ x, y, z \in G : ((x.y).z = x.(y.z)$$

(یو) $e \in G$ (د ټولو) $x \in G$ (لپاره موجود دی، د کوم لپاره چی باور لري) :

$e.x = x.e = x$ (ناپیلی توکی)

دا پورته قاعده داسی په نخښولیکلی شو:

$$\exists\ e \in G, \forall\ x \in G : e.x = x.e = x$$

(د ټولو) $x \in G$ (لپاره یو) $x' \in G$ موجود دی د کوم لپاره چی باور لري:

$x.x' = x'.x$ (په څټ توکی)

دا قاعده په شمیرپوهنیزه نخښو داسی لیکلی شو:

$$\forall\ x \in G \quad \exists\ x' \in G : x.x' = x'x = e$$

په دې قاعدو کې د ټول کوانتور (Allquantor) $\forall$ (لوستل یی : د ټولو لپاره) او د موجودیت کوانتور (Existenzquantor) $\exists$ (لوستل یی : موجود دی) کارول شوي دي. دریمه قاعده د بیلګې په توګه داسی لو

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ستل کېږي: «د ټولو x لپاره، چې د G توکی دی یا په کې G پروت دی ، یو توکی 'x له G څخه موجود دی، د x.x' = e سره یا په بل ډول : د کوم لپاره چې x.x' = e باور لري ». دلته e د دومې قاعدې سره ورکړ شوی ناپیلی توکی دی(یواځنی ټاکلی) . ناپیلی په شمیرپوهنه کی د یوې عملیې یا کاروني یا نښلونی په نسبت دا مانا ورکوي، چې دا ناپیلی توکی د یوه توکی سره په همغه عملیه کی همغه توکی بیرته لاس ته راکوي، یانی د همغی عملیې سره د یوه توکی سره په نښلونه یا عملیه کی راوستلو سره ور سره نښلووني توکي کی بدلون نه راولی.

په پوره ورته توګه، لکه ګروپ، کیدی شي ، چی د بیلګي په توګه کړی هم تعرفي شي، چی دې کار دمخه صورت نیولی، د کوم لپاره، چی په هر حالت کی دوه عملیې په کار دي(زیاتون او څل) . د دې پام لرنو یا کتلوڅخه د دې کتاب بنسټیزو کلیمو فکر رامنځته کیږي: د یوه « ټولیز یا عمومي الجبر » لاندې یو ډیری پوهیږو د عملیو د یوې کورنی سره، کوم چی تل یا ضرور باید دوه ځایز نه وي.

دا اوس باید په پوره دقت یا پوره پام وړ تعریفونو کي راټول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۱ . ۲ تعریف : د هر ګڼ $n \in N \setminus \{0\}$ او هر ډېري A لپاره یوه څېره ونه $f: A^n \to A$ شته، کومه چی n− ځایزه عملیه په A بلل کیږي . د ټولو n − ځایزو عملیو ډیری په A د $Op_n(A)$ سره په نخښنه کوو.
په A باندې د پایځایزو عملیو لاندې دا عملیي پوهیږو:

$$Op(A) := \bigcup_{n=0}^{\infty} Op_n(A)$$

۵ . ۱ . ۳ یادونه : د همدې ورکړ شوي تعریف سره به د یو صفر ځایزې عملیي لاندې څه پوه شو؟ کره دې ونیول شي، چی A^n دې د ټولو g څېره کو نو یا څېره ونو

$g: \{0,1,2,\dots,n-1\} \to A$

ډیری وي. په ځانګړې توګه باور لري:

$A^0 = \{g \mid g: \emptyset \to A$.

مګر ګورو، چی یواځی یوه څیرونه g موجود ده، یانی په نامه $g = \emptyset$ (پام دې وي ، چی هره څیرونه $g: \emptyset \to A$ په کره نیونه د جوړو یو ډیری دی، دا په نامه

$g = \{(x,g(x)) \mid x \in B\}$

د $B = \emptyset$ لپاره، پس $g = \emptyset$) له دې امله یوه صفرځایزه

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

عملیه یوه دا ورکړ شوې څیرونه ده : $f : \{\emptyset\} \longrightarrow A$.
دا څیرونې همداسې ټیك د A توکې په ګوته کوي، څکه چې f د A توکی سره یواځنی ټاکلی دی، او د $f(\emptyset) \in A$ هر $a \in A$ (بیایې لوستل هر a له G څخه) لپاره ټیك یوه څیره ونه $f_a : \{\emptyset\} \longrightarrow A$ موجود ده، د $f_a(\emptyset) = a$ سره. له دې امله صفرځایزې اړیکې ثابتې هم بلل کیږي، او د f_a په ځاي په ساده توګه a لیکو.

۵ . ۱ . ۴ تعریف : د یوه الجبر د تیپ یا ډول لاندې یوه تنظیم شوې جوړه (f , ß) (دلته دا f باید لوي وی ، خو زه یې بل ډول امکان نه لرم، بیا د سهوو سره مخامخ کیږو، ځکه چې په کمپیوتر کې د F څخه بدل بل لوی F نه لرم) پوهیږو، چیرته چې f یو ډیری دی ، چې توکي یې د عملیو سومبولونه دي او $ß : f \longrightarrow N \cup \{0\}$ یوه څیره ونه ده، کوم چې هر $f \in f$ په ځایزوالی (یاني هغه ځاي چې دا یې نیسی) باندې تنظیم وي. دلته f یو د ß(f) – ځایزوالي عملیو سومبول بلل کیږي.

یو ټولیز الجبر (یا لنډ : الجبر) د (F, ß) تیوپ یو تنظیم شوې جوړه (A, F) = A ده ، کومه چې له ډیري A او یوې
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په A د عملیو کورنۍ $F(f \mid f \in f)$ څخه منځ ته راغلې یا جوړه شوې ده، چیرته چې هر $f \in f$ په $ß(f)$ – ځایز عملیې $f \in Op(A)$ باندې تنظیم شي. ډیرۍ A د A بنسټیزې بلل کیږي او د F توکي د A بنسټیزې عملیې بلل کیږي.

۵ . ۱ . ۶ یادو نه : الف) : که چیرې د لوستونکو لپاره دا د الجبر تعریف، د د تیوپ سره ، اپریشن سومبول سره ، او داسې نور، لږ پیچلې ښکاریږي، نو کړی شي ، چې دا لاندې تعریف ته خپل پام راوګرځوي.

د الجبر لاندې کیدی شي ، چې یوه جوړه $A=(A,F)$ پام یا خیال کې راولو، چې A یو ډیرۍ او F یو د په A د عملیو یا کاروونو یا اپریشن پاي ډیرۍ وي. هغه نازکوالی، چې د مخ ته تیر تعریف و شا ته خوندې یا پټ دې کیدی شي، چې وروسته په کرار کرار د نورو تیوریو په ودیزه کې روښانه شي.

ب) په دې کتاب کې تل د الجبر د کلیمې لاندې ټولیز یا عمومي الجبر پوهیږو. چې په دې توګه د کلاسیکي یا ټولګیز الجبر د کلیمې سره په یوه کړې باندې، څخه یې

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

توپیر کیدی شي. له دې امله ټولیزه یا عمومي کلیمه نه لیکو او لنډ یې «الجبر» لیکو.

پ) لیکنو ته یې یو څو یادونې : زیات وخت f د الجبر تیوپ بلل کېږي، دا په دې مانا، چې له سره مو فکر د کارونې سومبول ځایزوالی ته پام راګرځي. په څټ یا برعکس، زیات وخت د تیوپ ß څخه غبرېږو، که زیات مو موخه ځایزوالی وي او کم مو موخه د کارونې یا عملیې سومبول وي.

که یو الجبر (A,F) یواځې پای ډیرې بنسټیزې کارونې یا عملې ولري، د بیلګې په توګه $F = (f_1 , f_2 ,...,f_k)$، نو زیات وخت دلته $(A, f_1,...,f_k)$ د (A, F) په ځای لیکل کیږي، او تیوپ په دې $(ß_1 ,..., ß_k)$ بڼه نوټ کوو، چیرته چې $ß_i$ د f_i ځایزوالی راکوي.

د یوه تیوپ f په الجبرونو کې بنسټیزې کارونې یا عملیې د f_A سره نه په نخښه کیږي، بلکه په ساده توګه د f سره، دا په دې مانا، چې د اړوند کارونې سومبول سره، لکه چې د ابل ګروپ کې زیاتون زیات د نخښې « + » سره په نخښه کیږي. دا امکانات، چې دا به مو سهوو ته لاربنود کړي، خورا کم دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۱ . ۷ بیلګه ګروپ: په دې برخه کې ، لکه په سر کی مو چی الجبر تعریف کړ، هغی ته ورته ګروپ د یو الجبر (G , .) په څیر د تیوپ (2) تعریفوو (ټیك: د یوه الجبر، چی تیوپ یی (f , ß) د f = {.} سره دی او 2 = (.)ß)، چی هغه هلته نه ورکړ شوي اکسیومونه پوره کړي. په هر حالك ګټور دی ، که ګروپ بل ډول تعریف کړو (د مخه مو ګروپ پوره څیړلی دی او هلته یی تعریف بل ډول وو و دې اوسنی تعریف ته). ورسره بلد یا مروج میتودونه دي: یو ګروپ یو الجبر (G (. , $^{-1}$, e دی، د تیوپ (2 , 1 , 0) ، چی لاندې اکسیومونه پوره کړي:

ګ ۱ : $(x.y).z = x.(y.z)$ (اسوشیاتیو قانون)

ګ ۲ : $x . e = e . x = x$ (ناپیلی یا بي تاثیره توکی)

ګ ۳ : $x . x^{-1} = x^{-1} . x = e$ (په څټ توکی)

د دې متود ګټه په دې کی نغښتی ده، چی د موجودیت کوانتورونو ته اړتیا نه پیښیږي او په څټ توکی په ساده توګه د یوه یوځایزي کارونی څخه لاس ته راځي، او ناپیلی توکی د صفرځایزي کارونی په څیر په « تیوپ کی خوندي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ده». که چیرې له ټولکوانتورونو څخه تیر شو، نو کیدی شي، چی د ګروپ اکسیومونه د مساوت یا برابرون په څیر ولیکل شي، څنګه چی دلته ورکړ شوي دي. دا نور هم روښانه کیږي، چی برابرون په ټولیز الجبر کی لوي رول لوبوي.

سړی کړی شي، چی ګروپ په بل ډول هم ولیکي، د بیلګي په توګه د یو الجبر (G,p) په څیر، چی تیوپ یی (3) وي، په داسی ډول، چی p د سرچینیزې ګروپ کارونی یا عملي د p (x,y,z) = x.y.z په څیر تعریف شوې وي.

لوستونکی دې پخپله دې ته پام کړي، چی ایا د ګروپ اکسیومونه، یواځي د p له لارې فرمولولی شي.

دې ته دې هم پام راواړول شي، چي یو ګروپ $(G, ., ^{-1}, e)$ ابیلي abelsche Grupp یا کموتاتیو بلل کیږي، که لاندې برانرونونه باور ولري:

ګ ۴ : $x . y = y . x$ (کموتاتیو قانون)

دا ورسره بلد یا مروج دی، چی په ابل یا کموتاتیو ګروپ کی +, - , 0 د . , e په ځاي کارول کیږي.

(د زیاتون لیکنډول یا لیکندود).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) یو الجبر (G , .) د تیوپ {2} ګروپوئید بلل کېږي.
یو ګروپوئید بل څه نه دې په غیر له یوه ډیري، چې په هغه کې یو دوه ځایزه کارونه یا عمیله کارول شوي وي، په ځانګړي توګه ګروپونه په همدې وخت کې ګروپوئید هم دي، که دا د تیوپ (2) الجبر په څیر وګڼل شي.

پ) یو ګروپوئید (H , .) نیمګروپ بلل کیږي، که (H , .) برابرون ګ ۱ پوره کړي..

ت) یو الجبر (M , . , e) د تیوپ (2 , 0)، مونوئید بلل کیږي، که (M , .) یو نیم ګروپ وي او برسیره پر دې برابرون ګ ۲ پوره کړي.

ټ) یو ګروپوئید (Q , .) کوازیګروپ بلل کیږي، که د هر $a \in Q$ لپاره لاندې څیرونې د Q په Q باندې پرمونیشنونه وي، یعنې:

$x \longrightarrow a \cdot x$ (د a سره کینې ځلوونه)
$x \longrightarrow x \cdot a$ (د a سره ښې ځلوونه)

زیات وخت د کارونې یا مروج دی، چې کوازیګروپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تیوپ (2,2,2) الجبر (/ , \ , . , Q) په څیر تعریف کړو، کوم چی لاندې برابرونونه یا مساوات پوره کوي:

(Q1) x\(x.y) = y ,
(Q2) (x.y) / y = x ,
(Q3) x.(x\y) = y ,
(Q4) (x/y).y= x

یا دونه: ګورو چی / او \ د ښي او کیڼی ویشنی په څیر کارول شوي(دا سي، نخښې ، چی په هر بل ځاي کی په بل مفهوم ورکړ شوې وي، همغلته به په همغه مفهوم ونومول شي)

ث) یو لوپ یو د تیوپ (0,2) الجبر (L , . , e) دی، په کوم کی چی (L , .) یو کوازیګروپ وي، او e یو ناپیلی توکی وي، دا په دې مانا چی برابرون ګ۲ باور لري. لکه د کوازیګروپ په څیر کیدی شی چی لوپ هم تعریف شي، د یوه الجبر (L , . / , \ , e) په څیر.

ج) کړی: یو د تیوپ (2,1,0,2) الجبر (R , + , - , 0 , .) کړی بلل کیږي، که (R,+,-,0) یو ابل ګروپ وي، (R , .) یو نیمګروپ او لاندې دیستریبوتیو

(c) ketabton.com: The Digital Library

قوانين باور ولري:

د ۱) x . (y + z)) x.y+x.z

د ۲) (x + y) z = x . z + y . z

پام دې وي: د دې لپاره، چې نوکان مو سپما کړي وي، نو هغه له پخوا معلومه قاعده کارول کيږي، چې ټکيشميرنه له کربنشميرنې له مخه ده، دا په دې مانا، چې لمړی د ټکو شميرنه بدنيز (تنيز) کيږي يا صورت نيسي لکه ځل او ويش او وريسی بيا هغه چې کربنشميرنه وي لکه زياتون او کمون.

يوه اونيتار کړۍ (R,+,-,0,.,1 (unitärer Ring (دا په دې مانا چې دا يوه کړۍ ده د يوي سره)، يو الجبر دی ، چيرته چې (. , R,+,-,0) يوه کړۍ ده او 1 يو ورزيات شوی صفر ځائيزه کارونه يا عمليه ده، کوم چې مساوت ګ ۲ پوره کوي (طبعاً دلته 1 د e په ځاي دی).

ح تن يا بدن) يو اونيتارکړۍ (K , + , - , . , 0 , 1) يو تن يا بدن بلل کيږي (انکريزي field) که (. , {0} ,\ K) يو ابل ګروپ وي ، د ناپيلي توکی 1 سره. دا راته نزدې پرته ده، چې اوس که پر دې په ورزياته توګه $x \longrightarrow x^{-1}$

(په (. ,{ 0} \ K) کې په څټ څيرونه) يوه يوځائيزه کارونه يا

(c) ketabton.com: The Digital Library

عملیه یا اپریشن وګڼو. دا چي 0^{-1} تعریف نه دی، نو ($K,+,-,0,.,^{-1},1$) به د لمړنی تعریف په موخه کوم الجبر نه وي. د ټوټه الجبر په تیوري کی ، چی په دې کتاب کی نه راوړل کیږي، نا پوره تعریف شوې عملیې یا کارونی اجازه لري.

خ) مودولونه Moduln . دا ($R,+,-,0,.$) دې یوه کړی وي. یو الجبر ($M,+,-,0,R$) د ($2,1,0,(1)_{r\in R}$) تیوپ R–مودول بلل کیږي(یا مودول په کړی R باندې)، که ($M,+,-,0$) یو ابل ګروپ وي، او د ټولو $r,s \in R$ لپاره لاندې مساوات باور ولري:

م ۱) $r(x+y) = r(x) + r(y)$

م ۲)) $(r+s)(x) = r(x) + s(x)$

م ۳) $(r.s)(x) = r(s(x))$

په یوه اومتیارکړی ($R,+,-,.,1$) باندې مودول څخه دا د لاندې مساوات باوریوالی هم غوښتل کیږي.

م ۴) $1(x) = x$

دا لمړنی بیلګه ده د ناپایډیرو عملیو سره(طبعاً که R ناپای وي) . برسیره پردې هم یو ځانګړی پام ضرور دی، ځکه چی سومبولونه + , - , 0 په دوه مختلفو ماناو رامنځ
،

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته کیږي: یو ځل د ابل ګروپ (R,+,-,0) عملیې په څیر او بیا د ابلګروپ (M,+,-,0) په څیر. دا پرابلم په ساده توګه کیدی شي ، چې راوباسل شي، د بیلګي په توګه په کوم کي ($R,+_R,-_R,0$) او ($M,+_M,-_M,0$) په څیر لیکل کیږي. یواځې د اسانتیا له خاطره ضرور ښکاریږي، چې د ابل ګروپونو باندې په همغه یوون د +, -, 0 سره پاتې شو،

خ) وکتور فضا (وکتورهوا) : وي دې (K,+,-,0,.,1) یو تن . نو هر K–مودول (V,+,-,0,K) موږ K –وکتورهوا (یا وکتورهوا یا وکتورفضا په تن K) بولو.

ځ) تړون(تړونونه) (Verband(english: lattice)) یو لاتیس یا تړون یو الجبر (L ،$\vee$ ،$\wedge$) دی، د تیوپ (2,2)، کوم چې لاندې مساوات پوره کوي:

ل ۱) $x\vee y = y\vee x$, $x\wedge y = y\wedge x$ کموتاتیو قانون

ل ۲) $x\wedge(y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z$,

$x\vee(y\vee z) = (x\vee y)\vee z$

(اسوځیاتیو قانون)

ل۳) $x\vee x = x$, $x\wedge x = x$ (ایدمپوتینځ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ل ۴) $x\wedge(x\vee y)=x$, $x\vee(x\wedge y)=x$

(ابزربشن یا راکښنه یا جذبونه)

دلته افادې " $x\vee y=z$ " او په همدېتوګه " $x\wedge y=z$ " داسی لوستل کیږي x له y سره ترلی مساوي په z دی، همداسی x غوخ په y مساوي په z دی.

یو رابند ترون یا لاتیس (یا ترون د 0 او 1 سره) یو الجبر (L,$\vee$,$\wedge$, 0 , 1) ددی د تیوپ (2,2,0,0), داسی چي (L ,$\vee$, $\wedge$) یو ترون یا لاتیس دی او په دې برسیره لاندې مساوات هم باور لري:

ل ۵) $x\vee 1=1$, $x\wedge 0=0$

ترونونه به په ځانګړي توګه په ورپسی برخو کی پوره وڅیړل شي او د هغو مختلف ډولونه او هم به په هازې دیاګرام کی و کښل شي)

د) نیم ترون (semilattice) یو نیم ګروپ (S , .) نیمترون یا سیمیلاتیس بلل کیږي، که دا کموتاتیو او ایدمپوتنت وي. دا په د ې مانا ، چی که مساوات ګ ۴ او همداسی لاندې باور ولري:

س ۱) $x\,.\,x=x$ ایدمپوتنځ (Idempotenz)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هر لاتیس $(L, \wedge, \vee)$ جوړښتونه $(L, \wedge)$ او $(L, \vee)$ په روښانه توګه سیمیلاتیسونه دي.(نیم ترو ژ)

ذ) دیستریبوتیو ترون یا – لاتیس) یو لاتیس $(L, \wedge, \vee)$ دیستریبوتیو بلل کیږي، په کوم کې چې دا لاندې دیستریبوتیو قانونونه باور ولري:

د ل ۱) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

د ل ۲) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

کیدی شي ، چې د ل ۱ تر ل ۴) مساواتو پورې وښول شي، چې د ل ۱ او دل ۲ یو بل ته ورته دی یا همغسی دي. چې له دې مساواتو یو بیا پوره دی، یا بسیا کوي.

ر) د بول الجبر : یو الجبر $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ د تیوپ $(2,2,1,,0,0)$ د بول الجبر بلل کیږي، که $(B, \wedge, \vee)$ یو دسیتریبوتیو لاتیس وي، مساوات ل ۵ پوره کړي او په دې برسیره لاندې هم پوره کړي

ب ۱) $x \wedge x' = 0 , x \vee x' = 1$

دا څه د الجبر پورته تیرې بیلګي مو، چې دلته راوړلی، د هغو څخه به څنې وروسته پوره ترڅیړنی لاندې ونیول شي. او س په دا همدومره بسیا کولی شو.

،

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۲ لاندې الجبر یا سب الجبر Subalgebra

د هر الجبري دیسځیپلین مهمه موخه داده، چی پوره بیلګي ترې لاس ته راوړل شي. زیات وخت داسی کیږي، چی د لرلو الجبري جوړښتونو څخه نوي الجبري جوړښتو نه لاس ته راوړو. په دې برخه کی به یو متود یا یوه لار وپیژندل شي یا معرفي شي، کومه چی د ټولګیزو کلیمو څخه لکه لاندېګروپ، لاندېوکتورفضا، لاندېټړون په لور لوریزه وي.

۵ . ۲ . ۱ تعریف : $A = (A,F)$ دې یو د تیوپ f الجبروي، او برخټیری $B \subset A$ دې یو د A برخټیری وي، د خویونو سره ، چی

$$f(b_1, \dots, b_n) \in B^n$$

د ټولو $f \in f$ لپاره او د ټولو n -ګونو $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$ لپاره (د کومو سره، چی $\beta(f) = n$ ځای په ځاي کیږي). الجبر $B = (B, (f \mid f \in f))$ د الجبر A لاندې الجبر بلل کیږي، د کوم سره $f : B \longrightarrow B$ د ټولو $f \in f$ لپاره د f بندیزنو په څیر په ډیري B تعریف وي، د « B د A لاندې الجبر» لپاره لیکو $B \leq A$.

د $\mathrm{Sub}\, A$ سره د ټولو د A د لاندې الجبرونو بنسټټیریو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېرى په نخښنه کيږي، دا په دې مانا، چى $A=\{B \mid B \leq A\}$
(انګر: Subalgebra = لاندې الجبر)

يو برخډيرى $B \subset A$ ټيك هلته د يوه االجبر $A = (A, F)$ لاندې الجبر بنسټډيرى دى، كه B د ټولو د $f_A \in F$ بنسـ عمليو سره رابنده، راټړلى وي يا رامحدوده وي. څه ناڅه ټيکه توګه زيات داسى ليکل کيږي $B = (B,F)$ ،
داپه دې مانا، چى د B د بنسټعمليو ډيرى بيرته په F سره په نخښنه کيږي. لکه څنګه د f_A لپاره همداسى د f_B لپاره هم په ساده توګه د كارونى سومبول په f سره ښوول کيږي يا بهتره، نخښنون کيږي.
د ګروپ په بيلګه روښانه کيږي، چى په لاندې الجبر کى په هغه تيوپ ګنړل کيږي ،کوم چى ټاکل شوى دى: كه ګروپ د يوه الجبر په څير، چى تيوپ يى (0 , 1 , 2) دى راوړل شي يا وګنړل شي، لكه په مخ ته تيره بيلګه کىٔ نو لاندې الجبرونه په ټولګيزه موخه لاندېګروپونه دي. كه چيرې ګروپ د (2) تيوپ الجبر په څير راوړل شي يا په پام کى ونيول شي، د ګروپ سرهٔچى يواځنى عمليه يا كارونه ده، ممکن دي، چى لاندې الجبر لاس ته راوړو، کوم چى لاندې ګروپونه نه دي. بيا نور لاندې الجبرونه
،

لاس ته راځي، که ګروپ د یوه الجبر ، په څیر د

$$p(x , y , z) = xy^{-1}z$$

سره راوړل شي، چی دا یی یواځنی عملیه وي.

د هر الجبر لپاره دا سیستم د غوڅیجوړښت په مخامخ رابند دی. ټیك یا کره په لاندې ډول :

۵ . ۲ . ۲ جمله : A دې یو الجبر وي. نو باور لري:

الف) $A \in \text{Sub}\,A$

ب) $\mathcal{B} \in \text{Sub}A$ د هر ناتشدیري $\mathcal{B} \subseteq \text{Sub}\,A$ لپاره،

یادونه : دا افاده " $\cap \mathcal{B}$ " د $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ لپاره ځاي په ځاي ده او همداسی د $\bigcap \{ \mathcal{B} \mid B \in \mathcal{B}\}$ لپاره .

اوبی : الف) روښانه دی. د ب) د ښوونی لپاره دې وي: $\mathcal{B} \subseteq \text{Sub}A$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. دا د ښوولو دی، چی $\cap \mathcal{B}$ د A د هر ي عمليي f لپاره رابند دی یا راتړلی دی. وي دې $n = ß(f)$. له $\bigcap \mathcal{B}$ $b_1 , \ldots , b_n \in$ څخه $b_1 , \ldots , b_n \in \mathcal{B}$ لاس ته راځي د ټولو $B \in \mathcal{B}$ لپاره . دا چی ټولی $B \in \mathcal{B}$ څخه د لاندې الجبرونو بنستېدیري

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي، نو باور لري $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$ د ټولو $B \in \mathcal{B}$ لپاره . له دې څخه لاس ته راځي $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$.

۵ . ۲ . ۳ لاس ته راوړنه(دا هم ديوې جملې په ځير ده، خو له جملي څخه لاس ته راځي): د هر الجبر A او هر برخېزيري $X \subseteq A$ لپاره دی

$$<X> = \bigcap \{ B) \in \text{Sub } A \mid B \supseteq X \}$$

د A د لاندې الجبر ښستېزيری، دا په دې مانا چې $<X> \in \text{Sub}A$. په څرګنده توګه $<X>$ د A د لاندېالجبرونو کوچنی بنستېزيری دی، کوم چې X خوندې لري (دا د X څخه راجوړه يا توليد شوې لاندې الجبر) د الجبر A باندې زور اچووني له امله ډير وخت $<X>_A$ د $<X>$ په ځاي ليکو اوله بلی خوا په ساده توګه د پاي ډيري $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ لپاره .

د بيلګي په توګه ځيوکليکي لاندې ګروپ $(Z_6, +, -, 0)$ را نيسو (د ګڼونو $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ سره مودول 6 شميرل کيږي): باور لري

$$<0> = \{0\}, <1> = Z_6, <2> = \{0, 1, 4\},$$
$$<3> = \{0, 3\}, <2, 3> = Z_6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۲ . ۴ جمله : A دې يو الجبر وي . د برخه‌يريو $X, Y \subseteq A$ لپاره باور لري:

الف) $X \subseteq \langle X \rangle$ (اکستنزيويتيت Extensität)

ب) $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ (مونوتوني Monotonie)

پ) $\langle X \rangle = \langle\langle X \rangle\rangle$ (ايدمپوتنت Idenmpotent)

د دې جملې اوبې سملاسي د مخ ته تيرې عملي $\langle \; \rangle$ له تعريف څخه لاس ته راځي. پای

بنسټه‌يرى $\langle X \rangle$ په رېښتيا چې د X څخه توليد شوې د $A = (A, F)$ لاندې الجبرونو څخه لاس ته راځي د يوه توليدپروسي سره: د هر برخه‌يري $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$E(X) = X \cup \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f \in F, a_1, \ldots, a_n \in X (\; n = ß(f))\}$$

وريسی دې وي

$$E^0(X) = X$$

اود ټولو $k \in N \cup \{0\}$ لپاره

$$E^{k+1}(X) = E(E^k(X))$$

۵ . ۲ . ۵ جمله : د هر الجبر $A = (A, F)$ او هر

برخډیري $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$<X> = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^{k}(X)$$

اوبی : «$\supseteq$»: وي دې $<X> \supseteq x = E^{0}(X)$.
نیونه دې وي، چې $<X> \supseteq E^{k}(X)$، ښوول شوی دی،
او وي دې $a \in E^{k+1}(X)$. وي دې $a \notin E^{k+1}(X)$ د مخه
نیونه(ځکه، چې په بل ډول به په ساده توګه باور ولري

$a \in <X>$ (

نو $f \in F, a_1, \ldots, a_n \in E^{k}(X)$
موجود دي، د $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ سره .
د $<X> \supseteq E^{k}(X)$ له امله او دا چې $<X>$ د یوه لاندې
الجبر بنسټ ډیري دي، لاس ته راځي $a \in <X>$. دا
ښایي $<X> \supseteq E^{k+1}(X)$، او په k باندې د ایندکشن
سره لاس ته راکوي $<X> \supseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^{k}(X)$.

«$\subseteq$»: یواځې دې وښوول شي ، چې $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^{k}(X)$ د یوه
لاندې الجبر بنسټډیری دی، دا په دې ما ، چې د F
د ټولو اپریشنونو په هکله رابنده یا راتړلی ده. وي دې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f \in F, n = \beta(n), a_1, \ldots, a_n \in \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k(X .$$

نو بیا د هر $i \in \{1, \ldots, n\}$ لپاره په لاندې توګه
یو $k(i) \in N \cup \{0\}$ د $a_i \in E^{k(i)}(X)$ سره موجود دی.
وي دې $m = \max\{(k(i) \mid i = 1, \ldots, n\}$. نو باور
لري $a_i \in E^m(X)$ د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره. په
دې پسې لاس ته راځي

$$f(a_1, \ldots, a_n) \in E^{m+1}(X) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

دا په دې مانا، چې $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$ د f لاندې رابند یا
تړلی دی. پای

یادونه: دا رابند یا راتړلی دا مانا لري، چې f په همغه
الجبر کې باور لري. دې لغات ته دې په نورو ځایونو کې
هم پام وي، چې ډېر کارول کیږي.

دا تر اوس پام په یو څو برخو کې په کار راځي، چې په خپل
ځاي کې به وکتل شي.
د ډیریسیستم Sub A یوائې دې ته همدا دلته ګوته
نیسم، چې د یوه الجبر A د لاندې الجبرونوبنسټېزیرۍ په

پیدایښتي یا طبیعي ډول یو تړون یا تړنه یا لاټیس جوړوي:
د $B, C \in A$ لپاره دې وي

$$B \wedge C = B \cap C$$
$$B \vee C = B \cup C$$

نو لرو

۵ . ۲ . ۶جمله :د هر الجبر A لپاره $(\wedge, \vee, \text{Sub } A)$
یو تړون دی(د A د لاندې الجبرونو تړون یا تحتواوي یا توکی)
اوبی دې تمرین وي: د لته د تړون اکسیومونه له ل۱ تر
ل۴ پورې ازمائیل کیږي.

۵ . ۳ ایزومورفیزم ، هومومورفیزم

Isomorphismen, Homomorpismen

دا روښانه ده ، چې د یوه الجبر ذهني خویونه تغیر نه خوري،
که چیرې د الجبر د سټهډیري د توکو نومونه بدل شي ، یا بل
ډول ونومول شي. دا پام یا فکر مو تړلی د ایزمورفي کلیمي
ته لارښودوي .
دوه الجبره یو بل سره ایزمورف بلل کیږي، که چیرې یو الجبر
له دې بل څخه د هغو توکو نومونو د بدلون له لارې لاس ته
راوړی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۳ . ۱ تعریف : A او B دې دوه الجبرونه وي، د **همغه تیوپ** f، او $u : A \rightarrow B$ دې یو **بیجکتیوه** bijektive **ځیرونه** وي. نون د A ایزومورفیزم په B **بلل** کیږي، که د ټولو $f \in f$ لپاره او ټولو $(n = \beta(f)$, $a_1 , \ldots , a_n \in A$ لاندې شرطونه پوره وي:

$$uf_A(a , \ldots , a) = f_B (ua, \ldots , ua) \quad (\text{هوم})$$

دا **الجبرونه** A او B بیا (یو د بل سره) **ایزومورف بلل** کیږي، په نخښونه یې $B \cong A$ ده.

۵ . ۳ . ۲ بیلګه

الف) : دوه ګروپونه $(G, . , ^{-1} , e)$ او $(e, ^{-1} , . , H)$ ټیک **هلته ایزمورف** دي، که یوه **بیجکتیو ځیرونه** $u : A \rightarrow B$ موجود وي کوم چې د ټولو $a , b \in G$ لپاره لاندې شرطونه پوره کوي.

$$(i) \quad u(a.b) = u(a).u(b)$$

$$(ii) \quad u(e) = e ,$$

$$(iii) \quad u(a^{-1}) = u(a)^{-1}$$

که پام وکړو، نو دلته شرطونه (ii) او (iii) د اړتیا اخوا دي، ځکه چې دا دواړه له (i) څخه لاس ته راوړلی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u(e) = u(e.e) = u(e).u(e) \Rightarrow u(e) = e \,,$$
$$e = u(e) = u(a.a^{-1}) = u(a).u(a^{-1}) \Rightarrow u(a) = u(a)^{-1}$$

ب) $(Z_7, +, -, 0, 1)$ دې د تن $(1, \ . \ , \ . \ , \{0\} \backslash Z_7)$,1) ($Z_7 \backslash \{0\}, ., \quad ,1)$
یو ځلیزګروپ وي. نو ایزومورفیزم

$$u: (Z_6, +, -, 0) \longrightarrow (Z_7 \backslash \{0\}, ., ^{-1}, 1)$$

په لاندې سره لاس ته راځي:

x	0	1	2	3	4	5
u(x)	1	3	2	6	4	5

د A ایزومورفیزم و B ته په ټوله توګه سیومتري نه دی.
مګر باور لري:

۵ . ۳ . ۳ جمله: که u یو ایزمورفیزم د A په B وي، نو په ښځ ځیرونه u^{-1} د B یو ایزمورفیزم دی و A ته.

اوبی : شرطونه (هوم) له همدا تیر درس څخه کیدی شي و ازمائل شي، د u^{-1} لپاره ، چی د u لپاره ځاي په ځاي شي.
وي دې

$f \in f , b_1 , \ldots , b_n \in B$

د $a_1 = u^{-1}(b_1), \ldots , a_n = u^{-1}(b_n)$ سره، نو لاس ته راځي

$u^{-1}(f_B(b,\ldots,b) = u^{-1}f_B(ua_1,\ldots,ua_n)$

ځکه چي u ایزومرفیزم $= u^{-1}[uf_A(a_1,\ldots,a_n)]$

پاي $= f_A(u^{-1}(b_1),\ldots,u^{-1}(b_n))$

که د مخه تیرو لوستونو کی له غوښتنو څخه تیر شو،
چی $u: A \longrightarrow B$ بیېکتیو دی، نو د هومومورفیزم ټولیزې کلیمی ته راځو. پس هومومورفیزم د الجبرونو مساوات کره نه ټاکي (تر د توکو د چاپیریال پورې لکه په ایزمورفیزم کی)، مگر بیا مو هم د جوړښت ورتوالی مخ ته پروت دی:

۵ . ۳ . ۴ تعریف : A او B دې د همغه تیوپ f الجبرونه وي. یوه څیرونه $u : A \longrightarrow B$ هومو مورفیزم د A وB ته بلل کیږي،
د ټولو $f \in f$ او ټولو $a_1 , \ldots , a_n \in A \ (n = \beta(n))$ لپاره هومومورفي شرطونه (هوم) له تیر درس څخه پوره دي.
د « u یو د A هومومورفیزم دی و B ته» لپاره لنډ لیکدود « $u : A \longrightarrow B$ » هم معمول دی یا کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شرط (i) د له مخ ته تیرې جملی څخه همغه ورسره بلد د
هومومورفیزم شرطونه دي، د ګروپونو لپاره. ټیك په همدې توګه،
لکه د ګرووپ هومومورفیزم، په ټولیزه توګه د ټولو الجبرونو د هو-
مومورفیزم لپاره لاندې نخښونی معمول دي: سورجکتیو هومومو-
رفیزم ایپیمورفیزم Epimorphismus بلل کیږي. که u : A—> B
یو ایپیمورفیزم وي، نو B د A یو هومومورفه څیره بلل
کیږي. (په نخښونه یی uA = B) . اینجکتیو هومومور-
فیزم د نزدې پرتو دلایلو له امله خوندیونه Einbettung یا
نغړنه (په کی) بهتره یی رانغړنه(زه یی خوندیونه بولم)
بلل کیږي. (د دې لپاره راتلونکی یادونه وګوری) د یوه
الجبر A هومومورفیزم u: A—> A یانی هومورفیزم په خپل
ځان ایندومورفیزم Endomorphimus بلل کیږي، او ایندو-
مورفیزم چی په همغه وخت کی ایزومورفیزم (دا په دې مانا،
چی بیجکتیو) دی د A اوتومورفیزم Automorphismus
بلل کیږي د A د ټولو ایندومورفیزمونو ډیری End A په
پیدایښتي یا طبیعي توګه یو نیمګروپ جوړوي، او د A د
ټولو اوتومورفیزمونو (Auotomorpihismen (Aut A یو
ګروپ جوړوي. د دې لپاره چی دا ولیدلی شو، لاندې دوه
ویناوو ته اړتیا پیښیږي، چی اوبی یی ګرانو لوستونکو ته
یوه ساده د تمرین دنده یا وظیفه ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : الف) د هر الجبر A لپاره کتمټ ځیرونه
یانی $id\,A \longrightarrow A$ یو اوتومورفیزم دی
ب) که $u_1 : A \longrightarrow B$ او $u_2 : B \longrightarrow A$ هومومورفیزمونه
وي، نو یو په بل پسی راوړنه یا په بل پسی نښلونه $u_1 \circ u_2$
یی هم یو د A هومومورفیزم و C پسی دی.
د لهمخ ته تیرې جملی له امله د End A همداسی
د Aut A ډیري د کارونی یا عملی $\circ$ لاندې رابند یا راګیر
دی . د مخ ته تیرې جملی له امله Aut A تل دا ناپیلی
توکی id A خوندي لري. همغه تیره جمله ښایي، چی
له $u \in Aut\,A$ څخه تل $u^{-1} \in Aut\,A$ لاس ته راځي،
یعني باور لري:

۵ . ۳ . ۵ جمله: د هر الجبر A لپاره $(End\,A, \circ)$ یو
نیم ګروپ دی (د A د ایندومورفیزم نیمګروپ) ،
او $(Aut\,A, \circ, {}^{-1}, id\,A)$ یو ګروپ دی (داسی په
نامه د A د اوتومورفیزم ګروپ)
لاندې الجبرونه او هومومورفیزم یو له بل څخه کامل
خپلواک راوړل شو. اوس به وښوول شي ، چی دا
جوړښتکلیمي یو د بل سره په یو ډول زغموړ دي:

۵ . ۳ . ۶ جمله: ځیرونه $u : A \longrightarrow B$ دې یو هومو-

(c) ketabton.com: The Digital Library

مورفیزم وي، نو باور لري:

الف) له $U \in Sub\,A$ څخه لاس ته راځي $uU \in Sub\,B$

ب) له $V \in Sub\,B$ څخه لاس ته راځي $\bar{u}^{1}V \in Sub\,A$ (۲)

پ) د ټولو برخېزيريو $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$<uX> = u<X>$$

اوبی : الف) وي دې $f \in f, b_1..., b_n \in uU$ (چیرته چی، لکه چی ورسره بلدیو، $ß(f) = n$ لیکل کیږي) .

نو $a_1, ..., a_n \in U$ موجود دي، د $b_1 = ua_1, ..., b_n = ua_n$ سره . باور لري

$$f_B(b, \ldots, b) = f_B(ua, \ldots, ua)$$

$$= uf_A(a, \ldots, a)$$ دا چي u هومورفیزم

د $U \in Sub\,A$ له امله $\in uU$

دا راته په ګوته کوي، چی

$$uU \in Sub\,B$$

ب) وي دې $f \in f, a^1, \ldots, a^n \in \bar{u}^{1}V$. نو باور لري $ua^1,...,ua^n \in V$.

له دې لاس ته راځي

دا چی u هومورفیزم $uf_A(a_1, \ldots, a_n) = f_B(ua_1, \ldots, ua_n)$

د $V \in Sub\,B$ له امله $\in V$

$u^{-1} \in \ldots$ (۱) .

.

له دې املې باور لري $f_A(a_1, \ldots, a_n) \in u^{-1}V$ او له دې
امله $u^{-1}V \in Sub\ A$ $(u^{-1}V \Rightarrow$

پ) E دې، لکه هغه د مخه تعریف شوی اپریټر یا عملیه وي. لمړی ښوول کیږي، چې $E(uY) = uE(X)$ د ټولو $Y \subseteq A$ لپاره باور لري: $E(uY)$ ټیك له هغو توکو uy څخه د $y \in Y$ سره جوړ دی، او همداسی له هغو توکو څخه، چی لاندې بڼه لري $f_B(uy_1, \ldots uy_n)$، د $y_1, \ldots, y_n \in Y$ $f \in f$ سره. همداسی یا په همدې ډول $uE(Y)$ له توکو uy څخه جوړ دی، د $y \in Y$ سره، او همداسی له توکو څخه، چی لاندې بڼه لري:

$$uf_A(y_1, \ldots, y_n)$$

دا چی u یو هومومورفیزم دی، نو ښایي چې $E(uY) = uE(Y)$.
په k باندې د اینډکشن له لارې کیدی شي، چی $E^k(uY) = uE^k(Y)$ وښوول شي، د ټولو $k \in N \cup \{0\}$ لپاره. د له مخ ته تیرو څخه لاس ته راځي

$$\langle uX \rangle = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(uX) = uE^k(X) = u[\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)] = u\langle X \rangle$$

پای

لکه د مخه مو، چی ګوته ورته ونیوله د الجبر بنسډیري uU د uU سره په نخښه کیږي او همداسی له مخه بلدوڅخه د

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر بنسټېزيري $u^{-1}V$ د$u^{-1}V$ سره په نخښنه کيږي. کيدی شي ، همدا د مخه کيدی شي، چی زيات وکارول شي، که د يوه الجبر A هومومورفيزم (ايزومورفيزم) په يوه الجبر B غواړو، چی وټاکو.

بيلګه: د توکو $u \in Aut(Z_6, +, -, 0)$ د ټاکلو لپاره فکر کيدی شي، چی $<u1> = u<1> = uZ_6 = Z_6 = <1>$. له دې امله يا $u1 = 1$ باور لري له کوم، چی $u = id$ ($=idZ$) لاس ته راځي، او يا $u1 = 5$ دا په دې مانا چی $u = -id$.

پس:

$$Aut(Z_6, +, -, 0) = \{id, -id\}$$

په ورته توګه د $End(Z_6, +, -, 0)$ توکی هم ټاکل کيږي

لکه د مخه مو چی ګوته ورته ونيوله اينجکتيو هومومور-فيزم $u : A \longrightarrow B$ خوندېونه هم بلل کيږي، د u سره A په B کی خوندې کيږي. دا برخه چی لاندې الجبرونه او خوندېونه په کی روښانه شوه داسی پای کيږي:

يادونه : الف) د هرې خوندېونی $u:A \longrightarrow B$ لپاره باور لري $uA \leq B$ او $uA = A$ دا په دې مانا، چی uA يو و A ته ايزومورف د B لاندې الجبر دی.

ب) د الجبر B د هر لاندې الجبر A لپاره د يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اینکلوژنخیرونه Inklusionsabbildun

$$i : A \longrightarrow B , i(x) = x$$

یو ه خوندیونه ده.

کونګروانیڅ اړیکی او فاکتور الجبر
Kongruenzrelationen und Faktoralgebren

لکه د ګروپ تیوري کی د نورمالپرویشوني، یا همداسی د ایدیال کلیمه په کړی تیوري کی منځنی یا مرکزي کلیمه ده، همدا ډول په ټولیزه توګه په الجبر کی د ټولیزې یا پورته کلیمي کونګروانیڅ اړیکو کلیمه جوړوي. دا به راته څرګنده کړاي شي، چی د کونګروانیڅ اړیکو او هومومورفیزم ترمنځ نزدې اړیکی پرتی دي، لکه څنګه چی په ګروپتیوري او همدا ډول کړېتیوري کی، کیدی شي چی الجبرونه د کونګر-واینڅ اړیکو له لارې فاکتوریزه کړی شو، د کوم له مخی چی «فاکتور الجبر» ته رسیږو. یو ګروپ د نورمالپرویشنونی پسی فاکتوروني کوي، په کوم کي چی د نورمالپرویشونی څنګټولګی د نوي ګروپ توکو په څیر یا په توګه وکاروي، دا په نامه فاکتورګروپتوکی. دا په څنګټولګی یا اړختټولګی د یوه ایکویوالنڅ اړیکی «ایکویوالنڅ ټولګی» جوړوي. دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتنه یا څیړنه د «کونګروا ینځ» فکر رامنځ ته کوي، کوم چی باید دلته تعقیب شي.

۵ . ۳ . ۷ تعریف : A دې یو ډیری وي. هر برخډیری $R \subseteq A^n$ یو په ډیري A باندې n–ځایزه اړیکه بلل کیږي.

یوه 2 –ځایزه اړیکه Θ په A باندې ایکویوالنت اړیکه بلل کیږي، که د ټولو $x , y \in A$ لپاره لاندې شرطونه باور ولري:

اي ۱) $(x,x) \in \Theta$ (رفلیکسیویتټي)

اي ۲) $(x,y) \in \Theta \Rightarrow (y,x) \in \Theta$ (سیومتري)

اي ۳) $(x, y) \in \Theta$ ، $(y,z) \in \Theta \Rightarrow (x,z) \in \Theta$

(ترانزیتیویتټي)

د $(a , b) \in \Theta$ په ځاي داسي هم لیکلی شو $a = b(\bmod \Theta)$ (په کلیمو: "a په b مودولوΘ سره مساوي دی")، او یا هم داسی لکو $a \Theta b$ ، په دې توګه کیدی شي، چی اکسیوم ۳ په لاندې توګه فرمولبندې شي، له $x \Theta y \Theta z$ څخه لاس ته $x \Theta z$ راځي. د هر ایکویوالنځ اړیکو Θ لپاره د لاندې بنې ډیری $[a]\Theta = \{x \in A \mid x \Theta a\}$ ایکوالنځټولګی بل کیږي. په روښانه یا څرګنده توګه هر یو توکی $x \in A$ ټیك د Θ یوه ګونګروایځټولګي پورې اړه لري. (ساده بیلګه د ټولګی : لکه چی یو هلك په همغه وخت کی په دوه یا

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیاتو ټولګیو پورې اړه نه شي لرودی).
د A ټولو ایکوالنټولګیو ډیری په Eq A سره په نخښه کوو (د ایکویوالنځټولګی الماني او انګریزی:
(ÄquivalenZklassen = equivalence relation
د ډیري A لپاره دوه ایکوالنځ اړیکی ∇_A او Δ_A په لاندې ډول لاس ته راځی

(ټول اړیکی Allrelation) $\nabla_A = A^2 = \nabla_A$
(کتمتی یا دیاګونالی Identität oder Diagonale)
$\Delta_A = \{(a , a) \mid a \in A\} = \Delta A$

ځیره: ۱۰۱
په پورته ځیره کی په ډیري {1,2,3} باندې ټول ایکوالنځ-اړیکی د لویوالی په ترتیب بیرته ورکړ شوي دي(دا یو د Hasse-DiaGram هازبدیاګرام دې) هر ایکویوالنت اړیکه د ایکویوالنځټولګي په بیرته ورکړه کی انځور ده.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۳ . ۸ جمله: A دې یو ډیری وي او R دې یو ناتش د Eq A برخډیری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in \text{Eq } A$$

(لیکدود ته یی " $\bigcap R$ " . دا دې د مخ ته تیرو درسونو سره انډول شي یا دا مو د مخه لوستلی دي)

اوبی : د دې ښوونه یو ساده تمرین دی. پای

دیوه ډیري A ایکویوالنځ اړیکې په طبیعي یا پیدایښتي توګه یو لاټیس یا تړون جوړوي. یا تړوني جوړوي .

د ټولو Eq A $\Psi \in$, Θ دې وي

نو کیدی شي، چی په ساده توګه وښوول شي:

۵ . ۳ . ۹ جمله: د هر ډیري A لپاره (EqA , $\vee$, $\wedge$) یو تړون یا لاټیس دی (په A باندې د ایکوالنځ اړیکو تړون) دا پورته ورکړ شوی تعریف د $\Theta \vee \Psi$ په ټولیزه توګه لږ مناسب دی ، که په ریښتیا $\Theta \vee \Psi$ شمیرو. د دې لپاره کیدي شي، په خوښه دوه ځایز اړیکو Θ_1 , Θ_2 لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف شوی د اړیکو څل

$$\Theta_1 \circ \Theta_2 = \{ (x, y) \mid \exists z \in A : x\, \Theta_1\, z\, \Theta_2\, y \}$$

وکارول شي یا استعمال شي. دا اړیکڅل اسوشیاتیو دی
(د ې ښوونه دې تمرین وي) :

$$(\Theta_1 \circ \Theta_2) \circ \Theta_3 = \Theta_1 \circ (\Theta_2 \circ \Theta_3)$$

له دې امله کیدی شي، چی ډیر واره راوړل شوي نوکان
له لیکلو پاتی شي.

۵ . ۳ . ۱۰ جمله : د هر ډیري A او ټولو $\Theta, \Psi \in Eq\, A$
لپاره باور لري

$$\Theta \vee \Psi = \Theta \cup (\Theta \circ \Psi) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta \circ \Psi) \cup \ldots,$$

دا په دې مانا چی $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ ټیک هلته باور لري،
کله چی توکي $c_1, c_2, \ldots, c_n \in A$ موجود وي،
د $a = c_1\, \Theta\, c_2\, \Psi\, c_3\, \Theta\, c_4 \ldots c_n = b$ سره.
اوبی یا څل: تمرین دې وي: لمړی فکر کیږي، چی اوبیونی
یا حل کوونی برابرون مساوات و ښي لور ته یو ایکویوالنت
اړیکه پرته ده، او هر دا . په ښی لور یا اړخ، په نوکانو کی
نیول شوو اړیکوځل(اړیکڅل) په$\Theta \vee \Psi$ کی خوندي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه ډیري A باندې د یوې ایکویوالنت اړیکی Θ لپاره ډیری $A / \Theta = \{ [a]\Theta \mid a \in A \}$ د ډیري A د Θ دټولو ایکویولنتټولګیو د A فاکتور الجبر په Θ پسی بلل کیږي. فاکتورډیري زیات وخت پارتیشن Partitionen یا ټوټوونی هم بلل کیږي(ځکه، چی A / Θ د A یو ټوټونی یا تجزیه ده، په پردیو برخډیریو باندې)، او ایکوالنځټو-لګي د ټوټوونو بلاکونه بلل کیږي.
خاماخا فاکتورډیري او (چی وروسته به تعریف شي) فاکتور الجبرونه یو له بل سره سر او کار لري. وهغي لار ته مرسته کوي، که د ګروپونو حالت راواخلو یا بهتره تر څیرني لاندې ونیسو: $(G , \cdot , ^{-1} , e)$ دې یو ګروپ وي او N دې د G یو نورمالپرویشونی وي، دا په دې مانا چي یو لاندې ګروپ شته د دې لاندې نورمالپرویشونی شرطونو سره:

$\forall x \in G : x^{-1} N x = N$ (د نومال پرویشوني شرتونه)
(دا پورته داسی لوستل کیږي: د ټولو x لپاره، چی له G دی یا د G توکی دی باور لري.......)
وي دې Θ_N په G باندې یوه ایکویوالنځ اړیکه د ځنګټولګي aN سره د یوه ایکویوالنځ په څیر،دا په دې مانا چی د $G / \Theta_N = \{aN \mid a \in G \}$ سره. نو کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي، چې په G/Θ_N باندې يو ګروپجوړخت يا ګروپسکترکچر $(G/\Theta_N, ., ^{-1}, e_N)$ د دې لاندې سره تعريف کړي

$$(aN).(bN) = abN \quad ,$$
$$(aN)^{-1} = a^{-1}N \,,$$
$$eN = eN$$

اوس دا غوره ده، چې وښوول شي، چې دا ډول تعريف شوی اپريشن يا کارونه کره تعريف ده. د بيلګې په توګه د ځل . لپاره ښوول کيدی شي، چې له $aN = a'N$ او $bN = b'N$ څخه تل $abN = a'b'N$ لاس ته راځي. دا کيدی شي، چې د نورما پرويشوني شرايطو سره ساده وشميرل شي. دلته ويل کيږي، چې Θ_N او . يوله بل سره زغموړ دي. همداسې په ټوليزه توګه تعريفيږي:

۵ . ۳ . ۱۱ تعريف: A دې يو ډيری وي او $\Theta \in Eq\,A$ او $f \in Op_n(A)$. نو Θ او f م زغموړ بلل کيږي، که د ټول $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in A$ لپاره د $a_1\Theta\; b_1, ..., a_n\,\Theta\, b_n$ سره تل

$$f(a_1,...,a_n)\;\Theta\; f(b_1,...,b_n)$$

باور ولري. $A = (A,F)$ په الجبر $\Theta \in Eq\,A$ يو کونګرو-اينځ اړيکه بلل کيږي، که Θ د ټولو f سره زغموړ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په A د ټولو کونګورنیځ اړیکو ډیړی په Con A سره په نخښنه کیږي یا نخښوون کیږي.
(انګریزي Kongroenzrelation= congruence relation)

۵ . ۳ . ۱۲ بیلګی

الف) په هر ډیري A باندې ثابتی عملیي یا کارونی $f_c : A^n \longrightarrow A , f(x_1,...,x_n) = c$ او id_A کټمټ ځیرونی د ټولو $\Theta \in Con A$ سره زغمور دي. له دې امله د پریوستونځیرونی (المانی او انګریزي (Projektionsabbidung or projections mapping یا -عملیي باور لري:

$$p_i : A^n \longrightarrow A , p_i(x_1,...,x_n) = x_i$$

یا دونه : دې ته‌بیا ګوته نیسم، چی دا پورته ډول ځیرونه د پریوستونځیرونی Projektionsabbidung تعریف دی.

ب) د ټولو الجبرونو(A , F) لپاره $\Delta_A, \nabla_A \in Con A$ باور لري. یو الجبر (A , F)، کوم چی د Δ_A او ∇_A ځخه بل کونګر-واینځ اړیکه ونه لري ساده بلل کیږي، د بیلګي په توګه د هر ډیري A لپاره الجبر ((A ,Op(A) ساده دی:

$$Con(A,Op(A)) = \{\Delta_A, \nabla_A\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) باور لري

$$Con(A \ , Ø) = Eq\ A$$

کيدی شي ، چی ګونګروانيخ اړيکي، د زغمووالی له لاري، د ځانګړو يوځايزو عمليو سره کرکتر.يزه شي:

۵ . ۳ . ۱۳ تعريف : (A ,F) دې يو الجبر وي. يوه څيرونه د بڼی

$$x \longrightarrow f(a_1 , , a ..., a_{i-1} , x ,a_{i+1} ,...,a_n)$$

د $f \in F$ (n – ځايز) او $a_1 , ...,a_{i.1} ,a_{i+1},...,a_n \in A$ سره

د (A , F) يو ترانسلاشن Translation بلل کيږي.

۵ . ۳ . ۱۴ جمله: د هر الجبر (A , F) لپاره باور لري:

$\Theta \in Eq\ A$ ټيك او ټيك هلته په $f (A , F)$ باندې يو ګونګروانيخ اړيکه ده، که Θ د (A , F) د ټولو ترانسلا-يشنونو سره زغمور وي.

اوبی : دا چی هر $\Theta \in Con(A , F)$ د ټولو ترانسليشنونو سره زغمور دی، دا سيده مخه لوستلود ګونګروانيخ اړيکو څخه لاسی ته راځي. په څټ دې $\Theta \in Eq\ A$ د ټولو ترانسليشنونو سره زغمور وي. دا بايد وښوول شي چي Θ د ټولو $f \in F$ سره زغمور دی. f دې يو n–ځايزه کارونه يا عمليه وي او باور دې ولري $a_1 \Theta b_1 , ..., a_n \Theta b_n$. دا چی هر د f څخه ګټلی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانسلیشن د Θ سره زغمور دی، نو لاس ته راځی

$$f(a_1,a_2,...,a_n) \ \Theta \ f(b_1,a_2,a_3...,a_n)$$
$$\Theta \ f(b_1,b_2, a_3 ,...,a_n)$$
$$.$$
$$.$$
$$\Theta \ f(b,b,...,b)$$

۵ . ۳ . ۱۵ تعریف : A دې یو الجبر وي، د تیپ f او $\Theta \in$ Con A سره. په لاندې توګه تعریف شوی الجبر A / Θ د الجبر A فاکتور الجبر Faktoralgebra نومیږي یا بلل کېږي و کونګروااینخ Θ پسی یا کونګروااینخ Θ ته: د A / Θ بنسټ- ډیری یی همدا فاکتورډیری A / Θ دی ، دا په دې مانا چی د Θ د ټولوکونګروااینټټولګیو ډیری. د A / Θ بنسټکارونی یا عملي د A له کارونویا اپریشنونو څخه لاس ته راوړل کیږی له

$$f_{A/\Theta} : (A / \Theta)^n \longrightarrow A / \Theta ,$$
$$f_{A/\Theta} ([a_1]\Theta,...,[a_n]\Theta = [f_A(a_1,...,a_n)]\Theta$$

څخه . کارونی یاعملیي $f_{A/\Theta}$ په دې توګه کره تعریف دي:
له $[a_1]\Theta = [b_1]\Theta,...,[a_n]\Theta=[b_n]\Theta$ څخه

$$[f_A(a_1,...,a_1)] = [f_A(b_1,...,b_n)]\Theta$$

لاس ته راځي (ټیك همدا د مخه تیر تعریف کی د وینا

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زغموالي خویونه دي).
الجبر $A / \Theta = (A / \Theta, | f_{A/\Theta} \in f))$ بیرته د تیپ یا ډول f دی. زیات وخت په ساده توګه داسی $A = (A , F)$ او $A / \Theta = (A /\Theta,F)$ لیکل کیږي.

هومومورفیزم د کونګروایېنخ اړیکو او فاکتور الجبر سره کلك خپلوان دي یا کلك تړلي. دا به په لاندې کی وښوول شي.

۵ . ۳ . ۱۵ تعریف : $u : A \longrightarrow B$ دې یوه ځیرونه وي . نو د u زړی (المانی Kern) په لاندې توګه تعریف دی :

$$Ker\ u = \{ (a,b) \in A^2 \mid ua = ub \}$$

دا روښانه ده، چی د u زړی تل په A باندې یو ایکویوالنځ اړیکه ده . په دې برسیره د الجبرونو لپاره باور لري:

۵ . ۳ ۱۶ جمله: د هر هومومورفیزم $u : A \longrightarrow B$ لپاره، د u زړی Ker u په A یو کونګروایېنخ اړیکه ده، دا په دې مانا چی $Kern\ u \in Con\ A$ باور لري:

اوبی: f دې د A یو n–ځایز بنسټیزه کارونه یا عملیه وي او باور دې ولري

$$(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in Kern\ u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا چې $ua_1 = ub_1 , ..., ua_n = ub_n$ ، نو دا لاندې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} uf(a_1,...,a_n) &= f(ua_1,...,ua_n) \\ &= f(ub_1,...,ub_n) \\ &= uf(b_1,...,b_n) \end{aligned}$$

له دې لاس ته راځي

$$(f(a_1,...,a_n) , f(b_1,...,b_n)) \in Ker\ u$$

دا په دې مانا چې Kern u یا د u زړی د ټولو بنسټیزو کارونو یا عملیو سره زغمور دی. ځ چ ښ و

د دې په څټ د کونگرویخ اړیکو څخه تل هومومورفیزمونه لاس ته راځي:

۵ . ۳ . ۱۷ تعریف: A دې یو ډیری وي او $\Theta \in Eq\ A$.

نو

$$P_\Theta : A \longrightarrow A / \Theta,\ P_\Theta (x) = [x] \Theta$$

د Θ کانوني څیرونه kanonische Abbildung بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۸ جمله : A دې یو الجبر وي او $\Theta \in Con\ A$.

نو کانوني څیرونه P_Θ یو سورجیکتیو هومومورفیزم:

$$P_\Theta : A \longrightarrow A/ \Theta$$

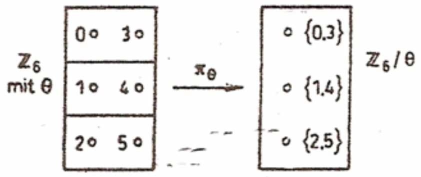
ذی. (د Θ کانوني هومومورفیزم). باور لري: د P_Θ زړی یعنی $Kern\ P_\Theta = \Theta$.

د مخ ته تیرې جملي ویناوې ساده ښوول کیږي. په تو-لیزه توګه له مخ ته تیرو دوه جملو څخه لاس ته راځي:

لاس ته راوړنه: په الجبر A باندې کونګروانیځ اړیکی تېیك د هومومورفیزم زړي دي د A پیل سره.

۵ . ۳ . ۲۰ بیلګه: Θ دې د ګروپ $Z_6 = (Z_6, +, -, 0)$ یوه کونګروانیځ اړیکه وي، د کونګروانیځټولګیو $\{2,5\}$, $\{1,4\}$, $\{0,3\}$ سره.

نو $Z_6 / \Theta = (Z_6/\Theta, +, -, 0)$ د $Z_6 / \Theta = \{\{0,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}\}$ او $\Theta = \{0, 3\}$ سره. په څرګند ډول باور لري $Z_6 / \Theta = Z_3$ ، چیرته چی Z_3 څیوکلیکي یا بیرته راګرزیدونکی ګروپ دی د درې توکو سره. (وربسی څیره دې وکتل شي)



څیره ۲۸

طبعاً د یوه الجبر کونګروانیځ اړیکي، لکه لاندې الجبرونو ته ورته، یو-تړون یا لاتیس جوړوي. د دې د کتلو لپاره ذا لاندې لاس ته راوړني ته اړیو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۳ . ۲۱ جمله: A دې یوالجبر وي او R دې د $Con\ A$ یو ناتش برخډیری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in Con\ A$$

اوبی یا ثبوت: f دې د A یو n–خایزه بنستیزه کارونه یا عملیه وي، او وې دې: $(a_1,b_1),...,({}_na,b_n) \in R$ ،نو باور لري: $(a_1,b_1),...,(a_n,b_n) \in \Theta$ او له دې امله

$$f(a_1,...,a_n)\ \Theta\ f(b,...,b_n)$$

د ټولو $\Theta \in R$ لپاره. له دې امله باور لري

$$f(a_1,...,a_n) \quad R\ f(b_1,...,b_n) \qquad \text{پای}$$

په دې پسی به وښوول شي چی د $\Theta, \Psi \in Con\ A$ لپاره تل $\Theta, \Psi \in ConA$ او $\Theta \vee \Psi \in ConA$ باور لري،

د $\wedge$ او $\vee$ سره لکه د مخه مو ، چی و ښوول.

په نورو ټکو یا کلیمو سره په Θ او Ψ کی غټې خوندې اکویوالنځ اړیکی او کوچنی Θ او Ψ خوندې لرلي ایکو–یوالنځ اړیکي دواړه اوتوماتیك کونګروا ینځ اړیکي دي.

په داسی حال کي چی $\Theta \wedge \Psi \in Con\ A$ په دې د مخه جمله پسی تړلی لاس ته راځي د $\Theta \vee \Psi \in Con\ A$ ښونه په لاندې ډول سرته رسیدلي شي:

داچی $\Theta \vee \Psi \subset Eq\ A$ روښانه ده نو لکه د مخه مو، چی ښوولی، بسیا کوي چی د $\Theta \vee \Psi$ زغموالی د $A = (A, F)$ ترانسلیشن سره وښوول شي. وي دې $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ او $g(x) = f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n)$ یو ترانسلیشن د $f \in F$ او $a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n \in A$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $\Theta \in (g(a),g(b))$ د ثبوت دی. جمله د

توکو $c_1,...,c_n \in A$ موجودیت لاس ته راکوي

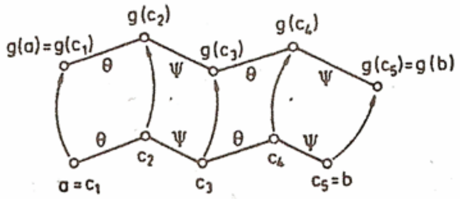
د $a = c_1 \Theta c_2 \quad c_3 \Theta c_4 ...c_n = b_n$ سره. دا چي g

د Θ همدا ډول د Ψ سره زغمور ده، نو لاس ته راځی:

$g(a)=g(c_1)\Theta g(c_2) \Psi g(c_3) \Theta g(c_4) ...g(c_n) = g(b_n)$

له کومی چی د ۵.۳.۰۱ پسی $(g(a),g(b)) \in \Theta \vee \Psi$ ورکوي،

لکه څنګه چی د غوښتلو وو (دا پسی څیره دې وکتل شي).



څیره

دا پورته راوړلی فکرونه کیدی شي چی په لاندې ډول راټول شي:

۵.۳ . ۲۱ جمله: د هر الجبر A لپاره (Con A, ∧ , v)

د (Eq A ,∧ , v) یو لاندې الجبر دی. په ځانګړې توګه (Con A ,∧ , v) یو ټرون یا فرباند دی (د A کونګرو-اینځفرباند یا کونګروانیځ ټرون)

د دې جملی له مخه تیرې جملی څخه ترلی لاس ته راوړنه لاندې هم ده:

۳.۵ . ۲۲ جمله: د هر الجبر A او هر برخځیري

$X \subseteq A^2$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Theta(X) = \bigcap \{ \Theta \in \mathrm{Con}\, A \mid \Theta \supseteq X \}$$

یو کونګروا‌ینځ اړیکه په A ده، دا په دې مانا
چې $\Theta(X) \in \mathrm{Con}A$. په ښکاره ډول $\Theta(X)$ په A
باندې کوچنی کونګروا‌ینځ اړیکه ده، چې X خوندي لري.
دلته $\Theta(X)$ هغه د X څخه جوړه شوې یا تولید کونګرو-
اینځ اړیکه بلل کیږي. د پایډیري $X=\{(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)\}$
لپاره زیات وخت داسی لیکل کیږي $\Theta((a_1,b_1),...,(a_n,b_n))$
د $\Theta(X)$ په ځاي. د $Y \subsetneq A$ لپاره په زیات وخت کی په ساده
توګه د $\Theta(Y^2)$ اود $\Theta(a_1,...,a_n)$ په ځاي $\Theta(Y)$ لیکل کیږي،
که $Y = \{ a_1,...,a_n \}$ وي. د $\Theta(a,b)$ بنې کوانګروا‌ینځ
اړیکی د $a \models b$ سره اصلي کوانګروا‌ینځ بلل کیږي.
لکه په لاندې الجبرونو کی ، دمخه دې وکتل شي، کیدی
شي، چې له X و $\Theta(X)$ ته تلونکی تولیدي پروسی په
روښانه ډول تشریح کړای شي یا روښانه شي. د په ساده
توګه داسی کیږي، چې کونګروا‌ینځ اړیکي دلاندې الجبر-
ونو د بنستیډیري په څیر تشریح کړای شي: A دې یو الجبر
وي د تیپ f د بنستیډیري A سره. د نوي الجبر بنستیډیری
A^2 دی. د هر n -ځایزې عملي سومبول $f \in f$ همداسی
یو n-ځایزه عملیه f_2 په A^2 تعریفوي د

$$f_2((x_1,y_1),...,(x_n,y_n)) = (f_A(x_1,,...,x_n),f_A(y_1,...,y_n))$$

سره.

بیا د هر $a \in A$ لپاره توکی (a,a) د صفرځایزې عملیي
په څیر ورزیاتیږي، په دې برسیره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s((x,y)) = (y,x)$$

سره یوه یوځایزه عملیه تعریفیږي او بالاخره په لاندي توګه تعریف شوې دوه ځایزه عملیه:

$t((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1,y_2)$ که $y_1 = x_2$ وي

(x_1,y_1) په بله توګه

د فامیل F سره، چی له عملیو

$$f_2\,(f \in f),\,(a,a)\,(a \in A),\,s,\,t$$

ځخه جوړ وي، هغه غوښتونکی الجبر لاس ته راځي.

(ښوونه دې د کورکار وي)

۵ . ۳ . ۲۳ جمله: د هر الجبر A لپاره باور لري

$$\text{Con}\,A = \text{Sub}\,(A^2, F_{Con})$$

دا په دې مانا، چی په A باندې کونګروا‌ینځ ټیک د (A^2, F_{Con}) لاندې الجبرونو بنسټیري دي.

کیدي شي ، چی سیده په کونګروا‌ینځ اړیکو وکارول شي یااستعمال شي. ځکه چی باور لري $\Theta(X) = \langle X \rangle$، د کوم سره، چی $\langle X \rangle$ کوچنی X خوندې لرونکی د (A^2, F) لاندې الجبر په نخښه کوي. د $\Theta(X)$ یو بل جوړځیزه روښانونه به په جمله کی ورکړ شوې وي، چیرته چی د پولینوم کلیمه په واک کی لرو. یوه بله د کونګروینځ اړیکو او لاندېالجبرونو ترمنځ اړندونه په لاندې جمله کې روښانه شوې ده، چی ښوونه یی بیا هم ګرانو لوستونکو ته پاتی ده.

د دې له مخه یو بل تعریف : د هر ډیري A دې $\Theta \in \text{Eq}\,A$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $A \subseteq X$ لپاره دې وي

$$[X]\Theta = \bigsqcup_{x \in X} [x]\Theta$$

دا په دې مانا چي $[X]\Theta$ د هغو ايکويوالنت اړيکوΘ ټولنه ده، کوم چي يو $x \in X$ خوندي ولري.

۵ . ۳ . ۲۴ جمله : وي دې A يو الجبر، $\Theta \in ConA$،

او$B \in Sub\ A$. نو باور لري

$$[B]\Theta \in Sub\ A.$$

عمومي الجبر تيپ او داسی نور لاندې الجر

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ تړوني Verband (lattice)

۶ . ۱ تړوني او مکمل یا پوره تړوني

: ګروپ تیورۍ اوکړۍ تیورۍ ترمنځ غبرګوالی نورۍ تیورۍ، په ځانګړي توګه د تړونی تیوري رامنځ ته کړه یا راپورته کړه. :ا له دې لاندې څخه لاس ته راغله: د یوه ګروپ لاندېګرو-یونه او هم د ګروپ نورمالپرویشوني او په همدې توګه د یوې په خوبنه کړۍ ټولو لاندېکړۍ اویا ټول (دوه اړخیزو، کینې اړخیز ، ښي اړخیز) ایدیالونه نسبت د ډیرۍ تیوري خوندیونی ته-چی نیممنظم یا نیمترتیب دي-هلته دا نیممنظم یو څو بنسټیز خویونه لري.

۶ . ۱ . ۱ . ۱ تعریف : یوه نیمترتیب ډیرۍ S تړونی بلل کیږي، که هغه دا لاندې دوه خویونه ولري:

الف ۱ . د توکو $a, b \in S$ هرو جوړو لپاره په S کی یو داسی توکی $c = a \cap b$ شته. چی د a او b غوځي بلل کیږي، د کومو لپاره چی

$$c \leq a \quad , c \leq b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري، که یو بل توکی c' موجود وي، چې هغه همدا شرطونه $c' \leq a$, $c' \leq b$ پوره کړي ، نو $c' \leq c$ دی.

الف ۲) د توکو $a, b \in S$ هرې جوړې ته په S کې یو توکی d ، چې د a او b ټولنه بلل کیږي، شته، دکوم لپاره چې

$d \geq a$, $d \geq b$

باور لري، او هر بل داسې توکی d' د $d' \geq a$, $d' \geq b$ سره دا اړیکی $d \geq d'$ پوره کوي.

په ښکاره توګه د دوه توکو a ، b دا ټولنه $a \cup b$ او غوڅی $a \cap b$ له دې سره یواځنې ټاکلي دي.دا هم په ښکاره توګه ساده لیدل کیږي، چې هر نیممنظم ډیری ، یوه تړون ته په خټ یا مخامخ ایزومورف ډیري (پرتله برخه ۲) په همدې ډول یو تړون دی. په کومو کې، چې کلیمی غوڅی او ټولنه یو بل ته دوه ایزې یا دوال Dual کلیمې دي. پس کیدی شي، چې د کوم ګروپ G د یوه لاندېګروپ له تړوني او همداسی د دې ګروپ G د نورمالپرویشوني له تړوني څخه وغیره، او همداسی د یوې کړی R د لاندې کړیو تړون او همداسی د دې کړی R د ایدیال د تړونو څخه وغیره، که دا ایدیالونه کیڼ او ښي هم وي. په دې ټولو حالتو کې د لاندېګروپونو (لاندېکړیو) A , B د غوڅی څخه د هغو ډیرېتیوریکی غوڅی $A \cap B$ پوهیږو، د ټولنې په ځیر د دې لاندې ګروپونو (لاندېکړیو) څخه جوړ شوي لاندې-ګروپونه(په همدې ورته توګه لاندېکړی) { A , B } .

په ټولیزه توګه کیدی شي، د یوه الجبر د لاندی الجبرونو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تړون څخه وغږېږو. د تړون لپاره يوڅو نورې بېيلګې هم راوړو. د يوه ډېرې M ټول لاندې ډېرې نسبت د ډېريتيورې خوند-
ښونې ته يو تړونی جوړوي، په کومو کی چی غوڅي او ټولنی د ډېريتيورې د موخی يا هدف په څير پوهيدل کيږي، داد لاندېډېريو M تړون به وريسی هم زيات وکارول شي.

۶ . ۱ . ۲ **جمله:** هر لايني منظم ډېری L يو تړون دی، او دا د

$$a \cap b = a \ , a \cup b = b$$

سره د $a , b \in L , a < b$ (دې ته دلته بيا هم ګوته نيسم، چی دا په لاتين تورو ليکنه له کيڼ لورلوستل کيږي) له امله.
د پيداينبتي يا طبيعي ګڼونو ډېری يو تړون دی، که د نظم اړيکي د ويشوړوالی اړيکی ونيول شي، د غوڅي رول دلته غټ ګډ پرويشونی لوبوي او د ټولنی رول کوچنی ګډ زيات-
څله لوبوي. (دا د غ.ګ .و او ك.ګ.ز.موضوعګانی څما د شميرپوهنی په کتاب کی پوره څيړل شوي)
تړونونه د الجبر يو ځانګړی حالت دی. کيدی شي ، چی تړون بي د نيمنظم له استعمال څخه،يواځي د خويونو له مخی تعريف کړی شي، چی غوڅي او تړون د بينار اړيکو په څير بايد ولري:

۶ . ۱ . ۳ **جمله :** ډېریS د دوه بينار يادوه ګونو اړيکو $a \cup b$ او $a \cap b$ سره هلته او هلته يا ټيك هلته يو تړون دی، که دا عمليي لاندې کتمټ اړيکی پوره کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا دونه: لوستونکی دې بیا هم ماته بخښنه وکړي، که دا ساده کلیمه بیا دلته کوته لکه کړم، چی دا هلته او هلته په دې مانا دی، چی که چیرې دا شرطونه پوره وي، نو دا یو تړون دی. اوپه ځتې: که دا الجبر یو تړون وي ، نو دا شرطونه پوره دی. دا په دې مانا ، چي د یوه څخه بل لاس ته راځي او په ځتې

$II_1.\quad a \cap a = a,\quad a \cup a = a$

$II_2.\quad a \cap b = b \cap a,\quad a \cup b = b \cup a$

$II_3.\quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c),$

$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c):$

$II_4.\quad a \cap (a \cup b) = a \cup (a \cap b) = a$

موږ لمړی نیسو ، چی یو تړون S ورکړ شوی دی، عملیې $a \cap b$ او $a \cup b$ د الف۱ او الف ۲ لاندې تعریف شوې دي یا پیژندلای شوي دي. د II_1 او II_2 باوري کید نه بیا روښانه ده. موږ اوس خوې II_3 ازمایو او دا د غوځي لپاره. له لمړي ۱ څخه لاس ته راځي:

$(a \cap b) \cap c \le a \cap b \le a.$

$(a \cap b) \cap c \le a \cap b \le b,$

$(a \cap b) \cap c \le c$

همداسی لکه د لمړي ۱ پسی

$(a \cap b) \cap c < b \cap c,$

$(a \cap b) \cap c < a \cap (b \cap c)$

لاس ته راځي. په برابره یا همدې توګه دی

$a \cap (b \cap c) < (a \cap b) \cap c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره II_3 باوري کيږي
وريسی بيا د لمړي ۱ پسی روښانه دي

$$a \cap (a \cup b) < a;$$

په همدې توګه له بلی خوا $a < a$ باور لري او د لمړي۲
له امله $a < a \cup b$ ، پس د لمړي ۱ پسی دی

$$a < a \cap (a \cup b)$$

له دې څخه د II_2 باوري کيدنه لاس ته راځي.
اوس دې يو ډيریS د دوه بينار يا دوه ګونو اړيکو سره ورکړ شوي وي، کوم چی خويونه II_1 او II_4 لري. د $a, b \in S$ لپاره خويونه

$$a \cap b = a, \quad a \cup b = b \qquad (1)$$

تل سملاسي پوره دې يا پوره نه دي. که $a \cap b = a$ وي نو له II_4 او II_2 څخه

$$(a \cup b) = (a \cap b) \cup b = b$$

لاس ته راځي.
که د دې په خټ $a \cup b = b$ وي، نو II_4 پسی لرو

$$a \cap b = a \cap (a \cup b) = a$$

که د توکو a او b لپاره مساوات (۱) باور ولري، نوکيږدو $a \leq b$. له دې سره په ډيريS کی يو نيمنظم پلی کيږي. په رينبتونی $a \leq a$ د II_1 په بنسټ دی.
که په دې ورزيات $a \leq b$ او $b \leq c$ باور ولري، يعنی

$$a \cap b = a, \; b \cup c = b ،$$

نو د II_3 سره سم لاس ته راځی:

$$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا، چې $a \leqq c$. بالاخره دی: $a \leq b$, $b \leqq a$,
پ $a \cap b = a , b \cap a = b$ له II_2 بیا لاس ته $a = b$ راځي .
پسی ترلی د لمړي ۱ شرط باوړبوالی یا باوریتوب ښایو. له
$(a \cap b) \cap a = a \cap (a \cap b) = (a \cap a) \cap b = a \cap b$
څخه لاس ته راځي $a \cap b \leq a$ ، په ورته توګ کیدی شي
$a \cap b \leq b$ وښوول شي.

د دې په خټ په S کی دې یو په خوښه توکی c' ټاکلی وي،
کوم چی شرطونه $c' \leqq a , c' \leqq b$ دا په دې مانا چی

$$c' \cap a = c' , \quad c' \cap b = c'$$

پوره کوي، نو باور لري

$$c' \cap (a \cap b) = (c' \cap a) \cap b = c' \cap b = c'$$

له کوم چی $c' \leqq a \cap b$ لاس ته راځي. دا توکی $a \cap b$ په
تعقیب د توکو a او b غوځی د لمړي ۱ په موخه یا هدف
انځوروي. په ټیك دې سره سمه توګه توکی $a \cup b$ ښوول
کیدی شي، چی د توکو a او b ټولنه ده، د لمړي ۲ په
موخه یا هدف.

څمور د ترون د کلیمي دوم تعریف په ګوته کوي، چی ترون
د ټولیز الجبر پریمیتیو ټولګي یا ساده ټولګی جوړوي، د
دې دوه دوه ځایزو عملیو سره(دا مو د مخه په ګوته کړي
وو، چی ساده ټولګی څه ته وایي)

دا د ترون د کلیمي هغه زړی دی، څنګه چی دا د لاندې
ترونو او ایزومورفو څیرونو او د ترونونو د خوندیونو لپاره
په پام کې نیول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . ۱ . ۴ تعریف : یو د ترون S لاندېډیری T لاندېترون بلل کیږي، که دا د مخ ته تعریف شوې، د الجبر په موخی راوړل شوي ترون، یو لاندې الجبر انځور کړي. د نورو ټکو سره یا کلیمو سره یا په بل ډول T د هرو دوه توکو a او b غوځی $a \cap b$ او د هغو توکو ټولنه $a \cup b$ خوندې لري، نسبت وهغو عملیو ته چی په ترون S کی تعریف شوي دي، چی T پخپله یو ترون شي وهغو عملیو ته چي په S کی تعریف شوي وي.

دې ته دې پام وي، چی د یوه ترون S یو لاندې ډیری T نسبت په S کی تعریف شوي نیمنظم ته چی هغه په کی هم باور و لري، بښوول کیدی شي، مګر دا ضرور نه ده یا په نورو کلیمو ، تل داسی نه ده، چی دا دې یو لاندېترون جوړ کړي. د ګروپ G د ټولولاندېګروپونو ترون د ډیریتیوري له مخي نظم راوستی شي، خو دا ترون د ګروپ G د ټولو لاندېډیریو ترون لاندېترون نه انځوروي، ځکه چی ټولنه په دواړو ترونونو کی مختلفی ماناوې لري. په همدې توګه د یوې کړی R د لاندېکړیو ترون هم همداسی دی، چی په ټولیزه توګه دکړی د زیاتونیګروپ لاندېګروپونه ترون نه جوړوي.

۶ . ۱ . ۵ جمله : د یوه ګروپ G د نورمالپرویشونو ترون د زیاتونګروپ G د ټولولاندېګروپونو لاندې ترون نه دی، چی دا مو د مخه د ګروپتیوري کی ښوولی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . ۱ . ۶ تعریف : د یوه ترونی S را په ښتکیدونکی یواځنی ځیرونه یا په بل عبارت یو اینجکتیوه ځیرونه u په ترون S' باندې یوه ایزومورفه ځیرونه دہ یا په بل عبارت یوه ایزومورفه خوندیونه دہ د S په S' کی ، که د په خوښه توکو $a , b \in S$ لپاره

$$(a \cup b)\, u = au \cup bu \quad . \quad (a \cap b)\, u = au \cap bu$$

باور ولري

یادونه : د u لپاره په کتابونوکی زبات وخت یونانی توری ځای په ځای کیږي، مګر زه دا ستونځي لرم، چی یونانی توري می په پروګرام کی نه شته. هیله ده چی ځیرونی او د یوه ډیری توکی توپیر ته بد د ګرانو لوستونکو پام وي) دا د S او S' یو ایزومورفیزم دی، چی د ټولیز الجبر په ځیر راوړل شوي تروني یی یو له بل سره لري.

۶ . ۱ . ۷ جمله :د یوه تروني S ایزومررف خوند یونه u په ترونS کی.د نیممنظم ډیریو په موخه یا هدف د ډیري S په ډیرې S کی یو ایزومورفیزم انځوروي.

اوبی : د اوبیونی لپاره ټکو $a , b \in S$. که $a < b$ وي یعنی $a \cap b = a$. نو وبه لرو

$$(a \cap b)\, u = au \cap bu = au$$

او نه دي امله لاس ته راځي $au < bu$. که دا پام پد ښې یا په برعکس لور وکړو او وکاروو. چی u یو یواځنی په ښتکیدونکی دی. نو له $au < bu$ ځخه هم $a < b$ لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي.
دا پورته بیلګی را ته ښايي، چی په څټ ثابتونه باورنه لري.
د دوه ډيريو S او 'S لپاره ، چی نیممنظمي دي، یو ایزو-
مورف څیروني u ته د S په 'S کی، هلته اړتیا یا
ضرورت شته، چی S او 'S دواړه ترونونه وي. دا د S
ایزمورفی څیرونی کي په 'S باندې بل ډول ځانونه نیسي.

۶ ۱ . ۸ جمله : که ترونونه S او 'S ورکړ شوي وي،
نو د نیم نظم په موخه هر ایزمورف څیرونه د S په 'S
باندې ترون S ایزمورف په ترون 'S باندې انځوروي.
اوبی : په ریښتیني د $a, b \in S$ سره له $a \cap b \leq a$
څخه هم $(a \cap b)u \leq au$ او په همدې توګه

$$(a \cap b)u \leq bu$$

که $c' \in S$ داسی وي، چی $c' \leq au$ او $c' \leq bu$ باور
ولري، او c د S هغه توکی وي، د کوم لپاره چی
$cu = c'$ دی، نو لاس ته راځي $c \leq a$ او $c \leq b$ دا
په دې مانا چی $c \leq a \cap b$ له کوم څخه چی
$cu < (a \cap b)u$ لاس ته راځي. له دې سره سم
لاس ته راځي

$$(a \cap b)u = au \cap bu$$

د ټولنی لپاره یی ښوونه یا اوبیونه په همدې توګه ده. مون
دا هم په پام کی نیسو، چی په ترونونو باندې د هومورفیزم
اوټولی هغه کیلمي چی په خوښه، د ټولیزالجبرونو په ساده

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا پریمیتو ټولګیو کارول کیږي، کارولی شو. (دلته نورې بیلګې هم شته خو هغه موضوعګانی موږ نه دې څیړلی ، له دې امله یې نورې زه هم دلته نه ګوته لکی کوم)
د تیرو بینار اړیکو په بنسټ(لمړی برخه دې وکتل شي)، په یوه ډیرې M باندې بینار اړیکی یو ټروني جوړوي، کوم چی د M×M ډیري د ټولو لاندې ډیریو سره پریوځي، یا برابر دی. په همدې توګه په یوه ډیري M باندې تعریف شوي ایکویوالنت اړیکي یو ټرون جوړوي، لکه په برخه ۱ کی چی ښوول شوي دي. دا د ایکویوالنت اړیکو ټرون د بینار اړیکو د ټرون لاندې ټرون نه دی.

۶ . ۱ . ۹ جمله: هر ټرون په یوه ځانګړې ډیري باندې تعریف شوي ایکویوالنت اړیکو ټرون کی ایزومورف خوندې دی.
(Whitman, Bull.Amer. Math. Soc 52(1946), 507 - 522)

۶ . ۱ . ۱۰ جمله :په یوه ورکړ شوي ډیري باندې تعریف شوی ټرون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګروپونو ټرون کی ایزومورف خوندې دی.
(Brkhoff , Proc .Cambr.Phil.Soc 31(1935) , 433 - 454)
له دې سره سم هر ټرون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګرو- پونوټرون کی ایزومورف خوندې دی.
ډیر دا مخ ته راوړل شوي ټرونونه – لکه د یوه ډیري M لاند- ډیریو ټرون ، د یوه ګروپ G لاندېګروپونو ټرون، د یوې

(c) ketabton.com: The Digital Library

کړی R د ایدیالونو تړون ، په یوه ډیرې کی د ایکویوالنځ-اړیکو تړون، - دا سی خویونه لري، د هغو غوڅی او تړلنه نه یواځي د دوه توکو لپاره بلکه د اسوڅیاتیو قانون سره سم د زیاتو توکو لپاره روښانه یا تشریح شوي ده، بلکه د ناپای ډیرو ډیریو لپاره هم.

په بل ډول افاده کوو، دا تړونونونه دلاندي تعریف سره سم پوره تړونونه انځوروي:

۶ . ۱ . ۱۱ تعریف : یو نیم منظمډیری S پوره تړون یا مکمل تړون بلل کیږي، که په خوښه ناتش لاندیډیري $A \subseteq S$ لپاره په S کي توکي c او d د لاندې ورکړشوو خویونو سره سم موجود وي:

الف ۱ . د ټولو $a \in A$ لپاره نامساوات $c \leq a$ باور لري، هر وریسی توکی c' د $c' \leq a$ سره د ټولو $a \in A$ لپاره شرطونه $c' \leq c$ پوره کوي.

دوم ۲ - د ټول $a \in A$ لپاره نامساوات $d \geq a$ باور لري، هر اوریسی توکي d' د $d' \geq a$ سره د ټولو $a \in A$ لپاره شرطونه $d' \geq d$ پوره کوي.

دا یواځنی ټاکلی توکی c او d د لاندېډیري A د توکو غوڅی او همداسی تړلنه بلل کیږي. د سومبولونو سره کیدی ، چی c او d په لاندې توګه انځور شي:

$$c = \bigcap_{a \in A} a, \quad d = \bigcup_{a \in A} a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا پیژند نخښنه i یو ټاکلی پیژندډیري I کی وخغلي
یعنی i ∈ I، په لاندې بڼه هم لیکل کیږي

$$c = \bigcap_{i \in I} a, \quad d = \bigcup_{i \in I} a$$

طبعاً یو پوره تړون یو تړون هم دی، په ورسره بلده موخه یا هدف.

۶ . ۱ . ۱۲ تعریف :د پوره تړون S د ټولو توکو غوڅی د تړون صفرتوکی بلل کیږي او په سومبول 0 سره په نخښنه کیږي. دا توکي د لاندې درې شرطونو، هر یوه سره یوا- ځنی ټاکل کیدیشي. د ټولو a ∈ S لپاره باور لري

1) $0 \le a$; 2) $0 \cap a = 0$; 3) $0 \cup a = a$.

۶ . ۱ . ۱۳ تعریف : د یو پوره تړون د ټولو توکو ټولنه د تړون یویتوکی بلل کیږي اود سومبول 1 سره په نخښنه کیږي. دا سي یویتوکی د لاندې دري په خوبنه شرطونو، له یوه څخه یواځنی ټاکلی دی : د ټولو a C S لپاره باور لري

1') $1 \ge a$; 2) $1 \cup a = 1$; 3') $1 \cap a = a$

طبعاً هغه تړونونه چی پوره تړونونه نه دي کړی شي، چی صفرتوکی او یویتوکی (او یا یو له دوي څخه) ولري.
د یوه ګروپ G د لاندې ګروپونو په تړون کی د هغه صفر توکی یونلاندېګروپ سره او یویتوکی یی پخپله د G سره انځوریږي، د یوې کړی د لاندېکړیو په تړون کی د صفرتوکی د صفر لاندېکړی سره او پخپله د کړی R

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره انخوريږي، د يوه ډيري M ټولو لاندېډيريو ترون کی د تشډيري او پخپله د ډيري M سره انخوريږي.
د پرويشنی قانون له مخی منظم يا تنظيم شوي د طبيعي ګڼونو ترون او د څنځيروني ، چی پخپله طبيعي نظم يی جوړوي، هر وار يی صفر توکی ګڼ ۱ دی. په داسی حال چی يويتوکي موجود نه دی.

۶ . ۱ . ۱۳ جمله: يو نيم منظم ډيری S هلته او هلته يوترون دی، که هغه يو يويتوکی ولري او په هغی کی د هرو، په خوښه ناتش لاندې ډيريو لپاره غوځی موجود وي.
اوبی : د ښوونی لپاره بسيا کوي، که داسی فکر وکړو، چی د يويتوکی د موجوديت او د د ټولو غوځيو له موجوديت څخه د ټولنی موجوديت لاس ته راځي. A دې د S يو ناتش لاندېډيری وي. په S کې داسی توکيb موجود دی د کوم لپاره چی $b \geq a$ دی، د ټولو $a \in A$ لپاره، داسی يو توکی تل دا يويتوکی دی، B دې د ټولو داسی توکو يو ناتش لاندېډيري وي او d دې د هغو غوځی وي :

$$d = \bigcap_{b \in B} b$$

مور به سملاسی وښايو، چی d د لاندېډيري A ټولنه انځوروي. په رينښتيني سره $a \leq b$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره او د ټولو $b \in B$ ، له دې امله $a \leq d$ باور لري. وريسی دې $s \in S$ داسی وي، چی $s \geq a$ د ټولو $a \in A$ لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دي ځخه $s \in B$ لاس ته راځي او له دې سره $d \leq s$.
په دې ډول دی

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

د یوه نیم منظم ډيري خويونه، چی یو پوره ترون(او یا هم یو ترون) وي، ځان په یوه په ځت ایزومورفیزم ته لاښودوي (د دې سره دي لمړی برخه پرتله شي)، موږ کړی شو، چی د همدا اوس ښوول شوو جملو ځخه او د هغو د نیونو یا فرضیو ځخه هم د صفر توکي موجودیت او د ټولو لاندپهٔیریو موجودیت و غوښتل شو.

۶ . ۱ . ۱۴ تعریف: د یوه نیم منظم ډیري M ځیرونه u په نیم منظم ډیري N کی، په کوم کی چی له $a, b \in M, a \leq b$ ځخه تل $au \leq bu$ لاسته اځي، مونوتون monoton بلل کیږي(مونوتون په دې مانا، چی توکی یو په بل پسی یا لویږي او یا کوچني کیږي). یو ترون S هلته او هلته پوره ترون دی که دS په هر مونوتون ځیرونی u په خپل ځان باندې فیکس توکی موجود وي، یعني توکي، د کومو لپاره چی $au = a$ دی

(Tarski , Pacif. J. Math.5 (1955) , 285 - 309 ;
David Ö Pacif. J . Math 5(1955) 311 - 319)

لکه د مخه تیرو درسونو چی وښول شو، هر نیم منظم ډيري M د ټولو لاندپهٔیریو په پوره ترون M کی خوندي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ غواړو چې دا لاندي جمله وښايو

۶ . ۱ . ۱۵ جمله : هر ټړون کیدی شي ، چې په یو پوره ټړون کې ایزومورف(د ټړونونود ایزومورفي په موخه، پرتله دمخه همدا برخه) خوندي شي.
دا جمله د راتولنکي جملی څخه لاس ته راځي، چې نسبت و مخ ته تیره لمړی برخی کی وینا ته لږ تیزه وېناد :

۶ . ۱ . ۱۶ جمله : هر نیم منظم ډیری M په یو ټاکلي ټړون S کی ایزومورف خونديږ دی، او دا په داسی توګه چی د هر لاندیډیري M A لپاره و کوم ته چی په M کی غوڅی یا ټولنه موجود ده، چی دواړه د u په خونديونه کی و بل ته وړل کیږي: دا داسی بلل کیږي، چی دی

$$(\bigcap_{a\in A} a)u = \bigcap_{a\in A} au \quad , (\bigcup_{a\in A} a)u = \bigcup_{a\in A} au \qquad (2)$$

دا په برخه ۱ کي جوړ شوي د M خونديونه په M کی، په روښانه توګه مخ ته لرونکی شرطونو لپاره بسیانه کوي.
موږ په لاندې توګه مخ په وړاندې خو: لمړی نیسو چی ډیری M یو صفر توکی لري، که نه نو M ته یو توکی 0 صفر ورزیاتوو.

۶ . ۱ . ۱۷ تعریف : یو ناتش لاندیډیری M X په M کی یو ایدیال بولو که:
اول) X و هر خپل توکي x ته ټول توکي y هم ...

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y \leq x$ سره.

دوم) د هر $X' \subseteq X$ لپاره، د کوم لپاره چې په M کې ټولنه موجود وي دا ټولنه په X کې هم موجود ده.

د ډیري M د ټولو ایدیالونو ډیری S نسبت د ډیریتیوري خوندیونې ته نیم منظم دی. دا چې S یو یویتوکې لري– په څرګند ډول M د خپل ځان ایدیال دی–، له دې وراخواد ایدیالونو په خوښه ډیري غوځي، چې صفر لري، او ټول د ایدیال په تیوري کې راغلي تعریفونه پوره کوي، نو ډیريS د په دې برخه کې د مخه لوستل شوو له مخې پوره تړون دی.

د یوه په خوښه توکي $a \in M$ لپاره د ټولو توکو $b \in M$ ډیری (a) د $b \leq a$ سره یو ایدیال انځوري، کوم چې د a څخه راجوړ یا تولید شوی اصلي ایدیال بلل کیږي. که هر توکی $a \in M$ د هغه څخه راجوړ یا تولید ایدیال(a)باندې تنظیم شي، نو په لمړۍ برخه کې لوستل شوو له مخې یو ایزومورف خوندیونه u د نیم تنمظیم شویډیر M ، په پوره تړون S کې، لاس ته راځي.

موږ نو نیسو ، چې په M کې د لاندېډیریو $A \subseteq M$ د هغو غوځې

$$c = \bigcap_{a \in A} a$$

موجود دی. پس لرو $c \leq a$ او په دې پسې $(c) \leq (a)$ د ټولو $a \in A$ لپاره.

که بیا د ټولو اصلي ایډیالونو (a) , $a \in A$ د ډیریتیور–

(c) ketabton.com: The Digital Library

یکي غوځي توکی x ولري، نو $x \leq a$ دی، د ټولو $a \subset A$ لپاره او له دې امله $x \leq c$.له دې سره باور لري

$$(c) = \bigcap_{a \in A} (a)$$

او له دې سره جوخت لمړی مساوات (۲) ونبوول شو.
همداسی دې و دې لاند ډیر $A \subseteq M$ ته په M کی ټولنه

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

موجود وي. نو $(a) \supseteq (d)$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره.
که یو ټاکلی ایدیال X ټول $a \in A$ ولري، نو په همدې توګه د دې ټولنه هم خوندي لري. په دې لاس ته راوړنی سره $X \subseteq (d)$ دی.
له دی امله باور لري

$$(d) = \bigcup_{a \in A} (a)$$

په دې توګه مو د (۲) دوهم مساوات ونبوول، او په له دې امله د جملی اوبی پوره شو.

۶ . ۱ . ۱۸ جمله :یو نیمتنظیم شوی ډیری S هلته او هلته یو پوره ترون دی، کله چی په S کی یو صفر توکیموجود وي او هر ایدیال یو اصلي ایدیال وي.
یا دونه: د دې جملي له ښوونی څخه هم دلته تیرېږو .
کیدی شي په کوروش یا خوروش کې وکتل شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library