کوش KUSCH

د فرنخیالبرابرون یا _ مساوات

$$y - y' + y^2 y''^4 = 0$$

Differentialgleichungen

Ketabton.com

ژباړن:
ډاکټر ماخان (میری) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان (په اولني نوم مېړی) د اروابناد پښتو او اروابناد نورالرحمان زوی، په ۱۵/۹/۱۹۴۶م کال د شینوارو د هسکې مېنې ولسوالۍ کې زېږېدلی. (د زېږېدو نېټه یې د ۱۳۲۴ هـ ل کال څخه یو یا دوه کاله دمخه ده).

د هسکې مېنې د درې کاله کلیوالي ښوونځي وروسته، چې د لومړنیو زده کوونکو څخه وو. له ۱۹۵۴ څخه تر ۱۹۶۵ پورې رحمان بابا لیسه، د ۱۹۶۶م کال سپتمبر کې د یوه بورس له لارې اطریش ته لاړ او هلته په پوره ستونزو د شمېر پوهنې په ډاکټرۍ بریالی شو.

د ۱۹۸۷ م کال د نومبر تر د ۱۹۸۸ فبروري تر اخره د افغانستان د باندنیو چارو کې مامور وو. دی د ۱۹۸۸م کال د فبرورۍ له ۲۹ تر ۱۹۹۲ م کال د اپریل تر نیمایي وراخوا په بن (المان) کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژدافیر وو او د ۱۹۹۲ یوني څخه راپه دېخوا په المان کې نور هم د پردېسۍ شپې او ورځې تېروي.

ماخان شینواری د مېرمن ښاپېرۍ سره له ۱۹۷۲م کال راپه دې له لرې واده (د واده خبر ورته اطریش ته راغی) دی په نهم ټولګي کې یې کوزده ورته کړې وه. دوی ته لوی څښتن دوه بچیان وبخښل، ځانګه او اباسین، چې د ۱۹۷۹کال د مۍ په شلم په اطریش کې زېږېدلي.

Verein zur Fördrung der Afghanischen
Kultur e. V. Köln, Germany

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . دیفرنځیالبرابرون یا
دیفرنځیالمساوات

تراوسه مو معلوم الجبري او ترانسځندنت مساواتو نامعلومي لوي تر یوې برخې د توپیري پوتنځونو سره لکه $x , y\ z^2 , a^3$ او داسې نور ، لرودي.
که د مساواتو دا نامعلومي یا ناپیژندلی لویي فنکشنونه او د هغې رابیلدنې یا دفرنځیالویشنه یامشتقونه وي، نو دلته د یوه دیفرنځیالمساوات څخه غږیدنه ده یا خبرې دي. د دې مساوات اوبې یاحل ستونځې لري، په ډیرو حالتونو کې حتی شمیرنیز ناممکن دی.
د دې ورې برخې په دننه کې کیدی شي ، چې یواځې یوه پیلونه ورکړل شي، د یوځو'په تخنیك کې، دمهمو کاروونو یا استعمال سره.
یادونه: دلته څه نومونه چې راځي د هغو سره باید لوستونکی بلد وي. او که چیري داسې نه وه، نو دا تر زیاته حده ځما د مخه تیرو کتابونو کې راوړل شوي، که هغه هندسي کلیمې وي اوکه شمیرپوهنیزې.که پوه شوم، چې کومې کلیمې ځما په تیرو کتابونوکې روښانه نه دې تعریف شوي، وبه هڅیږم، چې داکار دلته روښانه کړم.
ګران لوستونکی به په دې پوهیږي، چې کوم شیان د ژباړونکي دي،که په روښانه توګه مې ګوته لك نه کړل.

۱ . ۱ بنسټکلیمې

۱ . ۱ . ۱ تعریفونه (پیژندنې)

تراوسه پورې : لاندې مساوات توپیر شوي دي.
ټاکنمساوات:

(c) ketabton.com: The Digital Library

– الجبري ريشنل مساوات. $y = 2x^2 + 2x + 5x - 7 = x^2 - 3$

– الجبري ایریشنل مساوات. $\sqrt{3x^2 - 1} = x^2$

– ترانسځندنت مساوات. $y = \sin x \,;\; y = e^{2x+1} = 2x$

فنکشنمساوات

هر $x \in D(f)$ په یواځنی یو $y \in R$ تنظیمیږي.

$$y = 2x^2 + 5x - 7 \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow f = < f \to f(x) >$$
$$y + 2x = y' . x^2 - y'' \Rightarrow f = < x \to f(x)\,,\, f'(x), f''(x)>$$
$$\Rightarrow y = f<x,y',y''>$$

دفرنځیالمساوات، په کومو کی، چی د بلواکو اوبښتوني y یواځی خپلواکی اوبښتونی x اود هغه رابیلیدنی لکه

$$dy / dx = y' \,;\, d^2 y / dx^2 = y'', \dots ,$$

رامنځ ته کیږي، بلد یا عادي دیفرنځیالمساوات بلل کیږي.

د دیفرنځیالمساوات ټولیزه بڼه :

- $y = 3y' + 2x \cdot y'' + 4$
- $y'^2 + x \cdot y^2 = 4$
- $y''' + y'' + y' = e^x$
- $x \cdot y' = y'' \cdot y$
- $x \cdot y + x \cdot y' + x \cdot y'' + x \cdot y''' = 0$

که د دیفرنځیالمساوات ناپیژندونکی د ډیرو اوبښتونکو فنکشنونه وي، نو د پارشل – یا ټوټه دیفرنځیال مساواتوڅخه غږیږو.

$$x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} - 3 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = y$$

د دي ټولیزه بڼه یا فورم

$$0 = f\left(x; y; z; \frac{\partial y}{\partial x}; \frac{\partial y}{\partial z}; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \dots ; -\right)$$

د 1.,2.,...,n (یعنی، لمړي، دوم، ... او n–ام) نظم دیفر– نځیالمساواتو ترمنځ توپیر کوو

د ۱ –ام نظم دیفرنځیامساو $4y - dy / dx + y^2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲. – ام نظم د.م $3x^2 + y^2 = d^2y / dx^2 = y''$

. د ۳ –ام نظم د.م $y''' - 3y = y'' + y'$

دلته په دیفرنځیالمساوات کی هغه لوړدیفرنځیالکوځینت یا لوړه رابیلیدنه یا دیفرنځیالویش د دیفرنځیالمساوات نظم ورکوي .

د دفیرنځیالمساوات یو بل د توپیرولویا فرقکولو امکانات په درجه یا گراد Grad کی ورکړ شوي دي.د دفیرنځیالمساوات گراد د دیفرنځیالمساوات د زیاتوونو له لاري ټاکل شوی دی، په کوم کی چی د بلواکو اوبشتونکو یا واریابلو د ځکیو یا لوړیو یا اکسپوننتونو او د دیفرنځیالویش هغه زیاتون چی د ټولو لوي وي.

۱ . درجه $y''' - 3x^2 + y = 0$

۲. . درجه $x^4 y' . y''^2 y'' + y - x^2 = 0$

۳ . درجه $y . y''^3 + y'' . x^8 = y$

۴ . درجه $y - y^2 y''^4 - y' = 0$

بلد دفرنځیالمساوات

د ۱ . نظم او ۳ . درجی $4x^5y^2 + 2y . y'^3 . \cos x - 5y + 7 = 0$

بلد یا ساده (عادي) دفرنځیالمساوات

۲ . نظم او ۱ . درجه $y . y'' + 4x . y' - y = 0$

۱ . ۱ . ۲ د دیفرنځیالمساواتو اوبیونی یا حلونه

د دفرنځیالمساوات اوبیونه یو فنکشن دی او زیات وخت د دفرنځیالمساوات اینتیگرال هم بلل کیږي، ځکه، چی په بنسټیزه توگه رابیلیدنی د اینتیگرال له لاري لاس ته راځي د دیفرنځیال مساوات د اوبیو یا حلونولاندي په مساواتو کی منځ ته راغلو، د دفیرنځیالونو او دیفرنځیالکوشنتونو د له منځه وړل دي، دا په دي مانا چی د ورکړشوو رابیلیدنو څخه باید په هغه اړه فنکشن مساوات راپیدا کړی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه: دیفرنځیالمساوات ; $x/2 - y' = x$

$$dy / dx = y' = -x/2$$

$$dy = -(x/2).dx$$

د رابیلیدنو د له منځوړنه په بنستیزه توګه د اینتګرال له لارې پیښیږي یا صورت نیسی. د دیفرنځیالمساواتو اوبی یا حل له امله د هغه اینتګرال او یا هم د هغه بنستمساوات بولو.

$$\int dy = -(1/2) \int x.dx$$

اوبی (حل) $y = -(1/4)\, x^2 + C,\ C \in R$

د فنکشنمساوات $y = (x)$ څخه د اوبیفنکشن لاس ته راځي

$$f = < x \longrightarrow -(1/4)\, x^2 + c >$$

یادونه :داسی پورته مات نوکان >, < دې بیا لږ لوي ولیکل شي، زه یی په بل ډول امکانات نه لرم.

ازمایښت:

که د اوبیوني فنکشن $y = -(1/4)\, x^2 + c$ څخه لمړی رابیلیدنه جوړه شي او د $y' = -x/2$ لپاره ترم د ازمایښت لپاره په سر– یا پیل دفرنځیالمساوات کی کیښوول شي، نو دا به د فنکشن د دفرنځیالمساوات د ټولو توکو لپاره یو کټمټ یا ایدنتیك مساوات شي

$$\frac{x}{2} - y' = x \ \blacktriangleright\ y = -\frac{1}{4}x^2 + c$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{4}\cdot 2x$$

$$= -\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right) = x$$

$$x = x$$

(دا یی په بل ډول لیکندود) دیفرنځیالمساوات اوبی

$$y = -(1/4)x^2 + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ازمايښت لپاره نتيجه بيرته ديفرنځياليږي يا رابيليدنه نيول کيږي. دا نتيجه د دفيرنځيالمساوات سره سرخوري.

$$dy / dx = - x / 2$$

ګورو، چې بيرته په دې توګه ديفرنځيالمساوات لاس ته راغی.

بيلګه: د ديفرنځيالمساوات

$$2x + dy / dx = 0$$

اوبې يا حل سره. لکۀ څنګه په ټولو اينتيکرالولو کی يوه ثابت C رامنځ ته کيږي.

$$y = - x^2 + C$$

د دفرنځيالمساوات اوبيونی يا حلونه کيدی شي، چی پۀ درې ډلو وويشل شي.

۱ – ټوليز اوبې

د دفرنځيالمساوات اوبی يا حل کی ، لکه په هر اينتيکريشن کی يوه اينتيکريشن ثابته c رامنځ ته کيږي.

که د ديفرنځيالمساوات په اوبی کی ثابته نزدې نه ټاکل کيږي، نو لاس ته راوړی حل د دې دفيرنځيال مساوات ټوليز اوبی او يا د دې ديفرنځيالمساوات ټوليز اينتګرال بلل کيږي.

بيلګه :

دفرنځيالمساوات $y' = 1 / 2$

$$\Rightarrow \quad y = (1 / 2) \quad dx$$

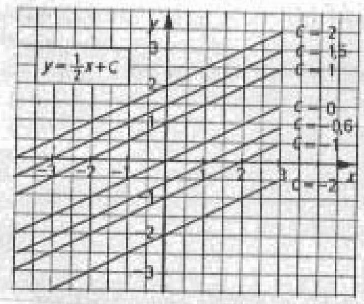
$$= (1 / 2)\, x + c$$

ټوليز دفرنځيالمساوات $f = \langle x \to (½)x + c \mid c \in R \rangle$

د يوه ديفنځيالمساوات ټوليز حل د کږو د کودې(د هغو کږو ډله، چی يو له بل سره غبرګی خغلي) په ځير په ګراف کيانځوريدلی شي .

دلته ناپايډيرې اوبيونی ممکن دي، ځکه چی ثابته هر په خوښه ارزښت نيولي شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره

۲ – پارتیکیولر–یا ځانګړې اوبیونه partikuläre Lösung

یا برخه ئیز– یا د یوې یوې برخي اوبیونه

که د ورکړشوي دیفرنځیال مساوات لپاره نور ورزیات ټاکلي شرایط ورکړ شوي وي، نو کیدی شي، چې د اینتګریشن ثابته C وشمیرل شي.

بیلګه:

دیفرنځالمساوات $y' = 1/2$

ټولیزمساواتفنکشن $\Rightarrow f = < x \longrightarrow (½)x + c, c \in R >$

ټولیز اوبی $y = (1/2)\,x + c \;, c \in R$

که دc د شمیرلو لپاره نور ورزیات شرطونه $y_1 = 2$، $x_1 = 1$ وي

بدلون یا اړونه $y_1 = (1/2)x_1 + C$

ارزښت ځاي په ځاي کړی $C = y - (1/2)x$

$C = 2 - (1/2).1$

$\Rightarrow C = 1{,}5$

ارښت کیږدی

پارتیکیولار اوبی $y_1 = (1/2)x_1 + 1{,}5$

$\Rightarrow 2 = (½).1 + c \Rightarrow c = 1{,}5$

له دې د دیفرنځیالمساواتو پارتیکولاراوبی لاس ته راځي.

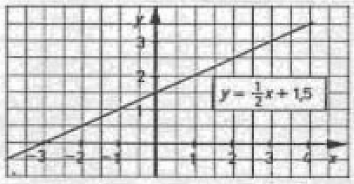
(c) ketabton.com: The Digital Library

د c = 1 , 5 سره له ټولیز اوبیفنکشن f څخه ټوټه اوبي–فنکشن f_1 لاس ته راځي.

ټوټه اوبیفنکشن $f_1 = < x \longrightarrow (½)x + 1{,}5>$

د پارتیکولار اوبي په ګراف کې د کرښو د کودي څخه یوه ټاکلی کرښه بنایي

د c = 1,5 حالت لپاره.



په تخنیکي پرابلمونوکی زیات وخت پارتیکولار اوبیونو یا حلونو ته اړتیا پیښیږي.

۳ – زینګولار اوبیونی singuläre Lösungen

دا لاندې دیفرنځیالمساوات دي ورکړ شوي وي

$$y^2 + y'^2 = 1$$

دا هلته پوره کیدونکی دی ،که ونیول شي

$$y = \sin(x+C)$$

دا اوبیونی د الجبري شمیرنی له لاري لاس ته نه شي راتللی

بیلګه : د حرنځیا لمساوات

$y^2 + y'^2 = 1$ ▶ *Differentialgleichung*

$f = \langle x \mapsto \sin(x+c) | c \in \mathbb{R} \rangle$ ▶ *angenommene allgemeine Lösungsfunktion*

$\Rightarrow y = \sin(x+c)$

نیول شوي ټوټیز اوبیفنکشن

ازماینښت

$$y = \sin(x+c) \Rightarrow y^2 = \sin^2(x+c)$$
$$\Rightarrow y' = \cos(x+c) \Rightarrow y'^2 = \cos^2(x+c)$$
$$y^2 + y'^2 = 1$$
$$\Rightarrow \sin^2(x+c) + \cos^2(x+c) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازمایښت د نیول شوي اوبي رتینښتینوالی تصدیقوي

دا ځنی دفرنځیالمساوت د دې تر ځنګ نورې اوبیونی هم لري،   کومی چی په ریښتونی دیفرنځیالمساوات پوره کوي، مګر له دې پیدا ټولیز اوبی یا حل ځځه رابیلیدوړ نه دی.

د ټولیزې اوبیونی $y = \sin(x + c)$ تر ځنګ دفرنځیالمساوات د فنکشنونو

$f_1 = < x \longrightarrow 1 >$ او $f_2 = < x \longrightarrow -1 >$

سره هم پوره کیږي.

دا اوبیونی یا حلونه زینګولار بلل کیږي. دا د یوه ټولیز حل د کږوکرښو د کودو هندسي پوښ انځوروي.

د دواړو زینګولار حلونو دا لاندې هندسي انځورونه د دوه کرښو په ځیر ښايي، چی د x –محور سره غبرګی ځغلي. کومی چی ټولیز یا عمومي اوبی یا حل $\sin(x + C)$ پوښوي یا پټوي.

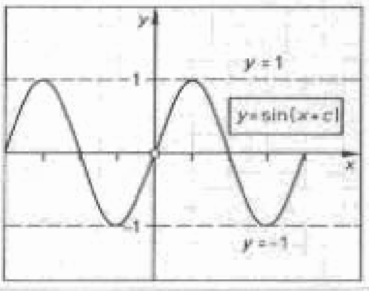
$$y^2 + y'^2 = 1$$

$$y_1 = 1;\ y_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1^2 + (0)^2 = 1$$

$$y_2 = -1;\ y_2' = 0 \Rightarrow (-1)^2 + (0)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_1 = \langle x \mapsto 1 \rangle \\ f_2 = \langle x \mapsto -1 \rangle \end{array}\right\} \textit{singuläre Lösungen}$$

زینګولار اوبیونې
یا حلونه



د دیفرنځیالمساواتو زینګولار حلونه د کم اهمیت دی یا د کم غوروالی دي. د دې کتاب په چوکاټ کي به د دې په پیلونو یا کارونو تیریدنه وشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اوبیونی متودونه

د دیفرنخیالمساوات اوبیونی اصلاً د اینتیگرالشمیرنی له لارې صورت نیسي.
د لاندې بیلگو سره دې د ممکنه حلونو لمړی تصور یا خیال رامنځ ته شي.
بیلگی : د لاندې دیفرنخیالمساواتو ټولیز اوبیونی (حلونه) پیدا کړی!

1 . $y' = 4x$

بڼه بدلون : $dy / dx = 4x$

یواځې د لمړي نظم دیفرنخیالکوخینت یا دیفرنخیالویش مخ ته پروت دی، نو
د dy پسی برابریږي یا ترتیبیږي او اینتیگرالیږي.

اینتیگرالونه $dy = 4x\, dx$.

$$\int dy = 4 \int x.dx$$

$$y = 2x^2 + c, c \in R$$

$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow 2x^2 + c \mid c \in R \rangle$$

2 . که ډیر اینتیگرالونه لاس ته راځي، نو د اینتیگرالثابتی c_1 او c_2 و یوې
ثابتی c ته سره رایوځای کیږي.

$$y' = 8x^3 - 2x^2$$

$$y = 8 \cdot \int x^3\, dx - 2 \cdot \int x^2\, dx$$

$$= 2x^4 + c_1 - \frac{2}{3}x^3 + c_2$$

$$= 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c; c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c \middle| c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

۳ . د یوه بلد ۲ . نظم دفرنخیالمساوت لپاره د دوه واره اینتیگرالولو له لارې
اوبیونه پیدا کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y'' = x^2 \Rightarrow (y')' = x^2$$

$$y' = \int x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + c_1 ;\ c_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{1}{3}\int x^3\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$= \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2 ;\ c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{12}x^4 + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

په ټوټه اینتیګرالونه کی هم دوه اینتیګرالثابتي پیداکیږي، کومی چی د ټوټه اوبی سره د ورکړشوو شرایطو له مخی باید وټاکل شي

۴ . په دفرنځیالمساوات کی $y' = dy / dx$ اینسوول کیږي او له dx سره ځلیږي

بیا دا بدلونښه په دواړو خواوو اینتیګرالیږي.

وریسی دواړه د اینتیګرالثابتی c_1 او c_2 و $c = 2(c_2 - c_1)$ ته سره را یوځای کیږي. (دي ته دې په شمیر پوهنیزه برخه کی پاملرنه وشي، ما د تخنیکي ستونځو له امل بل ډول نه شوې لیکلی)

$$y \cdot y' = \cos x$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$y \cdot dy = \cos x \cdot dx$$

$$\int y\,dy = \int \cos x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \sin x + c_2$$

$$y^2 = 2 \cdot \sin x + 2(c_2 - c_1) \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c$$

$$y = \pm\sqrt{2 \cdot \sin x + c};\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt{2 \cdot \sin x + c} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

۵ . اینسول کیږي $y' = dy / dx$ او دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي.

وریسی د دفرنځیالمساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي او بیا ثابتی c_1 , c_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

او c_3 و يوې ثابتې c ته سره راټوليږي يا رايوځاي کيږي.
که دواړو لورو ته وريسی مربع تکميلونه ۱ ور زياته شي نو y شميرل کيدی شي، او لاس ته راغلی f ټوليز اوبی دی.

$$y' \cdot y = y' + x$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot y = \frac{dy}{dx} + x$$
$$y \cdot dy = dy + x \cdot dx$$
$$\int y\, dy = \int dy + \int x\, dx$$
$$\frac{y^2}{2} + c_1 = y + c_2 + \frac{x^2}{2} + c_3$$
$$y^2 - 2y = x^2 + 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1)$$
$$\blacktriangleright\ 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1) = c$$
$$y^2 - 2y = x^2 + c$$
$$y^2 - 2y + 1 = x^2 + c + 1$$
$$(y - 1)^2 = x^2 + c + 1$$
$$y - 1 = \sqrt{x^2 + c + 1}$$
$$y = \sqrt{x^2 + c + 1} + 1;\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt{x^2 + c + 1} + 1 | c \in \mathbb{R} \rangle$$

په ياد ولری

۱ – ديفرنځيالمساوات په ټوليزه توګه ټوليز، پارتيکيولار او په ورکړ شوي حالت کي زينګولار اوبيونی يا حلونه لري.

۲ – ديفرنځيالمساوات په مناسب يا ورته شميرنيز کاروني له لارې په زياتون– حالتونو کی د اينتيګرال له لارې اوبي کيږي.

۳ – زيات وخت بايد چي اوبي ونيول شي او دا اوبی بيا د هغه د ريښتينوالی لپاره و ازمايل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۱ ته تمرینونه

لاندې ساده دفرنځیالمساوات اوبې یا حل کړی

1 . $y'' = x \cdot e^x$ 2 . $y'' - x = 0$ 3 . $2y' - \cos x = 0$
4 . $x \cdot y'' = 3y'$ 5 . $y \cdot \ln x = x \cdot y'$ 6 . $y' \cdot y + y' + x = 0$
7 . $y' - x^2 = 3e^x$ 8 . $\sin x - e^x = y'$ 9 . $y' \cdot y = x + 1$
10 . $y' \cdot y^2 = y' - x^2$ 11 . $dy / dx - 3x = e^x$
12 . $y' - x^2 = x^2 - y'$ 13 . $dy / dx + \cos x = 1$
14 . $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$ 15 . $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$ 16 . $e^x \cdot y' = y$
17 . $y'' = 7x^3$ 18 . $d^2 y / dx^2 = \sin x$
19 . $3x - y'' = a$ 20 . $y'' = y'$ 21 . $y'' = x \cdot \cos x$

۱ . ۲ د لومړي نظم دیفرنځیالمساواتونه

د لمړي نظم دیفرنځیالمساواتونه داسی پیژندل کیږي، چی یواځی لمړی رابیلیدني y' او یا د y' په توانونه لکه y'^2, y'^3 رامنځ ته کیږي.
د دې ترڅنګ کیدی شي x او y همداسی د دوي توان رامنځ ته شي بیلګي :

$$y' + x^2 = 3y^2 + 3y$$
$$y \cdot y' = y'^2 - x^2 + x - 1$$

تولیز : $y' = f(x,y)$

د y', y او x موجودیت او لویوالی تنظیموني پسی د دفیرنځیالمساواتو مختلف ډولونه توپیریدلی شي. د لته به د دې مهمو باندې لنډې خبرې وشي.

۱ . ۲ . ۱ دیفرنځیالمساوات د بیلوشوو اووښتونو سره

دیفرنځیالمساواتو د بیلو یا جودا اووښتونو یا واریابلو سره، هغه مساوات په نخښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیږي، په کوموکي چې ممکن وي،چې لویي dy , $g(y)$ په همدې توګه $f(x)$, dx هر یو یې په یوه لور بیل یا ځانلهٔ کړو.

د دې اړونی سره کیدی، چې مساوات په دواړو خواوو ایتګرال شي.

بیلګه؛

$$y' \cdot y^4 = x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y^4 \cdot \frac{1}{y} = x^2$$

$$dy \cdot y^3 = x^2 \cdot dx \;\blacktriangleright\; y^3 = g(y);\; x^2 = f(x)$$

$$\int y^3\, dy = \int x^2\, dx$$

۱ . دفرنځیالمساوات د y^2 او dx سره ځلیږي. بیا کیدی شي ، چې د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال شي د y^3 پسی اوبیونی له امله ثابتی $3.(c_2 - c_1)$ و ثابتی c ته راغونډیږي(دا پورته ټول په لاندي بیلګه کی روښانیږي).

دلته f غوښتونکی اوبیفنکشن یا حلفنکشن دی.

بیلګه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \;\blacktriangleright\; x^2 = f(x);\; y^2 = g(y)$$

$$y^2 \cdot dy = x^2 \cdot dx$$

$$\int y^2\, dy = \int x^2\, dx$$

$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_2$$

$$y^3 = x^3 + 3(c_2 - c_1) \;\blacktriangleright\; 3(c_2 - c_1) = c$$

$$y^3 = x^3 + c$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + c}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + c} \,|\, c \in \mathbb{R} \rangle$$

۲ . د دې لپاره ، چې د $g(x) = y - 4$ د dy سره او x د $f(x) = x^2$ سره رایوځایونه لاس ته راوړای شو. نو دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي او x^2 سره ویشل کیږي. *

(c) ketabton.com: The Digital Library

وریسی له دې سره dy او g(y) همدا ډول dx او f(x) هر یو په یوه خوا خانلۀ کیږي. د کوم سره چې dx او dy باید په مات باندې کې پراته یا ځاي وي. **
د مساوات دواړه خواوې ایتیګرال کیږي. د اینتیګرالثابتې c_1 او c_2 و c_3 ته راغونډیږي.
دا راپیداشوی فنکشن د y په لور اوبی کیږي. د e^C لپاره c اینسوول کیږي.***
اوf د دفرنخیالمساوات ټولیز اوبی دی****

یا دونۀ : لاندې د شمیرنی په برخه کی په * پسی* ... ،او** پسي ***...
په **** پسي **** راځي.

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - y + 4 = 0$$ *

$$x^2 \cdot dy - y \cdot dx + 4 \cdot dx = 0$$

$$dy - \frac{y \cdot dx}{x^2} + \frac{4 \cdot dx}{x^2} = 0$$

$$dy - \frac{dx}{x^2}(y-4) = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} - \frac{dx}{x^2} = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} = \frac{dx}{x^2}$$ **

$$\int \frac{dy}{y-4} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \ln|y-4| + c_1 = -\frac{1}{x} + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$ ***

$$y - 4 = e^{c_3 - \frac{1}{x}}$$

$$y = e^{c_3} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c$$

$$y = c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4$$

$$\Rightarrow f = \langle x \cdot - c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 | c \in \mathbb{R} \rangle$$ ****

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیفرنخیالمساوات د جلا یا بیلو شوواووبښتونو سره، ځان په دې ګروپونو توته کوې

۱ – د لاندې فورم مساوات

$$y' = f(x)$$

دا فورم همغه ورسره بلد د تمرینورکونی وظیفه ورکوي، لکه

څنګه، چی په اینتیګرالشمیرنه کی.

بیلګه :

$$y' = x^2$$

بدلونه $dy / dx = x^2$

اینتیګرالونه $dy = x^2 \, dx$

$$y = \int x^2 \, dx$$

تولیز اوبی $y = (x^3 / 3) + C$

دلته f تولیز حل دی $\Rightarrow f = < x \to (x^3 / 3) + c \mid c \in R >$

۲ – د لاندې فورم مساوات $y' = g(y)$

اووبښتونی dy او $g(y) = 3y^2 + 1$ په همدې توګه dx هر د مساوات په یوه خوا

خانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي، د کوم سره چی د مخامخ بنې $\int \frac{dz}{z^2 + 1}$

اینتیګرال پخوا اوبی شویدی..

بیلګه (یادونه : دا بیلګه لکه چی ناربښتیا اوبی وې، پام ورته وکړی،؟؟.)

$$y' = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{3y^2 + 1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{3y^2 + 1} = \int dx$$

$\ln \left| \frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} \right|$ کیږ لور ته خانله کیږي په داسی توګه، چی د اینتیګریشنشابته

(c) ketabton.com: The Digital Library

بني خوا ته راوړل شي او مساوات د $2\sqrt{3}$ سره ځل شي.

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|+c_1=x+c_2$$

$$\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|=2\cdot\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)$$

د لوګاریتم د اوبیونی سره په بني لور اکسپوننشلفنکشن لاس ته راځي، کوم چې په يوه ځل توپه کيدی شي.

د سادوني لپاره تاکل کيږي

$$c=e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

بيا د $(3y-\sqrt{3})$ سره ځل کيږي او بالاخره مساوات د y سره کيڼ لور ته راوړل کيږي همداسی $\sqrt{3}$ و بني خوا ته.

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}=c$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=(3y-\sqrt{3})\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

د y نوکوتلو وروسته د دفرنځيالمساوات د تولیز اوبیونی فنکشنمساوات لاس ته راځي

$$3y-3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c=-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}$$

$$3y(1-e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c)=-\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1)$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1}{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-1};\ c\in\mathbb{R}$$

۳ . د $y'=f(x).g(y)$ بني مساوات

د فرنځيالمساوات د بيليدنی وروسته اينتيګراليږي.

د y پسی اوبیونی وروسته ږدو

$$e^{c_2 - c_1} = c$$

وریسی بیا f تولیز یا عمومي اوبی دی

بیلګه :

$$y' = 4x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = 4x^2 \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \int x^2 dx$$

$$\ln|y| + c_1 = \frac{4}{3} x^3 + c_2$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3 + (c_2 - c_1)}$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright e^{c_2 - c_1} = c$$

$$y = c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3} | c \in \mathbb{R} \rangle$$

.

۴ – د $y' = f(x) / g(y)$ بنې یا فورم مساوات اووبښتونی y , dy او x , dx دوه لوریز خانله کیږي.

$$y' = x / y$$

$$dy / dx = x / y$$

$$=> \quad y\,dy = x\,dx$$

بیا د مساواتو داوړه خواوې اینتیګرالیږي او د y پسی اوبی کیږي.

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$(1/2)\,y^2 + c_1 = (1/2)\,x^2 + c_2$$

ږدو $2(c_2 - c_1) = c$

$$y^2 = x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x^2 + c}$$

دافنکشن f د دفرنځیالمساوات تولیز اوبی یا حل دی

$$=> \quad f = \langle x \longrightarrow x^2 + c \mid c \in R \rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د لاندي فورم مساوات

$y' = g(y) / f(x)$

اووبنتونی y او dy . y او dx , x په دواړو خواوو ځانله کیږي . او په اخر کی دو خواوي اینتیګرالیږي او په y پسی اوبی کیږي.

هغه لاس ته راوړي اینتیکریشنثابتی ږدو: $c_2 - c_1 = \ln|c|$

$y' = y / x \;;\quad dy / dx = y / x$

$\int dy / y = \int dx / x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| + c_1 = \ln|x| + c_2$

$\ln|y| = \ln|x| + c_2 - c_1 \quad , c_2 - c_1 = \ln|c|$

$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$

$\ln|y| = \ln|x.c|$

$y = x.c$

$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow x.c \mid c \in R >$

دا لاس ته راغلی f تولیز حل دی

بیلګی

1 . $y' - 3x = -4x^2$

$dy / dx = 4x^2 + 3x$

$y = 4. \int x^2\, dx + 3. \int x\, dx$

$y = (4/3)\, x^3 + c_1 + (3/2)\, x^2 + c_2$

ږدو $c_2 + c_1 = c$

$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow (4/3)\, x^3 + (3/2)x^2 + c >$

دا f د مساوات تولیزه ابیونه ده

۲ . $\sin x - y' = \cos x + y'$

$\sin x - dy / dx = \cos x + dy / dx$

$2dy = \sin x \,.\, dx - \cos x \,.\, dx$

$y = (1/2) \int \sin x\, dx - (1/2) \int \cos x\, dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = -(1/2)\cos x + c_1 - (1/29 \sin x + c_2$$

پردو: $c_1 + c_2 = c$

$$=> \quad f = < x \longrightarrow -(1/2)\cos x - (1/2)\sin x + c >$$

3 . $\quad 2.y' = 2y^2 + 8y - 2$

مساوات د مربعتکمیلولو له لارې په فورم $(z+a)^2 - b^2$ راوړل کیږي

$$y^2 + 4y - 1 = (y^2 + 4y + 4) - 4 - 1$$
$$= (y-4)^2 - (\sqrt{5})^2 \quad \Rightarrow \int \frac{dz}{(z+a)^2 - b^2}$$

دا لاندې اینتیګرال د مخه اوبی شوی دی

$$\int [(1/(z+a)^2 - b^2] dz$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 4y - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (y+2)^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$\frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}}\right| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln\left|\frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}}\right| = 2\sqrt{5}\cdot x + 2\sqrt{5}(c_2 - c_1)$$

$$\ln z = a <=> z = e^a$$

$$\Rightarrow \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} = e^{2\sqrt{5}\cdot x} \cdot e^{2\sqrt{5}\cdot(c_2 - c_1)}$$

پردو $e^{2\sqrt{5}\cdot(c_2 - c_1)} = c$. بیا د $y + 2 + \sqrt{5}$ سره خلیږي، وروسی هغه غړی، چې y لري د مساوات یوې لور ته ځانله کیږي او y له نوکانو راوخي، دا د y په لور اوبي – یا حل کیږي، چې په دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه ټولیز اوبی لاس ته راځي .

$$y=\frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}+\sqrt{5}-2}{1-c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}}$$

$$\Rightarrow f=\left\langle x,-\frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}+\sqrt{5}-2}{1-c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}}\right\rangle$$

بیلګه ۴ : $y' = y$

د $x = 0$ لپاره $y = e$ دی

غړی $g(x)$ او dy د مساوات په یوه لور بیلیږي. په اخر کې دواړه خواوې اینتیګرال کیږي.

$$dy / dx = y$$
$$dy / y = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1 / y)\, dy = \int dx$$

$$\ln| y | + c_1 = x + c_2$$
$$\ln|y| = x + (c_2 - c_1) \ , \ \ c_2 - c_1 = c$$
$$\ln|y | = x + c$$
$$y = e^{x + c}$$

د y په لور اوبیونه ټولیز اوبی f ورکوي

$$\Rightarrow f = < x \longrightarrow e^{x + c} >$$

ثابته c د شرایطو $x_1 = 0$ او $y_1 = e$ څخه لاس ته راځي.

$$c = \ln| y | - x$$
$$= \ln e - 0 \ = 1$$

دلت $c = 1$ او f_1 ټوټه ئیزه اوبیونه ده.

$$\Rightarrow f_1 = < x \longrightarrow e^{x + 1} >$$

بیلګه ۵ . $x. |y = x - 1$

ورزیات شرایط : د $x_1 = 0$ لپاره دي $y_1 = 10$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دفرنځیالمساوات د پسی اړول کیږي او مات یا کسر په برخه ماتونو توټه کیږي.
د دي برخمساواتو اینتیګرالونی وروسته د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبیونه یا حل لاس ته راځي

ږدو $c_1 + c_2 + c_3 = c$

اوبی

$$x \cdot \sqrt{\frac{dy}{dx}} = x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

$$dy = \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx$$

$$\int dy = \int dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$y = x + c_1 - 2 \cdot \ln|x| + c_2 - \frac{1}{x} + c_3$$

$$y = x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c \right\rangle$$

وریسی د اینتیګرال ثابته C د شرایطو $x = 2 ; y = 10$ ځای په ځاي کولو څخه شمیرل کیږي.

$$c = y_1 - x_1 + 2.\ln|x_1| + 1/x_1$$

ږدو $x_1 = 2,\ y_1 = 10$

$$= 10 - 2 + 2.\ \ln 2 + 1/2 \ = 9,8863$$

بیا د c ارزښت په ټولیز اوبی کی ځاي په ځاي کیږي او په دې توګه پارتیکوالار اوبی لاس ته راځی.

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + 9,8863 \right\rangle$$

بیلګه ۶ : $y'^2 = 1 - x^2$

شرایط: د $x = 1$ لپاره $y = 0$ دی

د دفرنځیالمساواتو ریښه(جذر) وځي یا نیول کیږي او د y په لور اوبی کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(dy / dx)^2 = 1 - x^2$$
$$dy / dx = \sqrt{1 - x^2}$$
$$dy = \sqrt{1 - x^2} . dx$$

په لاندې کې راغلی اینتیګرال $\int \sqrt{1 - x^2}\ dx$ د مخه اوبې شوی دی. دا اینتیګریشن مو بیا ټولیز اوبیونی ته بیایي.

$$\int dy = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$
$$y = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\,\text{Arcsin}\, x + c$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\,\text{Arcsin}\, x + c \right\rangle$$

د c ثابته د شرایط $x_1 = 1$ او y_1 د اینبوولو له لارې شمیرل کیږي.
که $c = -\frac{\pi}{4}$ په f کې کیږدو، نو f_1 پارتیکولار اوبیونه لاس ته راځي

$$c = y_1 - \frac{x_1}{2}\sqrt{1 - x_1^2} - \frac{1}{2}\,\text{Arcsin}\, x_1 \blacktriangleright x_1 = 1,\ y_1 = 0$$
$$c = 0 - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$c = -\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\,\text{Arcsin}\, x - \frac{\pi}{4} \right\rangle$$

بیلګه ۷ : $y' = y.[x / (x^2+1)]$

اوس dy , y او $f(x) = x / (x^2 + 1)$, dx د دفرنځیالمساوات په دواړو خواو کې ځانله کیږي.
د مساوات دواړه خواوی اینتیګرال کیږي او بیا د y پسی اوبې یا حل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dy / dx = y.[x /(x^2+1)]$$

$$dy / y = [x / [x^2 + 1)] .dx$$

$$\int dy / y = \int [x / (x^2+1)] .dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\ln|y| = (1/ 2) \ln(x^2+1) + C$$

د اینتیګرالثابتو c_1 او c_2 يوځايونه و $c_2 - c_1 = \ln | c |$ ته هدفمند دی

$$\ln|y| = \ln \sqrt{x^2+1} + (c_2 - c_1) , \; c_2 - c_1 = \ln |c|$$

$$\ln | y | = \sqrt{x^2 + 1} + \ln | c |$$

$$\ln | y | = \ln| \sqrt{x^2 + 1} . c |$$

$$y = \sqrt{x^2 + 1} . c$$

او لاندې f تولیز اوبیفنکشن دی

$$=> \quad f = < x \longrightarrow c\sqrt{x^2 + 1} >$$

بیلګه ۸: $y ' = [(x^2 - 4) / x^2]. \quad 1 - y^2$

ور زیات شرطونه: د $x_1 = 1$ لپاره $y_1 = 1$ دی

او $dy , g(x)$ او $dx , f(x)$ د مساوات په دواړو لورو ځانله کیږي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-4)\sqrt{1-y^2}}{x^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{(x^2-4)\cdot dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx - 4 \cdot \int \frac{dx}{x^2}$$

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي، د دواړو اینتیګریشنثابتو c_1 او c_2 , c_4 زیاتون د سره c مساوي لیکل کیږي: $c_2 - c_1 - c_4 = c$

$$\text{Arcsin } y + c_1 = x + c_2 - 4[- (1 / x) + c_3]$$

$$\text{Arcy} = [(x^2 + 4) / x] + c$$

$$y = \sin [((x^2 + 4) / x) + c]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې په اخر کې ټولیز اوبی f لاس ته راځي

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + c\right)\right\rangle$$

ثابته c د ورکړ شوو شرایطو څخه پیداکیږي، داسې ، چې x_1 او y_1 د فنکشن-مساوات په ټولیز اوبی کې ځای په ځاي شي.

په دې توګه وروسته ټوټه اوبیونه f_1 لاس ته راځي

$$c = \operatorname{Arcsin} y_1 - \frac{x_1^2+4}{x_1} \quad \blacktriangleright x_1 = 1, \; y_1 = 1$$

$$= \operatorname{Arcsin} 1 - \frac{1^2+4}{1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 5$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + \frac{\pi}{2} - 5\right)\right\rangle$$

بیلګه ۹ : $x^2.y^2 + y^2 + x.y^3.y' = x.y.y'$

دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي اوپه $x.y^2$ ویشلکیږي.

غړي د x , dx سره په یوه خوا او د y , dy سره په بله خواځانله کیږي. انتیګریشن د اوبی په څیر یو ایمپلیځیت د فنکشن مساوات ورکوي، کوم ، چې ایمپلیځیت نه شي انځوریدلی وروسته ږدو $c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$

$$x^3 \cdot y^2 + y^2 + x \cdot y^3 \cdot \frac{dy}{dx} - x \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^3 \cdot y^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx + x \cdot y^3 \cdot dy - x \cdot y \cdot dy = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} + y \cdot dy - \frac{dy}{y} = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} - y \cdot dy$$

$$\int x^2\,dx + \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} - \int y\,dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x^3}{3} + c_1 + \ln|x| + c_2 = \ln|y| + c_3 - \frac{y^2}{2} + c_4$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + c = 0$$

بیلگه ۱۰ : dx - dy = / dy / y) + [(4.dx)/ (4 + x)]

د x , dx او y , dy ځانلونی وروسته د دفرنځیالمساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي د اینتیګریشنثابتي، کیدی شی سره رایوځاي شي، اوبی اکسپلیځیت نه شي انځوریدي

$$dx - \frac{4 \cdot dx}{4 + x} = \frac{dy}{y} + dy$$

$$\int dx - 4\int \frac{dx}{4 + x} = \int \frac{dy}{y} + \int dy$$

$$x + c_1 - 4 \cdot \ln|4 + x| + c_2 = \ln|y| + c_3 + y + c_4$$

$$\blacktriangleright\ c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$$

$$x - 4\ln|4 + x| = \ln|y| + y + c$$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساواتد هوموجینو اوونبتونکو یا واریابلو سره

د هوموجینو اووښتونکو سره دیفرنځیالمساوات په هر غړي کی یو دیفرنځیال dx یا dy لري.
د واریابلوx او y د اکسپوننتو یا په جګګنونو زیاتون د مساواتو په هر غړي کی برابر لوي دی.
دیفرنځیالمساوات د هوموجینواووښتونکو سره دSubstitution سبستیچیوشن یا (د) په ځاي اینبوونی یا بدلون له لارې خان اوبیوني یا حل ته پرېږدي، په کوم کي چی $y = x.z$ ځاي په ځاي کیږي، او د کوم سره چی بیا z د x فنکشن دی.
(د) په ځاي اینبوونه مو یوه مساوات ته بیایي، چی اوښتونکی کي بیلی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سبستیچیوشن : په ورکړ شوي مساوات $y = x.z$ او په ورته یا همدې

توګه $y^2 = x^2.z^2$ سبستیچیوشن کو.کله چې ترم $y = x.z$ د خلقاعدې سره

دفرنځیالیري، نو د dy لپاره بیا $z.dx + x.dz$ ږدو ،

دا نوي منځ ته راغلي مساوات د خانله شوو اوښتونو یا واریابلو سره د د

فرنځیالمساوات په بڼه راوړل کیږي.په کوم کې چې د x^2 سره خانله شي او

د x , dx همداسې z , dz سره غیږي د بڼیبدلون له لارې خانله شي

$$x^2 + y^2 + x \cdot y \cdot y' = 0$$

$$\frac{x^2 \cdot dx}{dx} + \frac{y^2 \cdot dx}{dx} + \frac{x \cdot y \cdot dy}{dx} = 0$$

$$\underbrace{x^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{y^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{x \cdot y \cdot dy}_{n=2} = 0$$

Man setzt $y = x \cdot z \blacktriangleright z = f(x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

بیلګه : $x^2.dx + y^2.dx + xydy = 0$

اوبې یا حل : اوبې په څلورو پلونو کې پلې کوو

۱ – په مساوات کې بدلون منځ راولو یا سبستیچیوشن کوو

$y = x.z \Rightarrow y^2 = x^2 . z^2$

$dy = z.dx + x.dz$

$x^2.dx + x^2.z^2.dx + xxz(z.dx + x.dz) = 0$

$x^2.dx + x^2z^2.dx + x^3z.dz = 0$

$dx(1 + 2z^2) = -x.z.dz$

$dx / x = -(z.dz)/(1+2z^2)$

دا نوی رامنځ ته شوی مساوات د په دواړه لوري خانلهٔ شوو اووښتونکو د

دیفرنځیالمساوات په بڼه راوړل کیږي.

۳ – د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال کیږي.

د اینتیګرال $\int x.dx / (a^2 + x^2) = (½) \ln(a^2 + x^2)$ اوبې راته د مخه روښان دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{z}{1+2z^2}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{z}{\frac{1}{2}+z^2}\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}+z^2\right) + c_2 \blacktriangleright z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

انتیګرایشنثابتي په یوه لور راوړل کیږي او لویه z^2 بیرته د y^2/x^2 سره بدلیږي. د لوګاریتم د زیاتون څخه بیا د یو ځل(ضرب) لوګاریتم جوړیږي او د لوګاریتممساوات د اکسپوننشلمساوات په څیر لیکل کیږي.
بیا x ریښي ته راوړل کیږي او مساوار په ۴ توان کیږي.
د $c = e^{4(c_2 - c_1)}$ لپاره لیکیل کیږي، اوس د y ساده شمیرل کیدی شي.
هغه f چی وروسته لاس ته راځي د دفرنځیالمساوات تولیز فنکشن اوبی دی

$$\ln|x| + \ln\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\frac{y^2}{x^2}} = c_2 - c_1$$

$$\ln\left|x\cdot\sqrt[4]{\frac{0{,}5\cdot x^2+y^2}{x^2}}\right| = c_2 - c_1$$

$$x\cdot\sqrt[4]{\frac{0{,}5\cdot x^2+y^2}{x^2}} = e^{c_2-c_1}$$

$$\sqrt[4]{0{,}5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2} = e^{c_2-c_1}$$

$$0{,}5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = e^{4(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{4(c_2-c_1)} = c$$

$$0{,}5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = c$$

$$x^2\cdot y^2 = c - 0{,}5x^4$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2}(c - 0{,}5x^4)$$

$$y = \frac{1}{x}\sqrt{c - 0{,}5x^4}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \frac{1}{x}\sqrt{c - 0{,}5x^4}\right\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگی :

لومړی) $x + y = y'.x$

دلته $y = x.z$ سبستیچیوشن کیږي او د په توانقاعدې له مخې dy / dx جوړوو او ړدو $dy = z.dx + x.dz$.اوس د بنیبدلو له لارې x , dx او dz د مساواتو په دواړولورو خانله کیږي.

$$x + y = \frac{dy}{dx} \cdot x \quad \blacktriangleright y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x + x \cdot z = \frac{x}{dx} \cdot (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$x \cdot dx + x \cdot z \cdot dx = x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot dz$$

د اووبنتونکو له بیلولو وروسته مساوات په دواړو لورو اینتیګرالیږي.د اینتیګر- یشنثابتي رایوخاي کیږي.

دا لاس ته راغلی f د دفرنخیالمساوات ټولیز اوبی دی.

$$x \cdot dx = x^2 \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dz$$

$$\ln|x| + c_1 = z + c_2 \quad \blacktriangleright c_1 - c_2 = c$$

$$\ln|x| + c = z \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$y = x(\ln|x| + c)$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto x(\ln|x| + c) \rangle$$

بیلګه ۲ : $(x^2 + y^2).dx = xy.dx$

سبستیچیوشن یا د اووبنتونکو بدلون $y = x.z$ او $y^2 = x^2 . z^2$ د خلقاعدې

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره dy / dx جوړوو او ږدو $dy = z.dx + x.dz$.

د مساوات ښه بدلون سره x,dx همداسی z,dz په دواړو لورو خانله کوو.

د اوښتونکو، داوړو لورو ته له بیلولو وروسته مساوات اینتیګرالیږي.

$$(x^2 + y^2)\,dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$x^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$\blacktriangleright\; y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x^2 \cdot dx + x^2 \cdot z^2 \cdot dx = x \cdot x \cdot z(z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$dx + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx + z \cdot x \cdot dz$$

$$\frac{dx}{x} = z \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int z\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{z^2}{2} + c_2$$

بیاد z^2 په خاي y^2 / x^2 خاي په خاي کیږي، د $2(c_2 - c_1)$ لپاره c ږدو.

لاس ته راغلی f د دفرنخیالمساوات ټولیز اوڅ دی.

$$2 \cdot \ln|x| + 2c_1 - 2c_2 = z^2 \quad \blacktriangleright\; z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$2c_1 - 2c_2 = c$$

$$2 \cdot \ln|x| + c = \frac{y^2}{x^2}$$

$$y^2 = x^2(2 \cdot \ln|x| + c)$$

$$y = x\sqrt{2 \cdot \ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto x\sqrt{2 \cdot \ln|x| + c} \rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلکه ۳ $y' = (y/x) - (y^2 / x^2)$

سبستیچیوشن(د) په خای ایښول

$y = x . z$ او $y^2 = x^2 . z^2$ د خلقاعدې

سره dy / dx جوړوو او ږدو

$dy = z.dx + x.dz$

د مساوات د بنې بدلون له لارې x,dx

همداسی z, dz په دواړو لوروخانله کوو

د اووښتونکو له بیلولو وروسته

مساوات اینټیګرالوو.

د z لپاره بیرته y/x ږدو او

اینټیګریشنثابتی رایوځای کوو.

د مساوات د y پسی اوبی مو

تولیز اوبی f ته بیایي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$
$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$\frac{z \cdot dx + x \cdot dz}{dx} = \frac{x \cdot z}{x} - \frac{x^2 \cdot z^2}{x^2}$$

$$z + \frac{x \cdot dz}{dx} = z - z^2$$

$$-\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{z} + c_1 = \ln|x| + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$c_2 - c_1 = c$$

$$\frac{x}{y} = \ln|x| + c$$

$$y = \frac{x}{\ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \frac{x}{\ln|x| + c} \right\rangle$$

بیلکه ۴ : $y' . (y - x) = y$

(د) په خاي ږدو $y = x.z$,

د خلقانون سره dy / dx جوړوو

مساوات بنیبدلون سره $x.dx$ همداسی

z,dz په دواړو لورو خانله کوو.

د اووښتونو خانلونی وروسته

دواړه خواوپاینتیګرالوو.

نو باور لري

$$\int [f'(x) / f(x)].dx = \ln[f(x)] + C$$

$$dy(y - x) = y \cdot dx$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z$$
$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$(z \cdot dx + x \cdot dz)(x \cdot z - x) = x \cdot z \cdot dx$$

$$x \cdot z^2 \cdot dx - x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot z \cdot dz - x^2 \cdot dz - x \cdot z \cdot dx = 0$$

$$z^2 \cdot dx - z \cdot dx + x \cdot z \cdot dz - x \cdot dz - z \cdot dx = 0$$

$$dx(z^2 - 2z) + x \cdot dz(z - 1) = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{z - 1}{z^2 - 2z} dz = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2z - 2}{z^2 - 2z} dz = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|x| + c_1 + \frac{1}{2}\ln|z^2 - 2z| + c_2 = 0$$

$$2\cdot\ln|x| + \ln|z^2 - 2z| = 2(-c_1 - c_2)$$

$$\ln x^2 + \ln|z^2 - 2z| = -2(c_1 + c_2)$$

(د) په ځایونه y = x. z

د z = y / x اینسوونی سره په

ځښ راګرځول کیږي.

$$\blacktriangleright\ y = x\cdot z$$

$$\Rightarrow z = \frac{y}{x}$$

$$\ln\left|x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x}\right)\right| = -2(c_1 + c_2)$$

$$\ln|y^2 - 2xy| = -2(c_1 + c_2)$$

$$y^2 - 2xy = e^{-2(c_1 + c_2)}$$

$$\blacktriangleright\ e^{-2(c_1 + c_2)} = c$$

$$\underline{y^2 - 2xy = c}$$

وروستی اوبیونه مو فنکش-

برابرون ته بیایي، کوم چی یواځي

ایمپلیلیځیت انځوریدلی شي.

۱ . ۲ . ۳ لايني ديفرنځيال مساوات

د لمړي نظم لايني ديفرنځيالمساوات

لاندي ، هغه مساوات پوهيږو، چی y

او y' په ۱ – ام ګراد کی ، دا په دې

مانا چی لايني وي، ولري.دا شرطونه

داوبښتونکي x لپاره باور نه لري.

دلته F(x) او f(x) د x فنکشنونه

یا بلواك دي او یا ثابتی.

$$allgemein: \frac{dy}{dx} + y\cdot f(x) = F(x)$$

Beispiele:
- $y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$
- $y'\cdot x = x\cdot\sin x - y$
- $y' + x^2 = x^4\cdot y$

د لايني دفرنځيالمساوات اوبیونی لپاره کیدی شي، چی بیلابیلی همغه ارزښتیز متودونه وکارول شي.

د برنولي (Bernoulli) متود له مخی اوبیونه

۱ – سبستیتیوشنو y = u(x).v(x) له

دي ځخه دخلقاعدي له لاري لاس ته راځي

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\blacktriangleright\ y = u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

د y او y ' لپاره ارزښتونه په دفرنځیا-

لمساوات کي کینسول کیږي

$$\Rightarrow u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - u(x)\cdot v(x)\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – لوبي u(x) همداسې v(x) له نوكانو راوځي

۳ – د u(x) همداسې v(x) لپاره د څنګشميرنې سره يو ترم غوښتل کيږي، کوم چې نوکترم [dv / dx -(2/x)v(x)] او له دې سره د u خلووني يا فاكتور صفر كيدى شي .

دا د $v(x) = x^2$ لپاره حالت دى، د نيوني $c_2 - c_1 = 0$ لاندې

د v(x) لپاره راپيدا ارزښت، دا په دې مانا چې x^2 په مساوات کې کينښول شي.له v(x) سره چې حل u(x)[dv/dx- 2v(x) / x] په صفر برابر شي يو پاتې غړى راکوي، له کوم سره چې du همداسې x,dx په دواړو خواو خانله کيدى شي.

۴ – له پاتې غړي څخه u(x) د اينتيګرال كولو له لارې ټاکل کدی شي.

۵ – په وتلمساوات y = u(x).v(x) کې راپيدا ارزښتونه کينښوول کيږي :
u(x) = -(1/x)-(½x²)+c;v(x) =x²

لاس ته راوړنه يي د ورکړ شوي اينتيګر المساوات ټوليز اوبيونه ده.

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)=0$$

$$\frac{dv}{v(x)}=\frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v(x)}=2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v(x)|+c_1=2\cdot\ln|x|+c_2$$

$$\ln|v(x)|=\ln x^2+c_2-c_1$$

$$v(x)=x^2\cdot e^{c_2-c_1}\blacktriangleright c_2-c_1=0$$

$$v(x)=x^2$$

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}\blacktriangleright v(x)=x^2$$

$$u(x)\cdot\quad 0\quad +x^2\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x^3}$$

$$\int du=\int\frac{x+1}{x^3}\,dx$$

$$\int du=\int\frac{1}{x^2}\,dx+\int\frac{1}{x^3}\,dx$$

$$u(x)=-\frac{1}{x}+c_1-\frac{1}{2x^2}+c_2\quad\blacktriangleright c_1+c_2=c$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c$$

$$y=\quad u(x)\quad\cdot v(x)$$

$$=\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c\right)\cdot x^2$$

$$=-x-\frac{1}{2}+cx^2;\ c\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f=\left\langle x\mapsto cx^2-x-\frac{1}{2}\,\middle|\,c\in\mathbb{R}\right\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاګرانژ Lagrange متود له لارې اوبیونه

همدا بیلګه به اوس ددوم یعنی لاګرانژ له متود وشمیرل شي.

۱ - خاي په خاي کوو $F(x) = 0$ او راپاتی پاتی مساوات $y' - y.f(x) = 0$ د ورسره بلدمتود د اوبښتونکو بیلولو له لارې اوبی کوو. د اینتیګریشن ثابطی پهخاي، چې ګټور دي لوګاریتم ټاکو، چې دا لوګاریتم بیا له منځه ځی. $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ثابته C په لنډ شوي هوموجین مساوات $y' - y.f(x)$ کی ثابته نه ده، بلکه د x یو فنکشن دی.

۲ - لاس ته راوړی مساوات د y لپاره د څل یا ضرب قاعدې له لارې دیفرنځیالیږي.

۳ - د y او 'y دواړه توپه اوبیونی په سرچینز مساوات کی خاي په خاي کیږي او مساوات و $dC(x) / dx$ پسی اوبی کیږي.

۴ - د اینتیګرالولو لا لارې $C(x)$ لاس ته راوړ لکیږي.

۵ - په مساوات $y = x^2.C(x)$ کې د $C(x)$ لپاره ارزښت کینښول کیږي او مساوات ساده کیږي

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$y' - y\cdot f(x) = F(x) \blacktriangleright F(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y\cdot\frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = 2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = 2\cdot\ln|x| + c_2$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + c_2 - c_1 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x^2\cdot c|$$

$$y = x^2 \cdot c \Rightarrow c = c(x)$$

$$= u(x)\cdot v(x)$$

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v(x) = c(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{dc(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow y' = 2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx}$$

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx} - x^2\cdot c(x)\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dc(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}\cdot c(x) - \frac{2}{x}\cdot c(x)$$

$$\int dc(x) = \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x^3}$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{1}{x} + k_2 - \frac{1}{2x^2} + k_3 \blacktriangleright k_2 + k_3 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k;\ k \in \mathbb{R}$$

$$y = x^2\cdot c(x)$$

$$= x^2\cdot\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا نتیجه هم همغه برابره ټولیزه اوبیونه ده، لکه د مخه تیر د لاګرانژ اوبیونی متود.	$y = -x - \frac{1}{2} + k \cdot x^2;\ k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to kx^2 - x - \frac{1}{2} \middle\| k \in \mathbb{R} \right\rangle$

بیلګه: د ۱ -ام نظم مساوت y' - ay = x د لانګرانژ او برنولي متودو له لارې اوبی کړی!

الف – (د) پۀ ځاي اینښووني (سبستیچیوشن) y = u.v له لارې او مناسب رابیلیدنی ته dy / dx=u.(dv/dx)+ v(du/dx)	$y' - ay = x \blacktriangleright y = u(x) \cdot v(x)$ $u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - a \cdot u(x) \cdot v(x) = x$ $u(x)\left[\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x)\right] + v(x)\frac{du}{dx} = x$
ب – u(x) له نوکانو راوخي پ- په نوکانو کی ترم باید صفر شي، چی د u اود نوکانو ځل صفر شي.د اینتیګرالولو سره لویه v(x) ټاکل کیږي.	$\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x) = 0$ $\int \frac{dv}{v(x)} = a \cdot \int dx$ $\ln\|v(x)\| + c_1 = ax + c_2$ $\ln\|v(x)\| = ax + c_2 - c_1$ $v(x) = e^{ax + c_2 - c_1}$ $= e^{ax} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright c_2 - c_1 = 0$ $= e^{ax}$
ت – د v(x) لپاره دا راپیدا ترم ځاي په ځاي کیږي او د اینتیګرال کیدو له لارې u لاس ته راځي. د اینتیګرال اوبی د ټوته اینتیګرال له لارې پیدا کیږي.	$u(x) \cdot [0] + e^{ax} \cdot \frac{du}{dx} = x$ $\int du = \int \frac{x}{e^{ax}} dx$ $u(x) = -\frac{ax + 1}{a^2 \cdot e^{ax}} + c$
ت – لاس ته راوړی ارزښت په مساوات y = u.v کی کینبوول کیږي. لاس ته راوړنه د برنولي پسي ټولیز اوبی دی	$y = u(x) \cdot v(x) = \left(-\frac{ax + 1}{a^2 \cdot e^{ax}} + c\right) \cdot e^{ax}$ $y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + c \cdot e^{ax}$ $\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to c \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right\rangle$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف – د لاگرانژ پسی بڼی لور په صفر مساوي کېښول کیږي او dx همداسی dy، y په دواړو لورو ځانله کیږي.
راپاتی مساوات dy / y = a.dx اینتیگرالیږي، د y پسی بڼه– بدلیږي او $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ږدو.

$$y' - a \cdot y = x \blacktriangleright x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - a \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \cdot \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = ax + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = ax + \ln|c(x)|$$

$$y = e^{ax} \cdot e^{\ln|c(x)|}$$

$$= e^{ax} \cdot c(x) = u(x) \cdot v(x)$$

ب – د y لپاره برابرون د ځل– قاعدې له لارې دیفرنځیالیږي.

$$y' = e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax}$$

پ – د y او 'y لپاره ټوټه اوبیوني په پیلبرابرون کی کیښول کیږي.
داسی ودیز برابرون د dc(x) پسی اوبی کیږي له دې سره a.e^ax . C(x) له منځه ځي

$$y' \qquad -a \cdot y \qquad = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax} - a \cdot e^{ax} \cdot c(x) = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} = x$$

ت ٠ ارزښت C(x) د اینتیگر– الولو له لارې لاس ته راځي

$$\int dc(x) = \int \frac{x}{e^{ax}} dx$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k; \; k \in \mathbb{R}$$

ټ – لاس ته راوړلی ارزښتونه په مساوت
y = u(x) v(x) e^ax .C(x)
کی ږدو

$$y = e^{ax} \cdot c(x)$$

$$= e^{ax} \cdot \left(-\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k \right)$$

$$= -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + k \cdot e^{ax}; \; k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to k \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \middle| k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

نتیجه د لاگرانژ پسی تولیز اوبی دی.
دا د برنولي د نتیجې سره سرخوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه: مساوات y' + y/x = sinx د برنولي متود سره اوبی کړی.

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

(د) په ځایکو y = u(x).v(x) او y او y' په دفرنځیالبرابرون کی یږدو

$$\blacktriangleright y = u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

$$u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} + \frac{u(x)\cdot v(x)}{x} = \sin x$$

$$u(x)\cdot\left(\frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x}\right) + v(x)\frac{du}{dx} = \sin x$$

نوکترم په 0 سره برابر یږدو او v شمیری.

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x} = 0 \Rightarrow v(x)\frac{du}{dx} = \sin x$$

د پاتیمساوات څخه راپاتی دی v(x)(du/dx) = sin x

$$\int\frac{dv}{v(x)} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v(x)| + c_1 = -\ln|x| + c_2 \;\blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|v(x)| = \ln|x^{-1}| + \ln|c|$$

د c = 0 له امله لاس ته راځي: v(x) = 1 / x

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot c^c \blacktriangleright c = 0$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{x}$$

له پاتبرابرون څخه u(x) د اینتیګرالولوله لارې پاکل کیږي

$$v(x)\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\int du = \int x\cdot\sin x\,dx$$

$$u(x) + k_1 = \sin x - x\cdot\cos x + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$u(x) = \sin x - x\cdot\cos x + k;\ k\in\mathbb{R}$$

په (x). y = u(x) کی لاس ته راوړل شوي ارزښتونه د u او v لپاره ځاي په ځاي کړی. لاس ته راوړنه د برنولي پسی د ورکړ شوي مساوات ټولیز اوبیدی.

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$= (\sin x - x\cdot\cos x + k)\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x}\,\middle|\, k\in\mathbb{R}\right\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه : مساوات $y' + y = e^{-x}$ د لاگرانژ د متود له لارې اوبی کړی.

ږدو $F(x) = e^{-x} = 0$ او پاتي- مساوات د اووبښتونو د بیلولو له لارې اوبی کوو.

$$y' + y = e^{-x} \blacktriangleright e^{-x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

د اینتیګریشنثابتو په څیر کینبوول کیږي $c - c = \ln|c(x)|$ او y ټاکو د خلقاعدې سره y' شمیرل کیږي

$$\ln|y| + c_1 = -x + c_2 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = -x + \ln|c(x)|$$

$$y = e^{-x} \cdot c(x)$$

$$= u(x) \cdot v(x)$$

$$y' = \frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}$$

د y او y' لپاره برخ اوبیونی په پیلمساوات کی کینبوول کیږي او $c(x) \cdot e^{-x}$ او e^{-x} لرې کیږي.

$$\overbrace{\frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}}^{y'} + \overbrace{e^{-x} \cdot c(x)}^{y} = e^{-x}$$

د اینتیګریشن له لارې $c(x)$ ټاکل کیږي.

$$\int dc(x) = \int dx$$

$$c(x) + k_1 = x + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = x + k;\ k \in \mathbb{R}$$

په مساوات $y = e^{-x}.(x)$ کي $c(x)$ کینبوول کیږي. نتیجه د لاگرانژ پسی تولیز اوبیونه ده

$$y = e^{-x} \cdot c(x) \blacktriangleright c(x) = x + k$$

$$= e^{-x}(x + k);\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \cdot - e^{-x}(x + k) | k \in \mathbb{R} \rangle}}$$

تمرینونه

۱ . ۲ د لمړینظم دفرنځیالمساوات

۱ . ۲ . ۱ د فرنځیالمساوات د بیلوشوو اوبنتونو سره

د لاندې دفرنځیالمساوات لپاره تولیزبن اوبیونیورکړی

1. $y' = \frac{y}{2a}$
2. $y' = axy$
3. $y' - 1 = x^2 + x^4$
4. $y' - x^3 = y - x^3$
5. $\frac{y'}{2x} = y^2$
6. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7. $2xy^2 = y'$

8. $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$

9. $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

10. $x^2 + 2x = y'$

11. $xy' = y \cdot \ln y$

12. $(1 - x^2)\,dy + xy \cdot dx = 0$

13. $y' = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

14. $y' = e^x y$

15. $\sqrt{y'} = y'x$

16. $y' = (yy')^2$

17. $dy = \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

18. $y' = \frac{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}{y^2 \sqrt{y^2 + 9}}$

19. $yx \cdot \sin(2x) = y'$

20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-}$

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 y^3$

23. $(x + y)^2 = y'$

24. $y'^2 y = x^2 y' - y'$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

26. $y' \cdot \operatorname{Arcsin} y = x^2$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

28. $y \cdot \ln x = y'$

29. $x \cdot \sinh x = y' \cdot \cosh y$

30. $\frac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y} = y'$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنخیالمساوات د هوموجین اووبنتونکو یا واریابلو سره

لاندې دفرنخیالمساوات اوبی کړی

1. $y'x = -(x + y)$

2. $y'x = y$

3. $y' = \frac{x + y}{x}$

4. $y'x^2 - yx = x^2 + y^2$

5. $y'xy = y^2 - x^2$

6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$

7. $dy \cdot x = (y - x)\,dx$

8. $y' - \frac{y}{x} = \tan \frac{y}{x}$

9. $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$

10. $x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$

11. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$

12. $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$

13. $x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$

14. $y^2 + (x^2 - xy)\,y' = 0$

15. $y^2 \cdot dx - 3x^2 \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

17. $xy' = y(\ln y - \ln x)$

18. $y \cdot dx + \sqrt{4xy} \cdot dy = x \cdot dy$

19. $\frac{2y(y - x)}{x^2 - 2xy + y^2} = y'$

20. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۲ . ۳ لاینی دیفرنخیالمساوات

لاندې دیفرنخیالمساوات د برنولي او لاګرانژ متودونو سره اوبی کړی.

1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$	**2.** $y' = e^x - y$	**3.** $y' - y = x^2 - 1$
4. $y' = e^{3x} - 2y$	**5.** $y'x = y + x^2 \cdot \sin x$	**6.** $y'x = x \cdot \sin x - y$
7. $y' + y + \cos x - e^{2x} = 0$	**8.** $y' + ay = b \cdot e^{cx}$	**9.** $y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$
10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$	**11.** $y' = a + bx + cy$	**12.** $xy' + 1 = e^x + y$
13. $y'(1 - x^2) + xy = 1$	**14.** $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$	**15.** $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$
16. $y' - y \cdot x = x^2 - 1$	**17.** $y'x^2 + y = x$	**18.** $y' + \frac{1}{1+x}y + x^2 = 0$
19. $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$	**20.** $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$	**21.** $y' - 2y = 3 - x$

۱ . ۳ د دویم نظم دیفرنخیالمساوات

د دویم نظم دیفرنخیالمساوات لاندې یو مساوات پوهیږو، چی $y'' = d^2y / dx^2$ د خورا جګ دفیرنخیالکوشنت یا دفیرنخیالویش په څیر ولري، د دې ترڅنګ کیدی شي $y' = dy / dx$. x او y رامنځ ته شي.

د دیفرنخیالمساواتو په دې پیلونی په چاپیریال کی کیدی شي ، چی لنډ یو څو د دویم نظم دیفرنخیالمساوات او د هغو کارونه یا استعمال باندې خبرې وشي.

د $y'' = f(x)$ بنی دیفرنخیالمساوات

بېلګه:

Beispiel:

$$y'' = -\sin x$$

$$\int y''\,dx = \int -\sin x\,dx$$

$$y' = \cos x + c_1 \,;\; c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int y'\,dx = \int \cos x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = \underline{\sin x + c_1 x + c_2 \,;\; c_2 \in \mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\langle x \mapsto \sin x + c_1 x + c_2 | c_1 \,;\; c_2 \in \mathbb{R} \rangle}$$

د اوبیونی تلنه: د رابیلیدنی د له منځه وړلو د اوبیوني پرینځیپ ډیرواره اینتیګرالول دي.
الف: د برابرون دواړه لوري اینتیګرالیږي
۲ - راپورته شوي دفرنخیالمساوات بیا اینتیګرالیږي.
۳ - په ورکړ شوي حالت کې له شرایطو c_1 او c_2 وټاکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی:

لمړی − $y'' = 1/(1+x^2)$

د لمړي اینتګریشن سره لاس ته y' راځي

بیا د y' اینتیګریشن سره y لاس ته راځی اوله دې سره د f تولیزه اوبیونه

$$\int y''\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$y' = \operatorname{Arctan} x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \int \operatorname{Arctan} x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_3 + c_1 x + c_4$$

$$\blacktriangleright c_3 + c_4 = c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

دویم − $y'' = x^2 + x + 1$

لمړی اینتیګرال راکوي

ثابتي c_3, c_4, c_5 د اینتیګر− یشنثابتی c_1 ته یوځاي کیږي

دویم اینتګریشن y راکوي

ثابتی c_6, c_7, c_8, c_9 اینتیګریشن ثابتی c_2 ته رائیوځایکیږي

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int dx$$

$$y' = \frac{x^3}{3} + c_3 + \frac{x^2}{2} + c_4 + x + c_5$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \frac{1}{3}\int x^3\,dx + \frac{1}{2}\int x^2\,dx + \int x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = \frac{x^4}{12} + c_6 + \frac{x^3}{6} + c_7 + \frac{x^2}{2} + c_8 + c_1 x + c_9$$

$$= \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

3. $y'' = x \cdot e^x = u(x) \cdot v'(x)$

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - + \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

$$\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x + c_1$$

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x \cdot e^x\,dx = \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

$$y' = x \cdot e^x - e^x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \int x \cdot e^x\,dx - \int e^x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot e^x - e^x + c_3 - e^x + c_4 + c_1 x + c_5$$

$$\blacktriangleright c_3 + c_4 + c_5 = c_2$$

$$= e^x(x-2) + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto e^x(x-2) + c_1 x + c_2 \rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جک نظم دف. مساوات کیدی شي کله کله په ورته توګه اوبی شي

4. $y^{(4)} = x$

لمړی اتیګرالونه ''' y رااکوي،
دومه - ''y دریمه- 'y او
څلورم انتیکریشن y راکوي

$$\int y^{(4)}\,dx = \int x\,dx$$

$$y''' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$\int y'''\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y'' = \frac{x^3}{6} + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$\int y''\,dx = \frac{1}{6}\int x^3\,dx + c_1 \cdot \int x\,dx + (c_2 + c_3)\int dx$$

$$y' = \frac{x^4}{24} + c_4 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_5 + (c_2 + c_3)x + c_6$$

اړوند انتیکریشنثابتی سره
رایوځاي کیږي

$$\int y'\,dx = \frac{1}{24}\int x^4\,dx + \frac{1}{2} c_1 \cdot \int x^2\,dx + $$

$$+ (c_2 + c_3)\int x\,dx + (c_4 + c_5 + c_6)\int dx$$

$$y = \frac{x^5}{120} + c_7 + \frac{x^3}{6} c_1 + c_8 + (c_2 + c_3)\frac{x^2}{2} + c_9 +$$

$$+ (c_4 + c_5 + c_6)x + c_{10}$$

$$= \frac{x^5}{120} + k_1 \frac{x^3}{6} + k_2 \frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4$$

$k_1 = c_1$

$k_2 = c_2 + c_3$

$k_3 = c_4 + c_5 + c_6$

$k_4 = c_7 + c_8 + c_9 + c_{10}$

$k_1 ; k_2 ; k_3 ; k_4 \in \mathbb{R}$

د لته f د ټولیز اېیفنکشن دی

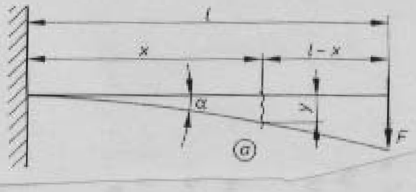
$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x^5}{120} + k_1 \frac{x^3}{6} + k_2 \frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4 \right\rangle$$

بیلګه : یوه یولوریز غزول شوي باوړونی کیږون y وشمیری، چی اوږدوالی l او تکیه‌وله پریوتلی زور یی F دي له میخانیك څخه د کیږون شمیرنی برابرون څرګند دی. د یو لنډ برابرون دی، چی په تخنیك د واړه ورسره بلد کیږون لپاره باور لري. په یوه په خوښه ځاي a کی کیږومونت دی (l - x) F -

M = کیږونمونت

E = د ترموالی- یاالاستیخیتي مودول

l = د هواري وروونمومنت



(c) ketabton.com: The Digital Library

د اینتیګراولو له لارې y'' په y' او y اوړي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \qquad \blacktriangleright M = -F(l-x)$$

$$= \frac{F(l-x)}{E \cdot I}$$

د دويم اينتيګرالونی د مخه ثابته c_1 د باروړوني مخ ته پراته شرايطو څخه شميرل کيږي. د $x = 0$ په ځاي کی جګوالی y' هم صفر دی. د دې سره ثابته $c_1 = 0$ ده.

$$y' = \frac{F}{E \cdot I} \int (l-x)\,dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + c_1$$

$$\text{für } x = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

دويم اينتيګرولول مود يفرنشلبرابرون ته بيايي.

$$y = \frac{F \cdot l}{E \cdot I} \int x\,dx - \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2\,dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + c_2$$

دومه ثابته c_2 هم صفر دی، دا چی د y راګرونه د $x = 0$ په ځاي کی د صفر سره برابره ده.

$$\text{für } x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y = \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

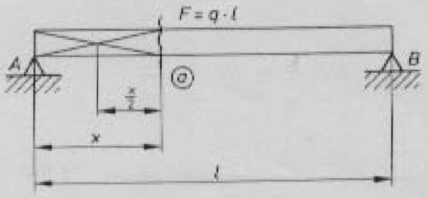
ماکسيمال ګرونه د $x = l$ سره پرته ده. د $x = l$ د y_{max} ځاي په ځاي کولو سره لاس ته راځي .

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\right\rangle$$

$$\text{für } x = l \Rightarrow y_{max} = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{l^3}{3}$$

بيلګه په دوه ستنو ولاړ باروړونکي ماکسيمال ګرون وشميرئ، د ليکي بار q سره . د تير په يوه ځاي a باندې مومنتمساوات ځاي په ځاي کوو.

دا چی بار په برابرډول ويشل شوی دی ، نو پرتی هر A او B هر يو يی د ټول بار نيمی دي.



$$A = B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{F}{2}$$

$$M = \frac{q \cdot l}{2}\,x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Die Momentengleichung د مومنټ برابرون

$$M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

په ديفرنځيالمساوات کي کيښول کيږي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

$$= -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} x + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} x^2$$

د "y لپاره برابرون د اينتيګريشن سره و 'y ته بيرته بيول کيږي

$$y' = -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} \int x \, dx + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2 \, dx$$

$$= -\frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} + c_1$$

په x = l / 2 ځاي کی هغه لوي کږون مخ ته پروت دی، دا په دې مانا چی په دې ځاي کی تنجنت د کږونکربښی سره پرته يعنی افقي پرته ده، ځکی يا ځګوالی y ' = 0 مساوي په صفر دی.

$$x = \frac{l}{2} \quad y' = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + c_1$$

$$c_1 = 0 - \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

د c_1 لپاره راپيداشوی ارزښت په برابرون 'y کی ايښول کيږي. د 'y د بيا يا نوي اينتيګرلوني سره فنکشن y تاکل کيږي.

$$y' = \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q}{6 \cdot E \cdot I} \int x^3 \, dx - \frac{q \cdot l}{4 \cdot E \cdot I} \int x^2 \, dx + \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \int dx$$

$$y = \frac{q \cdot x^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3 \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} + c_2$$

د x = 0 په ځاي کی راګرځون y = 0 دی، د دې سره تابته $c_2 = 0$ ده.

$$x = 0 \quad y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} (x^4 - 2 \cdot l \cdot x^3 + l^3 \cdot x)$$

د x = 1 / 2 لپاره هغه خورا لوي کږون y_{max} مخ ته لرو دی، چی د ½ اينښوولو سره د خورا لوي کږون فرمول لاس ته راځي

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow y_{max} = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} \left(\frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{2} \right)$$

$$= \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y''=f(y)$ فورم یا بڼي دیفرنځیال مساوات

اوبیوونکنه *Lösungsgang:*

$$y' = \frac{dy}{dx} = z,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dy},$$

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$

۲ – مساوات اینتیګرایږي اوz شمیرل کیږي.

۳ – او بیا وریسی د واریابلی د خانلونی متود له لارې شمیرل کیږي.

د اوبیونی په څیر ایمپلیخیت فنکشنمساوات لاس ته راځي

بېلګه **Beispiel:**

$$y'' = ay \;\blacktriangleright y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = ay \;\blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$

$$\frac{dz}{dy}z = ay$$

$$z\cdot dz = a\cdot y\cdot dy$$

$$\int z\,dz = a\cdot\int y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{ay^2}{2} + c_2$$

$$z^2 = ay^2 + 2(c_2 - c_1) \;\blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay^2 + c_3} \;\blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|y + \sqrt{y^2 + \frac{c_3}{a}}\right| + c_5$$

بېلګې: **Beispiele:**

1. $y'' = \frac{a}{2}$

$$\frac{dz}{dx} \quad \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{a}{2} \;\blacktriangleright y' = z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{a}{2} \;\blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$

$$\frac{dz}{dy}z = \frac{a}{2}$$

$$\int z\,dz = \frac{a}{2}\int dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات اینتیګریشن پسی z شمیرل کیږي

$$\frac{z^2}{2}+c_1=\frac{a}{2}y+c_2$$

$$z^2=ay+2(c_2-c_1) \blacktriangleright 2(c_2-c_1)=c_3$$

$$z=\sqrt{ay+c_3} \blacktriangleright z=\frac{dy}{dx}$$

وریسی د اووښتونی د ځانلونی متود له لارې شمیرل کیږي

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{ay+c_3}}$$

$$x+c_4=\frac{2}{a}\sqrt{ay+c_3}+c_5 \blacktriangleright c_4-c_5=c_6$$

$$(x+c_6)^2=\frac{4}{a^2}(ay+c_3)$$

$$\frac{a^2}{4}(x+c_6)^2-c_3=ay$$

$$\Rightarrow y=\frac{a}{4}(x+c_6)^2-\frac{c_3}{a}$$

د لته f ټولیزه اوبیونه ده

$$\Rightarrow f=\left\langle x,-\frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{4}(x+c_6)^2-c_3\right]\right\rangle$$

2. $y''=-\frac{1}{2}\sin y$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=-\frac{1}{2}\sin y \blacktriangleright y'=z$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2}\sin y \blacktriangleright \frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}z$$

$$\int z\,dz=-\frac{1}{2}\int\sin y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}+c_1=\frac{1}{2}\cos y+c_2$$

$$z^2=\cos y+2(c_2-c_1) \blacktriangleright 2(c_2-c_1)=c_3$$

$$z=\sqrt{\cos y+c_3} \blacktriangleright z=\frac{dy}{dx}$$

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{\cos y+c_3}}$$

د دفرنځیالمساوات اوبیونه مو یوه ناواوبیووني (نامنحل) اینتیګرال ته بیایي.

$$x+c_4=\int\frac{dy}{\sqrt{\cos y+c_3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y'' = f(y')$ بني دفرنخيلامساوات

Lösungsgang: اوبيونلار

$y' = \frac{dy}{dx} = z$

$y'' = \frac{dz}{dx}$ ein.

۲ – راپورته شوی مساوات اینتیګرال کیږي او په z پسې ترتیبیږي

۳ – دلته z اوبی کیږي، بیا اینتیګرالول یي د دیفرنخیال- مساوات ټولیز اوبیونه لاس ته راځي.

Beispiele: بیلګې:

1. $y'' = y'^2$

Beispiel: بیلګه:

$y'' = ay' \quad \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a \cdot z$

$\frac{dz}{z} = a \cdot dx$

$\int \frac{dz}{z} = a \cdot \int dx$

$\ln z + c_1 = ax + c_2$

$\ln z = ax + c_2 - c_1 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$

$z = e^{ax + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$

$\int dy = \int e^{ax + c_3} dx$

$y = \frac{1}{a} e^{ax + c_3} + c_4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c_5$

$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{a} c_5 \cdot e^{ax} + c_4 \right\rangle$

$y'' = y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$

$\frac{dz}{dx} = z^2$

$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$

$-\frac{1}{z} + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$

$c_2 - c_1 = c_3$

$-\int \frac{dx}{x + c_3} = \int dy$

$-\ln|x + c_3| + c_4 = y + c_5 \quad \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$

$\Rightarrow y = c_6 - \ln|x + c_3|$

$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c_6 - \ln|x + c_3| \rangle$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. $y'' = 1 - y'^2$

$$y'' = 1 - y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - z^2$$

$$\int \frac{dz}{1 - z^2} = \int dx$$

$$\text{Artanh}\, z + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = \tanh(x + c_3) \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int \tanh(x + c_3)\, dx$$

$$y + c_4 = \ln|\cosh(x + c_3)| + c_5 \quad \blacktriangleright c_5 - c_4 = c_6$$

$$y = \underline{\underline{c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)|}}$$

د لته f د تولیز اټیفنکشن دی

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x, -c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)| \rangle}}$$

تمرینونه

۳۱ . د دوم نظم دفرنځیالمساوات

لاندې دفرنځیالمساوت اوبی کړی

1. $y'' = \frac{1}{x}$ 2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ 3. $y'' - x^3 = 0$

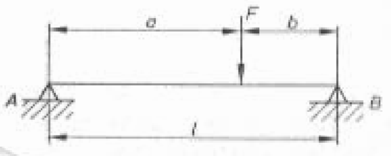
4. $y'' = x + \sin x$ 5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ 6. $y'' = \tan x$

7. $y'' = \sinh x$ 8. $y'' = e^{x^2}$ 9. $y^{(4)} = \cos x$

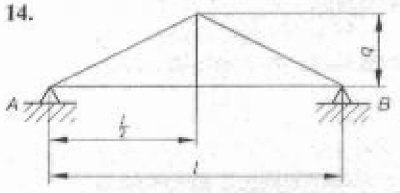
10. $y''' = e^x$ 11. $y^{(4)} = \sinh(2x)$ 12. $y^{(5)} = \cosh(ax)$

د کږون لاین او خورا جګ یا ماکسیمال کږوونی مساوات د لاندې بارونحالت یا بار حالت یا دروندونی حالت لپاره پیدا کړی

13.

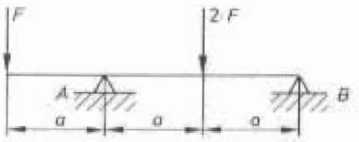


14.

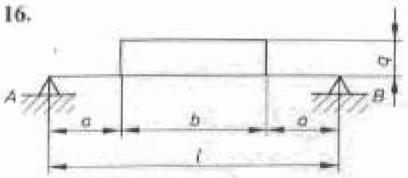


(c) ketabton.com: The Digital Library

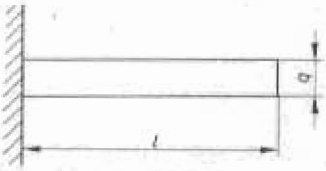
15.



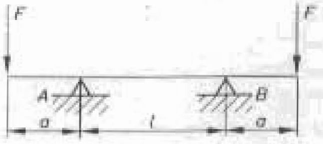
16.



17.



18.



لاندې دفرنشيالمساوات اوبې کړئ

19. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$

20. $y'' = a \cdot e^y$

21. $y^4 - y^3 y'' = 1$

22. $y'' = \frac{1}{y}$

23. $y^2 = k^2 y''$

24. $y'' = y^2$

25. $y^2 \cdot y'' = a$

26. $y'' = 6y - 4$

27. $y'' = 1 + y'^2$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

29. $y'' = e^{y'}$

30. $y'' = y'^3$

31. $y'^2 - 3y''^2 = 0$

32. $y''' + y''^2 = 0$

33. $xy''^2 = y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تمرينونو اوبيونه يا حل

۱ . ۱ بنسټکليمی تمرينونه

1. $y''=x\cdot e^x$

$$y''=(y')'=x\cdot e^x$$

$$y'=\int x\cdot e^x\,dx$$

$$\int x\cdot e^x\,dx=e^x(x-1)+c_1$$

$$y'=x\cdot e^x-e^x+c_1$$

$$y=\int x\cdot e^x\,dx-\int e^x\,dx+c_1\int dx$$

$$y=e^x(x-1)+c_2-e^x-c_3+c_1x+c_4$$

$$c_2-c_3+c_4=c$$

2. $y''-x=0$

$$y''=(y')'=x$$

$$y'=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c_1$$

$$y=\int(y')\,dx=\frac{1}{2}\int x^2\,dx+c_1\int dx$$

$$y=\frac{1}{2\cdot 3}x^3+c_2+c_1x+c_3$$

$$c_2+c_3=c$$

$$y=\frac{1}{6}x^3+c_1x+c$$

3. $2y'-\cos x=0$

$$y'=\frac{1}{2}\cos x$$

$$y=\frac{1}{2}\int\cos x\,dx$$

$$y=\frac{1}{2}\sin x+c$$

4. $x\cdot y''=3y'$

$$x\cdot y''=3y' \quad \blacktriangleright y'=z;\quad y''=z'$$

$$x\cdot z'=3z$$

$$z'=\frac{dz}{dx}$$

$$x\cdot\frac{dz}{dx}=3z$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{3dx}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dz}{z} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln z = 3 \ln x$$

$$z = x^3 \quad \blacktriangleright z = y'$$

$$y' = x^3 \Rightarrow y = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c$$

5. $y \cdot \ln x = x \cdot y'$

$$y \cdot \ln x = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{y} \, dy$$

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \frac{1}{y} \, dy$$

$$\frac{1}{2} \ln^2 x = \ln y$$

$$y = e^{\frac{1}{2} \ln^2 x} + c$$

6. $y' \cdot y + y' + x = 0$

$$y'(y+1) = -x$$

$$\frac{dy}{dx}(y+1) = -x$$

$$\int (y+1) \, dy = -\int x \, dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

$c_2 = 2c_1$

$$y^2 + 2y = -x^2 + c_2$$

$c = 1 + c_2$

$$y = -1 \pm \sqrt{1 - x^2 + c_2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{c - x^2}$$

7. $y' - x^2 = 3e^x$

$$y' = 3e^x + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^x + x^2$$

$$dy = (3e^x + x^2) \, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dy = \int (3e^x + x^2)\,dx$$

$$y = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 + c$$

8. $\sin x - e^x = y'$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x - e^x$$

$$dy = (\sin x - e^x)\,dx$$

$$\int dy = \int (\sin x - e^x)\,dx$$

$$y = -\cos x - e^x + c$$

9. $y \cdot y' = x + 1$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x + 1$$

$$y \cdot dy = (x+1) \cdot dx$$

$$\int y\,dy = \int (x+1)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$c = 2c_1$

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 2x + c}$$

10. $y' \cdot y^2 = y' - x^2$

اوبيونه د y پسې اوبيوز نه دي،
له دې امله ايمپليځيت اوبيونه

$$y'(y^2 - 1) = -x^2$$

$$dy(y^2 - 1) = (-x^2)\,dx$$

$$\int (y^2 - 1)\,dy = -\int x^2\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} - y = -\frac{x^3}{3} + c$$

11. $\frac{dy}{dx} - 3x = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 3x$$

$$\int dy = \int (e^x + 3x)\,dx$$

$$y = e^x + \frac{3}{2}x^2 + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. $y' - x^2 = x^2 - y'$

$$2y' = 2x^2 \quad \|:2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\int dy = \int x^2\, dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + c$$

13. $\frac{dy}{dx} + \cos x = 1$

$$dy = (1 - \cos x)\, dx$$

$$\int dy = \int (1 - \cos x)\, dx$$

$$y = x - \sin x + c$$

14. $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = $$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - $$
$$- \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$c = 4c_1$

$$y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int y^3 \cdot dy = \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c_1$$

$$y^4 = 2x\sqrt{x^2 - 1} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$y = \pm \sqrt[4]{2x\sqrt{x^2 - 1} - \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 + c}$$

15. $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$

که دفرنځیالمساوات په x^2 ویشل کیږي، باید $x \neq 0$ وغوښتل شي.
که د $x \neq 0$ لپاره اوبیونه په پام کې ونیول شي، پیژندل کیږي چې دفرنځیالمساوات د $x = 0$ لپاره هم اوبیونه پوره کوي، په دې توګه د ټول x لپاره اوبیونه پوره ده.

$$x \neq 0 \Rightarrow y' = x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 1$$

$$dy = (x^2 - 1)\, dx$$

$$\int dy = \int (x^2 - 1)\, dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} - x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

16. $e^x \cdot y' = y$

Partikuläre Lösung: $y=0$ پارتیکولار اوبیونه

ساده د y = 0 پارتیکولار اوبیونه پیژندل کیږي.

د نورو کارونی لپاره دې y |= 0 نیول شوی وي

$$y \neq 0 \Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^{-x}\,dx$$

$$\ln|y| = -e^{-x} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-e^{-x}+c_1}$$

$$= e^{-(e^{-x})} \cdot e^{c_1}$$

$c = e^{c_1}$

$$y = c \cdot e^{-(e^{-x})}$$

د c = 0 سره پارتیکولار- یا ټوټه اوبیونه خوندي ده.

17. $y'' = 7x^3$

$$\frac{dy'}{dx} = 7x^3$$

$$\int dy' = 7\int x^3\,dx$$

$$y' = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\int dy = \int\left(\frac{7}{4}x^4 + c_1\right)dx$$

$$y = \frac{7}{20}x^5 + c_1x + c_2$$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \sin x$$

$$\frac{dy'}{dx} = \sin x$$

$$\int dy' = \int \sin x\,dx$$

$$y' = -\cos x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + c_1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dy = \int (-\cos x + c_1)\,dx$$

$$y = \underline{\underline{-\sin x + c_1 x + c_2}}$$

19. $3x - y'' = a$

$$y'' = 3x - a$$

$$\frac{dy'}{dx} = 3x - a$$

$$\int dy' = \int (3x - a)\,dx$$

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{3}{2}x^2 - ax + c_1\right)dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + c_1 x + c_2}}$$

20. $y'' = y'$

Partikuläre Lösung پارتیکولار اوبیونه

ثابته = $y = a = \text{const.}$

سملاسی y = a = const د پارتیکو-
لار اوبیونی په څیر پیژندل کیږي.
د پسی اوبیونی لپاره ټیك د0 ≠|y'
سره فنکشن رانیول کیږي، دا په
دې مانا چی ناثابت فنکشنونه

$$y' \neq 0 \Rightarrow y'' \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{dx} \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy'}{y'} = \int dx$$

$$\ln |y'| = x + c_1^*$$

$$e^{\ln |y'|} = e^{x + c_1^*}$$

$$= e^x \cdot e^{c_1^*}$$

$$y' = c_1 \cdot e^x$$

$e^{c_1^*} = c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په روښانه توګه د $C_1 = C_2 = 0$
همداسې د $C_1 = 0$ سره پورتنی
پارتیکیولار اوبی په تولیز اوبي
کی دننه یا خوندي دی.

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \cdot e^x$$

$$\int dy = \int c_1 \cdot e^x \, dx$$

$$y = \underline{\underline{c_1 \cdot e^x + c_2}}$$

21. $y'' = x \cdot \cos x$

$$\frac{dy'}{dx} = x \cdot \cos x$$

$$\int dy' = \int \underset{u_1}{\underset{\downarrow}{x}} \cdot \underbrace{\cos x \, dx}_{dv_1}$$

$$y' = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \sin x + \cos x + c_1$$

$$\int dy = \int (x \cdot \sin x + \cos x + c_1) \, dx$$

$$y = \int \underset{u_2}{\underset{\downarrow}{x}} \cdot \underbrace{\sin x \, dx}_{dv_2} + \sin x + c_1 x$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx + \sin x + c_1 x$$

$$= -x \cdot \cos x + \sin x + \sin x + c_1 x + c_2$$

$$= \underline{\underline{2 \sin x - x \cdot \cos x + c_1 x + c_2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۲ د لمړي نظم ديفرنځيالمساوات ته تمرينونه

۱ . ۲ . ۱ ديفرنځيالمساوات د بيلوشوو اووبنتونکو سره

1. $y' = \frac{y}{2a}$

$y = 0$ :: پارتيکولار اوبيونه

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2a} \int dx$$

$$\ln|y| = \frac{x}{2a} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{x}{2a} + c_1}$$

$$= e^{\frac{x}{2a}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = c \cdot e^{\frac{x}{2a}}$$

$c = e^{c_1}$

پارتيکيولار اوبيونه په ټوليز اوبی هم دننه دي(C = 0)

2. $y' = axy$

$y = 0$: پارتيکولار اوبيونه

نيونه: Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \int x\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{ax^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{a}{2}x^2 + c_1}$$

$$= e^{\frac{a}{2}x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{\frac{a}{2}x^2}$$

د c = 0 سره پارتيکيولار اوبيونه په ټوليز اوبيونی کی دننه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3. $y' - 1 = x^2 + x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + x^4$$

$$\int dy = \int (1 + x^2 + x^4)\, dx$$

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + c$$

4. $y' - x^3 = y - x^3$

د دي ديفرنخياليرابرون اوبې د تيرتمرين ۱
څخه د $a = 1/2$ سره، لاس ته راوړل کيږي

$$y' = y + x^3 - x^3$$

$$y' = y$$

$$y = c \cdot e^x$$

5. $\frac{y'}{2x} = y^2$

زيکولار اوبيونه : $y = 0$

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = 2 \int x\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c$$

$$y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

$$y = 0$$

د ديفرنخيالمساوات اوبيونه يو
زينکولار اوبې لري.

6. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

زينکولار اوبيونه : $y = 0$

ساده پيژندلکيږي، چې اوبې
$y = 0$ ، زيکولار اوبې دی چې
دا به وروسته وښوول شي.

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c$$

$$= -\frac{1 - c \cdot x}{x}$$

$$y = \frac{x}{1 - c \cdot x}$$

$$y = 0$$

7. $2xy^2 = y'$

د دي ديفرنځيالمساوات اوبی د تر مخه تير تمرين ۵ څخه رانيول کيدی شي

زيکولارزوبيونه :: $y = 0$

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

$$y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

$$y = 0$$

8. $y' = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$$

$$a^2 y \cdot dy = b^2 x \cdot dx$$

$$a^2 \int y\, dy = b^2 \int x\, dx$$

$$a^2 \cdot \frac{y^2}{2} = b^2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 + 2c_1$$

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = c$$

$c = -2c_1$

اوبی په ايمپليځيته بڼه (اهرامغوځی)

9. $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}|$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\int dy = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$y = 2 \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10. $x^2+2x=y'$

$$\frac{dy}{dx}=x^2+2x$$

$$\int dy=\int (x^2+2x)\,dx$$

$$y=\frac{x^3}{3}+x^2+c$$

11. $x\cdot y'=y\cdot \ln y$

د تمرینورکړي څخه ورکول کیږي (د ln y له امله)، چې y > 0 باید باور ولري. د دیفرنځیالمساوات پسی کارونی لپاره یواځي x ≠ 0 نیول شوی.

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=y\cdot \ln y$$

نیونه : Voraussetzung: $x\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y\cdot \ln y}=\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y\cdot \ln y}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \quad f(x)\triangleq \ln y.$$

$$\int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy=\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln y|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln y|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln y=c\cdot x$$

$$e^{\ln y}=e^{c\cdot x}$$

$$y=e^{c\cdot x}$$

اوبی دیفرنځیالمساوات د x = 0 لپاره هم پوره کوي، چی له دې امله دا ټولیز اوبی دی

پارتیکولار اوبیونه : $y=0$

12. $(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0$

د پارتیکیوالر اوبی په څیر y = 0 سملاسي پیژندل کیږي. .ددیفرنځ-یالمساوات د نورو اوبیو لپاره لمړی بایدy ≠ 0 ونیول شي اوx ≠ 1 - 0 دا په دې مانا چی y.(1 - x)²≠0

نیونه : Voraussetzung: $y\cdot(1-x^2)\neq 0$

$$(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0 \quad \|:y(1-x^2)$$

$$\frac{dy}{y}+\frac{x}{1-x^2}\,dx=0$$

$$\int \frac{dy}{y}=-\int \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|} + c_1$$

$$= (e^{\ln|1-x^2|})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = c \cdot \sqrt{|1-x^2|}$$

$e^{c_1} = c$

د $c = 0$ سره په دې کې پارتیکیو-لار اوبې دننه یا خوندي دی.

د $1 - x^2 = 0$ لپاره،دا په دې مانا ، چې $|x| = 1$ اوبې هم دیفرنځیالمسا-وات پوره کوي، داسې چې دا ټولیز اوبې انځوروي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\int dy = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$y = -\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$= -\int \frac{dz}{z}$$

$$= -\ln|z| + c$$

$$= -\ln|\sin x + \cos x| + c$$

بدلون (سبستیچیوشن)

$z = \sin x + \cos x$

$\Rightarrow dz = (\cos x - \sin x)\, dx$

14. $y' = e^x \cdot y$

$y = 0$: پارتیکولار اوبیونه

Voraussetzung: $y \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^x\, dx$$

$$\ln|y| = e^x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{e^x + c_1} = e^{(e^x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{(e^x)}$$

د $c = 0$ سره په دې کې ټوټه اوبیونه خوندي ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

15. $\sqrt{y'} = y' \cdot x$

زیکولار اوبیونه: $y' = 0$

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0, \quad x \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{y'}{\sqrt{y'}} \cdot x \quad \blacktriangleright \text{quadrieren}$$ مربع کونه

$$1 = y' \cdot x^2$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dy$$

$$y = -\frac{1}{x} + c \quad \blacktriangleright \text{für } x \neq 0$$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

16. $y' = (y \cdot y')^2$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ زینکولار اوبی

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \quad 1 = y^2 \cdot y'$$

$$1 = y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\int y^2\, dy = \int dx$$

$$\frac{1}{3} y^3 = x + c_1$$

$c = 3c_1$

$$y = \sqrt[3]{3x + c}$$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

17. $dy = \dfrac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

$$\int dy = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}\, dx$$

Koeffizientenvergleich: د کوونو انډول

$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad A+B = 0 \\ \text{II:}&\quad 2A+B+C=0 \\ \text{III:}&\quad A = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad 1+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ \text{II:}&\quad 2-1+C=0 \Rightarrow C=-1 \end{aligned}$$

$$\int dy = \int \frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

$$\underline{\underline{\int dy = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + c}}$$

18. $y' = \dfrac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$

دواړه اینتیګرالونه همغه فورم لري
او د ۲ . ۵ تمرین ۷۴ سره په
پرتله ریکورزیونفرمول تاکل کیږي.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx =$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$$

$$\int y^2\sqrt{y^2+9}\,dy = \int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx$$

$$\frac{y}{4}\sqrt{(y^2+9)^3} - \frac{9}{4}\int\sqrt{y^2+9}\,dy =$$

$$= \frac{x}{4}\sqrt{(x^2+4)^3} - \frac{4}{4}\int\sqrt{x^2+4}\,dx \quad \| \cdot 4$$

$$y\sqrt{(y^2+9)^3} - 9\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+9} + \frac{9}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|\right] =$$

$$= x\sqrt{(x^2+4)^3} -$$

$$-4\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4} + 2\ln|x+\sqrt{x^2+4}|\right] + c$$

$$y(y^2+9)\sqrt{y^2+9} - \frac{9}{2}y\sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+4)\sqrt{x^2+4} - 2x\sqrt{x^2+4} -$$

$$-8\ln|x+\sqrt{x^2+4}| + c$$

$$\frac{y}{2}(2y^2+9)\sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+2)\sqrt{x^2+4} - 8\ln|x+\sqrt{x^2+4}| + c$$

اوبیونه یواځي په ایمپلیخیت فورم
ممکن ده.

$$\underline{\underline{y(2y^2+9)\sqrt{y^2+9} - 81\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =}}$$

$$\underline{\underline{= x(2x^2+4)\sqrt{x^2+4} - 16\ln|x+\sqrt{x^2+4}| + c}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

19. $y \cdot x \cdot \sin(2x) = y'$

Partikuläre Lösung: $y=0$

Voraussetzung: $y \neq 0$

$\blacktriangleright\ x \cdot \sin 2x = y' \cdot \frac{1}{y}$

$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = x \cdot \sin 2x$

پارخیل اینتیگرال

$$\int \frac{dy}{y} = \int \underset{\downarrow\, u}{x} \cdot \underbrace{\sin 2x\, dx}_{dv}$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx$$

$$\ln |y| = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x} + c_1$$

$$= e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

د $c=0$ سره پارتیکیوالر اوبی په دې کې خوندي دی.

$$y = c \cdot e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)}$$

20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$

$dx = \ln y\, dy$

$$\int dx = \int \ln y\, dy$$

$$x = y(\ln y - 1) + c$$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-x})$

دا چې دواړه اینتیګرالونه برابر فورم لري بسیا کوي، چې یو وشمیرل شي

بدلون (سبستیچیوشن)

$t = e^x \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

$$\int \frac{dy}{e^y + e^{-y}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x}$$

$$= \int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} + 1}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \text{Arctan}\ t + c$$

$$= \text{Arctan}\ e^x + c$$

اوبی په ایمپلیځیتفورم

$$\text{Arctan}\ e^y = \text{Arctan}\ e^x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 \cdot y^3$

$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow y'^3 = x^2 \cdot y^3$

$\underline{\underline{y=0}}$:پارتیکولار اوبیونه

دریمه ریښه یی راوستل کیږي.
یا یی ۳ . جذر نیول کیږي

نیونه ؛ Voraussetzung: $y \neq 0$

$y'^3 \cdot \frac{1}{y^3} = x^2$

$\frac{y'}{y} = x^{\frac{2}{3}}$

$\frac{dy}{y} = x^{\frac{2}{3}} \cdot dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int x^{\frac{2}{3}} dx$

$\ln|y| = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c_1$

$e^{\ln|y|} = e^{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+c_1} = e^{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}}}}$

د $c = 0$ سره پارتیکیوالر اوبی
په دې کی خوندي دی.

23. $(x+y)^2 = y'$

لمړی په سبستیچیوشن پیل کوو.

$z = x + y; \quad y = z - x$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(z-x)}{dx}$

$= \frac{dz}{dx} - \frac{dx}{dx}$

$= \frac{dz}{dx} - 1$

$z^2 = \frac{dz}{dx} - 1$

$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1$

$\frac{dz}{z^2+1} = dx$

$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx$

$\text{Arctan } z = x + c$

$z = \tan(x+c)$

$x + y = \tan(x+c)$

$y = \underline{\underline{\tan(x+c) - x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

24. $y'^2 \cdot y = x^2 \cdot y' - y'$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ ـ ټينګولاراوښونه

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$

Voraussetzung: $y' \neq 0$ ښونه

$\Rightarrow$ په y' ويشنه اجازه لري

$y' \cdot y = x^2 - 1$

$\frac{dy}{dx} \cdot y = x^2 - 1$

$\int y\, dy = \int (x^2 - 1)\, dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} - x + c_1 \quad \| \cdot 2$

$c = 2c_1$

$y^2 = \frac{2}{3} x^3 - 2x + c$

$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3} x^3 - 2x + c}$

$y = a = \text{const.}$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

$y'^2 = x^2 + 2x$

$y' = \pm \sqrt{x^2 + 2x}$

$= \pm \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1}$

$= \pm \sqrt{(x+1)^2 - 1}$

$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{(x+1)^2 - 1}$

$\int dy = \pm \int \sqrt{(x+1)^2 - 1}\, dx$

سبستيچيوشن :

$z = x + 1 \Rightarrow dx = dz$

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx =$

$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$

$y = \pm \int \sqrt{z^2 - 1}\, dz$

$= \pm \left[\frac{z}{2} \sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| \right] + c$

$y = \pm \frac{1}{2} [(x+1) \sqrt{x^2 + 2x} -$

$- \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}|] + c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

26. $y' \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$

پارخیل(ټوټه-) اینتیګرال

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

$$\frac{dy}{dx} \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$$

$$\int \underbrace{\text{Arcsin}\, y}_{u} \underset{\downarrow}{d}\underset{dv}{y} = \int x^2\, dx$$

$$y \cdot \text{Arcsin}\, y - \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \frac{1}{3} x^3$$

$$y \cdot \text{Arcsin}\, y + \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{3} x^3 + c$$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

بدلون (سبستیچیوشن)

$$x^2 = z \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$$

$$x \cdot e^{x^2} = \frac{dy}{dx} \cdot e^y$$

$$\int e^y \cdot dy = \int x \cdot e^{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^z\, dz$$

$$e^y = \frac{1}{2} e^z + c$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\ln (e^y) = \ln \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

$$y = \ln \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

28. $y \cdot \ln x = y'$

$\underline{y=0}$: پارتیکولار اوبیونه

نیونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{y} \cdot y'$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \ln x\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|y| = x\cdot\ln x - x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{x(\ln x-1)+c_1} = e^{x(\ln x-1)}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c\cdot e^{x(\ln x-1)}$$

د $c=0$ سره پارتیکیوالر اوبی په دې کې خوندي دی.

29. $x\cdot\sinh x = y'\cdot\cosh y$

پارځیل اینتیګرال

$$x\cdot\sinh x = \frac{dy}{dx}\cdot\cosh y$$

$$\int\cosh y\cdot dy = \int \underset{u}{x}\cdot\underbrace{\sinh x\,dx}_{dv}$$

$$= x\cdot\cosh x - \int\cosh x\,dx$$

$$\sinh y = x\cdot\cosh x - \sinh x + c$$

$$y = \text{Arsinh}\,[x\cdot\cosh x - \sinh x + c]$$

30. $\dfrac{\text{Arsinh}\,x}{\text{Arcosh}\,y} = y'$

پارځیل یا پارشل اینتیګرال

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{Arsinh}\,x}{\text{Arcosh}\,y}$$

$$\int\underbrace{\text{Arcosh}\,y}_{u_1}\,\underbrace{dy}_{dv_1} = \int\underbrace{\text{Arsinh}\,x}_{u_2}\,\underbrace{dx}_{dv_2}$$

$$y\cdot\text{Arcosh}\,y - \int\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\,dy =$$

$$= x\cdot\text{Arsinh}\,x - \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$y\cdot\text{Arcosh}\,y - \sqrt{y^2-1} = x\cdot\text{Arsinh}\,x - \sqrt{x^2+1} + c$$

۱ . ۲ . ۳ دیفرنځیالمساوات د هوموجینو اووبنتونکو سره

پام وړ : یو څو د دې اوبیونو دیفرنځیالمساوات د هوموجین واریابلو سره دیفرنځیا- لمساوات نه دي، مګر دا اجازه ورکوي یا ځان دې ته پرېږدي، چې د سبستیچیوشن $y = x.z$ له لارې اوبی شي (تمرین ۸ ، ۱۲ ، ۱۶ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۲۰)

1. $y'\cdot x = -(x+y)$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = z\cdot dx + x\cdot dz$

$dy\cdot x = -(x+y)\,dx$

$(z\cdot dx + x\cdot dz)x = -x\cdot dx - x\cdot z\cdot dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \neq 0$: پس په x ویشنه اجازه لري

$$z\cdot dx + x\cdot dz = -dx - z\cdot dx$$
$$x\cdot dz = dx(-1-2z)$$
$$-\frac{dz}{1+2z} = \frac{dx}{x}$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{2}{1+2z}\,dz = \int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{2}{1+2z}\,dz \triangleq \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+2z| = \ln|x| + c_1$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| = \ln|x| + c_1$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| - \ln|x| = c_1$$
$$\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \frac{2}{2}\ln|x| = -c_1$$
$$\frac{1}{2}\left[\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \ln x^2\right] = -c_1 \quad \|\cdot 2$$
$$\ln x^2\cdot\left|1+\frac{2y}{x}\right| = -2c_1$$
$$\ln|x^2+2yx| = -2c_1$$
$$e^{\ln|x^2+2yx|} = e^{-2c_1}$$
$$x^2+2yx = c$$
$$y = \frac{c-x^2}{2x}; \quad x \neq 0$$

$$e^{-2c_1} = c$$

$y=0$ :: پارتیکولار اوبیونه

2. $y'\cdot x = y$

دا دیفرنشیلامساوات په ساده توګه د اووښتونو یا واریابلو بیلولو له لاري اوبی کیدی شي.

نمونه : Voraussetzung: $y \neq 0,\ x \neq 0$

$$\Rightarrow y'\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$
$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\underline{\underline{y = c \cdot x}}$$

په دې اوبيونوکي پارتيکيولاراوبيونې خوندي دي(د $c = 0$ سره) اود $x = 0$ لپاره هم ، دا په دې مانا، چې دا ټولېز اوبې دي.

3. $y' = \dfrac{x+y}{x}$

د وظيفي ورکوني سره سم لاسی $x \neq 0$ ورکوي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

$$dy = \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = (1+z)\,dx$$

$$x \cdot dz = dx$$

$$dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$z = \ln|x| + c$$

$$\underline{\underline{y = x(\ln|x| + c)}}$$

4. $y' \cdot x^2 - y \cdot x = x^2 + y^2$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$dy \cdot x^2 - y \cdot x \cdot dx = (x^2 + y^2)\,dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)x^2 - x^2 \cdot z \cdot dx = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\,dx$$

نيونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ويش

$$x \cdot dz + z \cdot dx - z \cdot dx = (1+z^2)\,dx$$

$$x \cdot dz = (1+z^2)\,dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctan } z = \ln|x| + c$$

$$\tan(\text{Arctan } z) = \tan(\ln|x| + c)$$

$$z = \tan(\ln|x| + c)$$

$$\underline{\underline{y = x \cdot \tan(\ln|x| + c)}}$$

د $x \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. $y' \cdot x \cdot y = y^2 - x^2$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$dy \cdot x \cdot y = (y^2 - x^2)\,dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx) \cdot x^2 \cdot z = (x^2 \cdot z^2 - x^2)\,dx$$

نیونه: $x \,|\!= 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)z = (z^2 - 1)\,dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx - dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = -dx$$

$$\int z \cdot dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = -\ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = -2\ln|x| + 2c_1$$

$c = 2c_1$

$$= c - \ln x^2$$

$z = \frac{y}{x}$

$$y = \pm x\sqrt{c - \ln x^2}; \quad x \neq 0$$

6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$

د وظيفي ورکړې څخه روښانه ده، چې همدا اوس $y \,|\!= 0$ او $x \,|\!= 0$ باور لري.

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \| \cdot xy$$

$$xyy' = x^2 + y^2$$

$$x^2 \cdot z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\,dx \quad \| : x^2$$

$$z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (1 + z^2)\,dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = dx + z^2 \cdot dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = dx$$

$$z \cdot dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int z \cdot dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = \ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = 2\ln|x| + 2c_1$$

$2c_1 = c; \quad z = \frac{y}{x}$

$$y = \pm x\sqrt{\ln x^2 + c}$$

7. $dy \cdot x = (y - x) \cdot dx$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$z = \frac{y}{x}$

$x^2 \cdot dz + x \cdot z \cdot dx = (x \cdot z - x) \cdot dx$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x ویش

$x \cdot dz + z \cdot dx = z\,dx - dx$

$x \cdot dz = -dx$

$\int dz = -\int \frac{dx}{x}$

$z = -\ln|x| + c$

$y = x(c - \ln|x|); \quad x \neq 0$

8. $y' - \frac{y}{x} = \tan\frac{y}{x}$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$\frac{y}{x} = z$

د وظیفي ورکړی څخه روښانه ده، چې همدا اوس $x \neq 0$ لاس ته راخي.

$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz \mathrel{\hat=} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

$z = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} - z = \tan z$

$dy = (z + \tan z)\,dx$

$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx + \tan z \cdot dx$

$x \cdot dz = \tan z \cdot dx$

$\int \frac{dz}{\tan z} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|\sin z| = \ln|x| + c_1$

$e^{\ln|\sin z|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$\sin z = c \cdot x$

$z = \text{Arcsin}\,(c \cdot x)$

$y = x \cdot \text{Arcsin}\,(c \cdot x)$

9. $(x + y) \cdot dx - (x - y) \cdot dy = 0$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$(x + x \cdot z) \cdot dx - (x - x \cdot z) \cdot (x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x ویش

$(1 + z)\,dx - (1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

$(1 + z)\,dx - x(1 - z)\,dz - (z - z^2)\,dx = 0$

$(1 + z^2)\,dx - x(1 - z)\,dz = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{2z}{1+z^2}\,dz \triangleq \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$z=\frac{y}{x}$$

اوبیونی یواځي په ایملیخیته
بڼه یا فورم ورکړ شوی دی.

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{x}=\int\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{z}{1+z^2}\right)dz$$

$$=\int \frac{dz}{1+z^2}-\frac{1}{2}\int \frac{2z}{1+z^2}\,dz$$

$$\ln|x|=\operatorname{Arctan} z-\frac{1}{2}\ln|1+z^2|+c$$

$$\ln|x|=\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{x^2}+c$$

د $x \neq 0$ لپاره

10. $x^2+xy+y^2=x^2\cdot y'$

$y=z\cdot x \Rightarrow dy=z\cdot dx+x\cdot dz$

$$(x^2+xy+y^2)\,dx=x^2\cdot dy$$

$$(x^2+x^2z+x^2z^2)\,dx=x^2(z\cdot dx+x\cdot dz)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(1+z+z^2)\,dx=z\cdot dx+x\cdot dz$$

$$(1+z^2)\,dx=x\cdot dz$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{Arctan} z=\ln|x|+c$$

$$\tan(\operatorname{Arctan} z)=\tan(\ln|x|+c)$$

$$z=\tan(\ln|x|+c)$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$y=x\cdot\tan(\ln|x|+c)$$

د $x \neq 0$ لپاره

11. $y'=\dfrac{2xy}{3x^2-y^2}$

$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$y'\cdot(3x^2-y^2)=2xy$$

$$dy\cdot(3x^2-y^2)=2xy\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3x^2-x^2z^2)=2x^2z\cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3-z^2)=2z\cdot dx$$

$$3x\cdot dz+3z\cdot dx-xz^2\cdot dz-z^3\,dx=2z\cdot dx$$

$$(3x-xz^2)\,dz+(z-z^3)\,dx=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اینټګرال اینټګرالونی

$$x(3-z^2)\,dz=(z^3-z)\,dx$$

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz$$

په ټوټه ماتونو ټوټه کیږي

$$\frac{3-z^2}{z^3-z}=\frac{3-z^2}{z(z^2-1)}$$

$$=\frac{3-z^2}{z(z+1)(z-1)}$$

$$=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z-1}$$

$$=\frac{A(z^2-1)+B(z-1)z+C(z+1)z}{z^3-z}$$

$$=\frac{z^2(A+B+C)+z(-B+C)-A}{z^3-z}$$

د ضریبونو پرتله:

$$\text{I:}\quad A+B+C=-1$$
$$\text{II:}\quad -B+C=0$$
$$\text{III:}\quad -A=3;\quad A=-3$$

$$\text{I:}\quad -3+B+C=-1$$
$$\left.\begin{array}{r}B+C=2\\ \text{II:}\quad -B+C=0\end{array}\right\}+$$
$$2C=2;\quad C=1$$

$$\text{II:}\quad -B+C=0;\quad B=1$$

$$=\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}$$

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right)dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$-3\ln|z|+\ln|z+1|+\ln|z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z|^3+\ln|(z+1)(z-1)|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z^3|+\ln|z^2-1|=\ln|x|+c_1$$

$$\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|}=e^{\ln|x|+c_1}$$

$$=e^{\ln|x|}\cdot e^{c_1}$$

$$e^{c_1}=c$$

$$\frac{z^2-1}{z^3}=c\cdot x$$

$$z^2-1=c\cdot x\cdot z^3$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{y^2}{x^2}-1=c\cdot\frac{y^3}{x^2}\quad\Big\|\cdot x^2$$

$$y^2-x^2=c\cdot y^3;\quad x\neq 0$$

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. $y'=\frac{y}{x}\cdot\ln\frac{y}{x}$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$\frac{y}{x}=z$$

د پوښتنوسملاسی x>0,y>0 لاس ته راځي دا په دې مانا ، چې z>0 هم

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,dz\triangleq\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=z\cdot\ln z$$

$$x\cdot dz+z\cdot dx=z\cdot\ln z\cdot dx$$

$$x\cdot dz=z(\ln z-1)\,dx$$

$$\int\frac{dz}{z(\ln z-1)}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln z-1|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z-1=c\cdot x$$

$$\ln z=c\cdot x+1$$

$$e^{\ln z}=e^{c\cdot x+1}$$

$$z=e^{c\cdot x+1}$$

$$\underline{\underline{y=x\cdot e^{c\cdot x+1};\quad x>0}}$$

13. $x\cdot dy-y\cdot dx=y\cdot dy$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$(x-y)\,dy=y\cdot dx$$

$$(x-x\cdot z)(x\cdot dz+z\cdot dx)=x\cdot z\cdot dx$$

نیونه: 0 =| x له دې امله په x ویش

$$(1-z)(x\cdot dz+z\cdot dx)=z\cdot dx$$

$$x\cdot dz+z\cdot dx-zx\cdot dz-z^2\cdot dx=z\cdot dx$$

$$x(1-z)\,dz-z^2\cdot dx=0$$

وریسی نیونی :: $z\neq0$ (d.h. $y\neq0$)

$$\Rightarrow\frac{1-z}{z^2}\,dz=\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}\right)dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{z}-\ln|z|=\ln|x|+c$$

$$-\frac{1}{z}=\ln|x|+\ln|z|+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{1}{z}=\ln|x\cdot z|+c \quad \| \cdot z$$

$$-1=z\cdot\ln|x\cdot z|+c\cdot z$$

$$-1=\frac{y}{x}\cdot\ln|y|+c\cdot\frac{y}{x}$$

$z=\frac{y}{x}$ په ایمپلیخیته بنه اوبیونه

$$\frac{y}{x}(\ln|y|+c)+1=0;\quad x\neq 0;\quad y\neq 0$$

14. $y^2+(x^2-xy)y'=0$

$$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$y'(x^2-xy)=-y^2$$

$$dy(x^2-xy)=-y^2\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(x^2-x^2z)=-x^2z^2\cdot dx$$

نیونه: $x\,|=0$ له دي امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(1-z)=-z^2\cdot dx$$

$$x(1-z)\,dz+(z-z^2)dx=-z^2\,dx$$

$$x(1-z)\,dz=-z\cdot dx$$

وریسی نیونی : $z\neq 0$ (d.h. $y\neq 0$)

په z ویش اجازه لري

$$\frac{1-z}{z}dz=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{z}-1\right)dz=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z|-z=-\ln|x|+c$$

$$\ln|z|+\ln|x|=z+c$$

$$\ln|z\cdot x|=z+c$$

$z=\frac{y}{x}$ په ایمپلیخیته بنه اوبیونه

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+c;\quad x\neq 0;\quad y\neq 0$$

15. $y^2\cdot dx-3x^2\cdot dx+2xy\cdot dy=0$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$0=(y^2-3x^2)\,dx+2xy\cdot dy$$

$$=(x^2\cdot z^2-3x^2)\,dx+2x^2\cdot z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

نیونه: $x\,|=0$ له دي امله په x^2 ویش

$$0=(z^2-3)\,dx+2z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$0=(3z^2-3)\,dx+2xz\cdot dz$$

$$-3(z^2-1)\,\mathrm{d}x = 2xz\cdot\mathrm{d}z$$

$$\int \frac{2z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z \mathrel{\hat{=}} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$-3\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{2z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$$

$$-3\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{2z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$$

$$-3\ln|x| = \ln|z^2-1| + c_1$$

$$e^{c_1} = c_2$$

$$e^{-3\ln|x|} = e^{\ln|z^2-1|+c_1}$$

$$e^{\ln|x^{-3}|} = e^{\ln|z^2-1|}\cdot e^{c_1}$$

$$c = \frac{1}{c_2}; \quad z = \frac{y}{x}$$

$$x^{-3} = (z^2-1)\cdot c_2$$

$$z^2 - 1 = \frac{c}{x^3}$$

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = \frac{c}{x^3} \quad \| \cdot x^2$$

$$y^2 - x^2 = \frac{c}{x}$$

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{x^2 + \frac{c}{x}}; \quad x \neq 0}}$$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

$$y = x\cdot z \Rightarrow \mathrm{d}y = x\cdot\mathrm{d}z + z\cdot\mathrm{d}x$$

$$x\cdot\mathrm{d}y = (y + \sqrt{y^2-x^2})\,\mathrm{d}x$$

$$x(x\cdot\mathrm{d}z + z\cdot\mathrm{d}x) = (xz + \sqrt{x^2z^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$$

$$= (xz + x\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}x$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x ويش

$$x\cdot\mathrm{d}z + z\cdot\mathrm{d}x = z\cdot\mathrm{d}x + \sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}x$$

$$x\cdot\mathrm{d}z = \sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|z + \sqrt{z^2-1}| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{z^2-1}|} = e^{\ln|x|+c_1} = e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$z + \sqrt{z^2-1} = c\cdot x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}=c\cdot x \quad \|\cdot x$$

$$\underline{\underline{y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^2; \quad x \neq 0}}$$

پـه ایملیخیت فورم اوبی

17. $xy'=y(\ln y-\ln x)$

$y=x\cdot z \Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x$

$\frac{y}{x}=z$

$$x\cdot y'=y\cdot \ln\frac{y}{x}$$

$$x\cdot \mathrm{d}y=y\cdot \ln\frac{y}{x}\cdot \mathrm{d}x$$

$$x(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)=x\cdot z\cdot \ln z\cdot \mathrm{d}x \quad \|:x$$

$$x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x=z\cdot \ln z\cdot \mathrm{d}x$$

$$x\cdot \mathrm{d}z=z(\ln z-1)\,\mathrm{d}x$$

د پوښتنوسملاسی x>0,y>0 لاس ته راځي دا په دې مانا ، چې z>0 هم

$$\frac{\mathrm{d}z}{z(\ln z-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,\mathrm{d}z \triangleq \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,\mathrm{d}z=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|\ln z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln z-1|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z-1=c\cdot x$$

$$\ln z=c\cdot x+1$$

$$e^{\ln z}=e^{c\cdot x+1}$$

$z=\frac{y}{x}$

$$z=e^{c\cdot x+1}$$

$$\underline{\underline{y=x\cdot e^{c\cdot x+1}; \quad x>0}}$$

18. $y\cdot \mathrm{d}x+\sqrt{4xy}\cdot \mathrm{d}y=x\cdot \mathrm{d}y$

$y=x\cdot z \Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x$

د پوښتنکونی څخه لاس ته راځي، چې تل $4xy \geq 0$ باید باور ولري دا په دې مانا چې $x.y \geq 0$ هم

$$y\cdot \mathrm{d}x=(x-\sqrt{4xy})\,\mathrm{d}y$$

$$x\cdot z\cdot \mathrm{d}x=(x-\sqrt{4x^2z})(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)$$

$$=(x-2x\sqrt{z})(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ویش

$$z\cdot \mathrm{d}x=(1-2\sqrt{z})(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)$$

$$z\cdot \mathrm{d}x=x(1-2\sqrt{z})\,\mathrm{d}z+(z-2z\sqrt{z})\,\mathrm{d}x$$

$$0=x(1-2\sqrt{z})\,\mathrm{d}z-2z\sqrt{z}\,\mathrm{d}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري نيوځي $\because z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

$$\frac{1-2\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}}\,dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{2z\sqrt{z}}\,dz - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \ln|z| = \ln|x| + c$$

$$-z^{-\frac{1}{2}} = \ln|x| + \ln|z| + c$$

$$-\frac{1}{\sqrt{z}} = \ln|x\cdot z| + c \qquad z=\frac{y}{x}$$

$$-\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln|y| + c$$

$$0 = \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| + c; \quad x\cdot y > 0$$

په ايمپليځيته بڼه اوبيونه

19. $\frac{2y(y-x)}{x^2-2xy+y^2} = y'$

$$y' = \frac{2y(y-x)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y}{x-y}$$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = x\cdot dz + z\cdot dx$

$$0 = (x-y)\,dy + 2y\cdot dx$$

$$0 = (x-xz)(x\cdot dz + z\cdot dx) + 2xz\cdot dx$$

نيونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ويش

$$0 = (1-z)(x\cdot dz + z\cdot dx) + 2z\cdot dx$$

$$0 = x(1-z)\,dz + (z - z^2 + 2z)\,dx$$

$$0 = x(1-z)\,dz + (3z - z^2)\,dx$$

$$-x(1-z)\,dz = (3z - z^2)\,dx$$

$$\int \frac{1-z}{3z-z^2}\,dz = -\int \frac{dx}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{z-1}{z(z-3)}\,dz = -\int \frac{dx}{x}$$

یو پارشلماتبیلونه یا تجزیه ساده ورکوي

$$\blacktriangleright \int \left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-3}\right)dz = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z-3}\right)dz$$

$A=\frac{1}{3}; \quad B=\frac{2}{3}.$

$$\frac{1}{3}\ln|z|+\frac{2}{3}\ln|z-3| = -\ln|x|+c_1 \quad \| \cdot 3$$

$$\ln|z|+\ln(z-3)^2 = -3\ln|x|+3c_1$$

$$\ln|z(z-3)^2| = \ln|x^{-3}|+3c_1$$

$$e^{\ln|z(z-3)^2|} = e^{\ln|x^{-3}|+3c_1}$$

$$= e^{\ln|x^{-3}|}\cdot e^{3c_1}$$

$e^{3c_1}=c$

$$z(z-3)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$z=\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}-3\right)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$$\frac{y}{x^3}(y-3x)^2 = c\cdot x^{-3} \quad \| \cdot x^3$$

$$\underline{\underline{y(y-3x)^2 = c; \quad x \neq 0}}$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

20. $y' = \frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

$$dy = \left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)dx$$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = x\cdot dz + z\cdot dx$

$\frac{y}{x}=z$

$$x\cdot dz + z\cdot dx = (z+\sqrt{1+z^2})\,dx$$

$$= z\cdot dx + \sqrt{1+z^2}\,dx$$

$$x\cdot dz = \sqrt{1+z^2}\,dx$$

د پوښتنورکوونی خخه سملاسي $x \neq 0$ ورکوي، چی دا نورباید فرض نه شي

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$$

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}| = \ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{1+z^2}|} = e^{\ln|x|+c_1} = e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z+\sqrt{1+z^2} = c\cdot x$$

$z=\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = c\cdot x \quad \| \cdot x$$

$$\underline{\underline{y+\sqrt{x^2+y^2} = c\cdot x^2; \quad x \neq 0}}$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ - د برنولي متود له مخې اوبی

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + 2xuv = x \cdot e^{-x^2}$$

$$u \underbrace{\left(\frac{dv}{dx} + 2xv\right)}_{=0} + v \cdot \frac{du}{dx} = x \cdot e^{-x^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int x\,dx$$

$$\ln|v| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln|v|} = e^{-x^2 + c_1} = e^{-x^2} \cdot e^{c_1}$$

Wählen: $c_1 = 0$

$$\Rightarrow v = e^{-x^2}$$

$$u \cdot 0 + e^{-x^2} \cdot \frac{du}{dx} = x \cdot e^{-x^2} \quad \| : e^{-x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int x\,dx$$

$$u = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

۲ - دلاگرانج د متود له مخې اوبی

$$y' + 2xy = 0$$

$$dy = -2xy \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int x\,dx$$

1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$

$$y = u \cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u = u(x); \quad v = v(x)$$

د برنولي متود له مخې

رامنخ ته شوي اینتیگرالثابته c_1 تل په خوښه ټاکل کیدونکی ده. له دي امله c_1 داسي ټاکل کیږي، چي وروسته شمیرنه یی ترممکنی اندازي ساده شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|y| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-x^2+c_1} = e^{-x^2}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c\cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y = \underline{\underline{c(x)\cdot e^{-x^2}}}$$

دا افاده د y' لپاره په دیفرنشیالمساوات اینسول کیږي.

$$y' = c'(x)\cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\cdot c(x) + 2x\cdot c(x)\cdot e^{-x^2} = = x\cdot e^{-x^2}$$

$$c'(x)\cdot e^{-x^2} = x\cdot e^{-x^2} \quad \| : e^{-x^2}$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int x\,dx$$

$$\underline{c(x) = \frac{x^2}{2} + k}$$

$$y = \underline{\underline{e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + k\right)}}$$

2. $y' = e^x - y$

$$y = u\cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$$

$$u = u(x); \quad v = v(x)$$

١ - د برنولي متود له مخې اوبی

$$u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx} = e^x - u\cdot v$$

$$\underbrace{u\left(\frac{dv}{dx} + v\right)}_{=0} + v\cdot\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\int\frac{dv}{v} = -\int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln|v| = -x + c_1$$

$$\underline{v = e^{-x}}$$

$$u\cdot 0 + e^{-x}\cdot\frac{du}{dx} = e^x \quad \| \cdot e^x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{du}{dx}=e^{2x}$$

$$\int du=\int e^{2x}\,dx$$

$$u=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}+c\cdot e^{-x}$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y|=-x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-x+c_1}=e^{-x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-x}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{-x}$$

په دیفرنشیالمساواتکي کیږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)=e^{x}-c(x)\cdot e^{-x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}=e^{x}\quad\|\cdot e^{x}$$

$$\frac{dc(x)}{dx}=e^{2x}$$

$$\int dc(x)=\int e^{2x}\,dx$$

$$c(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+k$$

$$y=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+k\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}+k\cdot e^{-x}$$

3. $y'-y=x^2-1$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ - د برنولي متود له مخی اوبی

$$u\cdot v'+v\cdot u'-u\cdot v=x^2-1$$

$$u\underbrace{(v'-v)}_{=0}+v\cdot u'=x^2-1$$

$$\frac{dv}{dx}=v$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int dx$$

$$\ln|v|=x+c_1$$

$c_1=0$ وټاکو

$$\underline{v=e^x}$$

$$u\cdot 0+e^x\cdot u'=x^2-1 \quad \|:e^x$$

$$\frac{du}{dx}=(x^2-1)\cdot e^{-x}$$

$$\int du=\int x^2\cdot e^{-x}dx-\int e^{-x}dx$$

$$u=\int x^2\cdot e^{-x}dx+e^{-x}$$

$\int x^2\cdot e^{-x}dx$

دا پورته اینتیګرال د پارشل ایتیګرال سره اوبی کیږي

$$\int x^2\cdot e^{-x}dx=x^2\cdot(-e^{-x})-\int(-e^{-x})\cdot 2x\,dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\Big[x(-e^{-x})-$$

$$-\int(-e^{-x})dx\Big]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x^2 \cdot e^{-x}\,dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx$$

$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

$$\underline{u = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= [-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + c] \cdot e^x$$

$$= -(x^2 + 2x + 2) + (e^{-x} + c)e^x$$

$$= ce^x - x^2 - 2x - 1$$

۲ – دلاگرانج د متود له مخې اوبې

:

$$y' - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln |y| = x + c_1$$

$$y = c \cdot e^x \qquad c = e^{c_1}$$

$$y = c(x) \cdot e^x$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x$$

$$c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = x^2 - 1$$

$$c'(x) \cdot e^x = x^2 - 1 \quad \| : e^x$$

$$c'(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$$

دا اینتیکریشن همدا په برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = \int (x^2 - 1) \cdot e^{-x}\,dx$$

$$\underline{c(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + k}$$

$$y = c(x) \cdot e^x = -x^2 - 2x - 2 + 1 + ke^x$$

$$= ke^x - x^2 - 2x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $y' = e^{3x} - 2y$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ - د برنولي متود له مخې اوبې

$$u \cdot v' + v \cdot u' = e^{3x} - 2u \cdot v$$

$$u\underbrace{(v' + 2v)}_{=0} + v \cdot u' = e^{3x}$$

$$\frac{dv}{dx} = -2v$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int dx$$

$$\ln|v| = -2x + c_1$$

وټاکو $c_1 = 0$

$$\underline{v = e^{-2x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-2x} \cdot u' = e^{3x} \quad \| : e^{2x}$$

$$\frac{du}{dx} = e^{5x}$$

$$\int du = \int e^{5x} dx$$

$$\underline{u = \frac{1}{5} e^{5x} + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \left(\frac{1}{5} e^{5x} + c\right) e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{5} e^{3x} + c \cdot e^{-2x}$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y' + 2y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int dx$$

$$\ln|y| = -2x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-2x + c_1} = e^{-2x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=c\cdot e^{-2x} \Rightarrow \underline{\underline{y=c(x)\cdot e^{-2x}}}$$

په دیفرنشیالمساوات کی دې کیښوول شي

$$y'=c'(x)\cdot e^{-2x}-2e^{-2x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-2x}-2e^{-2x}\cdot c(x)=e^{3x}-2c(x)\cdot e^{-2x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-2x}=e^{3x} \quad \| \cdot e^{2x}$$

$$c'(x)=e^{5x}$$

$$\underline{c(x)=\frac{1}{5}e^{5x}+k}$$

$$y=c(x)\cdot e^{-2x}$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{5}e^{3x}+k\cdot e^{-2x}}}$$

5. $y'\cdot x=y+x^2\cdot \sin x$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ - د برنولي متود له لارې اوبې

$$(u\cdot v'+v\cdot u')\cdot x=u\cdot v+x^2\cdot \sin x$$

$$u\underbrace{(xv'-v)}_{=0}+xv\cdot u'=x^2\cdot \sin x$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=v$$

نیونه: $x \neq c$, په x ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

وټاکی $c_1=0$

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

$$\underline{v=x}$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot u'=x^2\cdot \sin x \quad \| : x^2$$

$$\frac{du}{dx}=\sin x$$

$$\underline{u=-\cos x+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\underline{\underline{x(c-\cos x)}}$$

دا اوبې دیفرنشیالمساوات د $x=0$ لپاره هم پوره کوي، دا په دې مانا چې دا ټولیز اوبې دی.

۲ د لاګرانج متود له لارې اوبی

$$y' \cdot x - y = 0 \quad \| : x$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

دلته هم لمړی x |= 0 غوښتل کیږي، اوبی لکه پورته مګر د x = 0 لپاره به هم باور ولري.

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot x = c(x) \cdot x + x^2 \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot x^2 = x^2 \cdot \sin x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \sin x$$

$$\underline{c(x) = -\cos x + k}$$

$$y = \underline{\underline{x(k - \cos x)}}$$

په دیفرنخیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

۱ – د برنولی متود له لاري اوبی

6. $y'x = x \cdot \sin x - y$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = x \cdot \sin x - u \cdot v$$

$$u\underbrace{(v' \cdot x + v)}_{=0} + x \cdot v \cdot u' = x \cdot \sin x$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = -v$$

نیونه: x |= 0 , ځکه په x ویشنه ،

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = -\ln |x| + c_1$$

$$\ln |v| = \ln \left|\frac{1}{x}\right|$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v=\frac{1}{x}$$

$$u\cdot 0+u'=x\cdot\sin x$$

$$\int du=\int x\cdot\sin x\,dx$$

پارشل یا ټوټه انیتیګریشن

$$u=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+c);\quad x\neq 0$$

۲ . د لاګرانژ متود له لارې‌اوبې

$$y'\cdot x+y=0$$

نیونه: $x\neq 0$, ځکه په x ویشنه ٠

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|x|+c_1}=e^{\ln\left|\frac{1}{x}\right|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=\frac{c}{x}\Rightarrow y=\frac{c(x)}{x}$$

په دیفرنځیالمساوات کې کیږدی

$$y'=\frac{x\cdot c'(x)-c(x)}{x^2}=\frac{c'(x)}{x}-\frac{c(x)}{x^2}$$

$$c'(x)-\frac{c(x)}{x}=x\cdot\sin x-\frac{c(x)}{x}$$

$$c'(x)=x\cdot\sin x$$

دالاندې
$\int x\cdot\sin x\,dx$
اینتیګرال همدا اوس برخه ۱
کې اوبې شو

$$\int dc(x)=\int x\cdot\sin x\,dx$$

$$c(x)=-x\cdot\cos x+\sin x+k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\frac{1}{x}\cdot c(x)$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+k); \quad x\neq 0$$

7. $y'+y+\cos x-e^{2x}=0$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولی متود له لارې اوبې

$$u\cdot v'+v\cdot u'+u\cdot v=e^{2x}-\cos x$$

$$u\underbrace{(v'+v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{2x}-\cos x$$

$$\frac{dv}{dx}=-v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int dx$$

$$\ln|v|=-x+c_1$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکی

$$v=e^{-x}$$

$$u\cdot 0+e^{-x}\cdot u'=e^{2x}-\cos x \quad \|\cdot e^{x}$$

$$u'=e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x$$

$$u=\int(e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x)\,dx$$

$$=\int e^{3x}\cdot dx-\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

دا اینتګرال

$$\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

د بوټه انتیګرال سره اوبی کیږي

$$F=\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\int\sin x\cdot e^{x}\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\int e^{x}\cdot\sin x\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\left[e^{x}(-\cos x)-\int(-\cos x)\cdot e\right.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F=e^{x}\cdot\sin x+e^{x}\cdot\cos x-\underbrace{\int e^{x}\cdot\cos x\,dx}_{F}$$

$$2F=e^{x}\cdot\sin x+e^{x}\cdot\cos x+c_1$$

$$F=\frac{e^{x}}{2}(\sin x+\cos x)+c$$

$c=\frac{1}{2}c_1$

$$u=\frac{1}{3}e^{3x}-F$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{x}(\sin x+\cos x)+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+c\cdot e^{-x}$$

۲ - د اګرانژ متود له لارې اوبې :

$$y'+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y|=-x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-x+c_1}=e^{-x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-x}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{-x}$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)+c(x)\cdot e^{-x}+\cos x-e^{2x}=0$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}=e^{2x}-\cos x\quad\|\cdot e^{x}$$

$$c'(x)=e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x)=\int(e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{x}(\sin x+\cos x)+k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=c(x)\cdot \mathrm{e}^{-x}$

$$=\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}\,(\sin x+\cos x)+k\cdot \mathrm{e}^{-x}$$

8. $y'+ay=b\cdot \mathrm{e}^{cx}$

۱ -د برنولي متود له لارې اوبی

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$u\cdot v'+v\cdot u'+auv=b\cdot \mathrm{e}^{cx}$

$$u\underbrace{(v'+av)}_{=0}+v\cdot u'=b\cdot \mathrm{e}^{cx}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-av$$

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{v}=-a\int \mathrm{d}x$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکی:

$\ln|v|=-ax+c_1$

$$v=\mathrm{e}^{-ax}$$

$$u\cdot 0+\mathrm{e}^{-ax}\cdot u'=b\cdot \mathrm{e}^{cx}\quad \|\cdot \mathrm{e}^{ax}$$

$$u'=b\cdot \mathrm{e}^{x(a+c)}$$

$$u=\frac{b}{a+c}\,\mathrm{e}^{x(a+c)}+c_2$$

$y=u\cdot v$

$$=\frac{b}{a+c}\,\mathrm{e}^{cx}+c_2\cdot \mathrm{e}^{-ax}$$

۲ - د لاګرانژ متود له لارې اوبی

$y'+ay=0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-ay$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-a\int \mathrm{d}x$$

$\ln|y|=-ax+c_1$

$c_2=\mathrm{e}^{c_1}$

$$y=c_2\cdot \mathrm{e}^{-ax}\Rightarrow y=c_2(x)\cdot \mathrm{e}^{-ax}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دیفرنشیالمساوات کي ځای په ځای کړی

$$y' = c_2'(x)\cdot e^{-ax} - ac_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax} - ac_2(x)\cdot e^{-ax} + ac_2(x)\cdot e^{-ax} = b\cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax} = b\cdot e^{cx} \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x) = b\cdot e^{x(a+c)}$$

$$\underline{c_2(x) = \frac{b}{a+c}\, e^{x(a+c)} + k}$$

$$y = c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$= \frac{b}{a+c}\, e^{cx} + k\cdot e^{-ax}$$

9. $y' + ay - b\cdot\sin(cx) = 0$

$y = u\cdot v \Rightarrow y' = u\cdot v' + v\cdot u'$

$y = f(x) = u(x)\cdot v(x)$

۱ - د برنولي متود له لاري اوبی

$$u\cdot v' + v\cdot u' + auv - b\sin cx = 0$$

$$u\underbrace{(v' + av)}_{=0} + v\cdot u' - b\sin cx = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a\int dx$$

$$\ln|v| = -ax + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\underline{v = e^{-ax}}$$

$$u\cdot 0 + e^{-ax}\cdot u' - b\sin cx = 0 \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$u' = b\cdot e^{ax}\cdot\sin cx$$

دا اینتیگرال د ټوټه یا پارشل اینتیگرال له لاري اوبی کیږي

$$u = b\int e^{ax}\cdot\sin cx\, dx$$

$$= -\frac{b}{c}\, e^{ax}\cdot\cos cx + \frac{ab}{c}\int e^{ax}\cdot\cos cx\, dx$$

$$= -\frac{b}{c}\, e^{ax}\cdot\cos cx +$$

$$+\frac{ab}{c}\left[e^{ax}\cdot\frac{\sin cx}{c} - \frac{a}{c}\int e^{ax}\cdot\sin cx\, dx\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u=-\frac{b}{c}\,e^{ax}\cdot\cos cx+\frac{ab}{c^2}\,e^{ax}\cdot\sin cx-$$

$$-\frac{a^2}{c^2}\cdot b\underbrace{\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx}_{u}$$

$$\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)u=\frac{b}{c}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_2$$

$$1+\frac{a^2}{c^2}=\frac{a^2+c^2}{c^2}$$

$$u=\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3$$

$$c_3=c_2\cdot\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\frac{bc}{a^2+c^2}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3\cdot e^{-ax}$$

۲ - د لاگرانژ د متود له لارې اوبې

$$y'+ay=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-ay$$

$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx$$

$$\ln|y|=-ax+c_1$$

$$y=c_2\cdot e^{-ax}\Rightarrow y=c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2=e^{c_1}$$

په دیفرنخیالمساوات کی دې کینبوول شي

$$y'=c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}+ac_2(x)\cdot e^{-ax}-b\cdot\sin cx=0$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}=b\sin cx\quad\|\cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x)=b\cdot e^{ax}\cdot\sin cx$$

دا اینتیگرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبې شو

$$c_2(x)=b\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx$$

$$=\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$=\frac{b}{a^2+c^2}(a\cdot\sin cx-c\cdot\cos cx)+k\cdot e^{-ax}$$

10. $y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{\ln x}$

$$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

د سوالورکونی شخه سملاسی لاس ته راځی $x>0$

Wählen: $c_1=0$ وټاکی:

$$\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

۱ – د برنولي د متود له لاري اوبي

$$u\cdot v'+v\cdot u'=\frac{uv}{x}+\frac{1}{\ln x}$$

$$u\underbrace{\left(v'-\frac{v}{x}\right)}_{=0}+v\cdot u'=\frac{1}{\ln x}$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

$$v=x$$

$$u\cdot 0+x\cdot u'=\frac{1}{\ln x}\quad\Big\|\cdot\frac{1}{x}$$

$$u'=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$u=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$$

$$=\ln|\ln x|+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=x(|\ln|\ln x|+c)$$

۲ – د لاګرانژ دمتودي له لاري وبی

$$y'-\frac{y}{x}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

$c = e^{c_1}$

په دیفرنخیالمساوات کی کیږدی

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x + c(x) = c(x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$c'(x) \cdot x = \frac{1}{\ln x} \quad \Big\| \cdot \frac{1}{x}$$

$$c'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$c(x) = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \, dx$$

$$= \underline{\ln |\ln x| + k}$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= \underline{\underline{x(\ln |\ln x| + k)}}$$

۱ – د برنولی متوډله لارپاوبی

11. $y' = a + bx + cy$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$u \cdot v' + v \cdot u' = a + bx + cuv$$

$$u\underbrace{(v' - cv)}_{=0} + v \cdot u' = a + bx$$

$$\frac{dv}{dx} = cv$$

$$\int \frac{dv}{v} = c \int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وتاکه

$$\ln |v| = cx + c_1$$

$$\underline{v = e^{cx}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارشل ایتیکریشن یا اینتیکراول

$$u \cdot 0 + e^{cx} \cdot u' = a + bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$u' = (a+bx) \cdot e^{-cx}$$

$$u = \int (a+bx) e^{-cx} dx$$

$$= a \int e^{-cx} dx + b \int x \cdot e^{-cx} dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \int x \cdot e^{-cx} dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \left[-\frac{x}{c} e^{-cx} + \frac{1}{c} \int e^{-cx} dx \right]$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} - \frac{bx}{c} e^{-cx} - \frac{b}{c^2} e^{-cx} + c_1$$

$$= -\frac{1}{c} e^{-cx} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1$$

$$y = u \cdot v$$

$$= -\frac{1}{c} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1 \cdot e^{cx}$$

۲ - د لاګرانج متود له لارې اوبې

$$y' - cy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = cy$$

$$\int \frac{dy}{y} = c \int dx$$

$$\ln |y| = cx + c_1$$

$c_2 = e^{c_1}$

$$y = c_2 \cdot e^{cx} \Rightarrow y = c_2(x) \cdot e^{cx}$$

په دیفرنشیالمساوات کې ځای
په ځای کړی یا کیږدی

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx} = a + bx + c \cdot c_2^{(x)} \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} = a + bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$c_2'(x) = (a+bx) e^{-cx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا اینتیگرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c_2(x) = \int (a+bx)e^{-cx}\,dx$$

$$= -\frac{1}{c}e^{-cx}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+c_2$$

$$y = k(x)\cdot e^{cx}$$

$$= -\frac{1}{c}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+k\cdot e^{cx}$$

12. $xy'+1=e^x+y$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$x(u\cdot v'+v\cdot u')+1=e^x+uv$$

$$u\underbrace{(xv'-v)}_{=0}+xv\cdot u'+1=e^x$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=v$$

نیونه: x |= 0 , ځکه په x ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکه

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

$$\underline{v=x}$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot u'+1=e^x$$

$$u'=\frac{e^x-1}{x^2}$$

$$u=\int\frac{e^x}{x^2}\,dx-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$=\int\frac{e^x}{x^2}\cdot dx+\frac{1}{x}$$

د دي لاندې اینتیگرال

$$\int\frac{e^x}{x^2}\,dx$$

اوبی کی د انتیګرایشن لپاره لړی ودیزینه باندې تیریدنه نه شي کیدی

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{e^x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$u = \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$y = u \cdot v = c\cdot x + x\cdot \ln|x| + \frac{x^2}{1\cdot 2!} + \frac{x^3}{2\cdot 3!} + \frac{x^4}{3\cdot 4!} + \ldots$$

für $x \neq 0$

۲ – دلاگرانژمتود له لارې اوبی

$xy' - y = 0$

نیونه: $x \neq 0$, څکه په x ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$y = c\cdot x \Rightarrow y = c(x)\cdot x$$

$c = e^{c_1}$

په دیفرنخیالمساوات کی کیږدی

$$y' = c'(x)\cdot x + c(x)$$

$$x^2\cdot c'(x) + c(x)\cdot x + 1 = e^x + c(x)\cdot x$$

$$x^2\cdot c'(x) + 1 = e^x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$$

دا اینتیگرال همدا اوس تر ۱ لاندې اوبی شویدی.

$$c(x) = \int \frac{e^x}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx = \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= k \cdot x + x \cdot \ln|x| + \frac{x^2}{1 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!} + \frac{x^4}{3 \cdot 4!} + \dots$$

$x \neq 0$

13. $y'(1-x^2) + xy = 1$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ . د برنولي د متود له لاري دا دلته

$$(uv' + vu')(1-x^2) + xuv = 1$$

$$u\underbrace{[v'(1-x^2) + xv]}_{=0} + vu'(1-x^2) = 1$$

$$\frac{dv}{dx}(1-x^2) = -xv$$

نیونه: $|x| = 1$; ويشنه په $1 - x^2$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{-x}{1-x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2}\, dx$$

$$\int \frac{-2x}{1-x^2}\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln|v| = \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + c_1$$

$$= \ln|1-x^2|^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \sqrt{|1-x^2|}$$

د ورپسی اوبیوني لپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$v = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } |x| < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

1. Fall: $v = \sqrt{1-x^2}$; $|x| < 1$

$$u \cdot 0 + \sqrt{1-x^2} \cdot u' \cdot (1-x^2) = 1$$

$$u' = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$u = \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

Substitution: سبستیچیوشن :

$$1 - x^2 = z^2 \Rightarrow dx = -\frac{z \cdot dz}{x}$$

$$= \int \frac{1}{z^3} \cdot \frac{-z\, dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u=-\int\frac{dz}{z^2\cdot\sqrt{1-z^2}}$$

$$=-\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sin^2 t}$$ ► بنسټ اینتیګرال

$$=\cot t+c$$

$$=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}+c$$

$$=\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}+c$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=x+c\cdot\sqrt{1-x^2}\quad \text{für } |x|\leq 1$$

2. Fall: $v=\sqrt{x^2-1};\quad |x|>1$

$$u\cdot 0+\sqrt{x^2-1}\cdot u'\cdot(1-x^2)=1$$

$$u'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\,(1-x^2)}$$

$$u=-\int\frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\int\frac{1}{z^3}\cdot\frac{z\,dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$u=-\int\frac{dz}{z^2\cdot\sqrt{1+z^2}}$$

$$=-\int\frac{\cosh t\,dt}{\sinh^2 t\cdot\sqrt{1+\sinh^2 t}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sinh^2 t}$$ ► بنسټ اینتیګرال،

$$x=\sqrt{1-z^2};\quad dx=-\frac{z\cdot dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

سبستیچیوشن

$$z=\sin t\Rightarrow dz=\cos t\cdot dt$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t;\quad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$$

دا اوبی دیفرنخیالمساوات

د 1 = | x | هم پوره کوي

Substitution: : سبستیچیوشن

$$x^2-1=z^2\Rightarrow dx=\frac{z\cdot dz}{x}$$

$$x=\sqrt{1+z^2};\quad dx=\frac{z\cdot dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

سبستیچیوشن

$$z=\sinh t\Rightarrow dz=\cosh t\cdot dt$$

$$\sqrt{1+\sinh^2 t}=\cosh t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u=\coth t+c$$

$$=\frac{\sqrt{1+\sinh^2 t}}{\sinh t}+c$$

$$=\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}+c$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+c$$

$\coth t=\frac{\cosh t}{\sinh t}$

$$y=u\cdot v$$

د $|x|\geq 1$ لپاره $=x+c\cdot\sqrt{x^2-1}$

د نورو x لپاره $y=x+c\cdot\sqrt{|1-x^2|}$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات د $|x|=1$ هم پوره کوي په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت کارونی له لارې و یوه اوبی ته رایوځای شي.

۲ – د لاګرانژ متود له لارې اوبی

$$y'(1-x^2)+xy=0$$

نیونه: $|x| \neq 1$; ویشنه په $1-x^2$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{xy}{1-x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+c_1$$

$$=\ln\sqrt{|1-x^2|}+c_1$$

$$y=\sqrt{|1-x^2|}\cdot c$$

$c=e^{c_1}$

$$y=c(x)\cdot\sqrt{|1-x^2|}$$

د نورو اوبیونولپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$y=\begin{cases}c(x)\cdot\sqrt{1-x^2} & \text{د } |x|<1 \text{ لپاره}\\ c(x)\cdot\sqrt{x^2-1} & \text{د } |x|>1 \text{ لپاره}\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. Fall: $y=c(x)\cdot\sqrt{1-x^2};\quad |x|<1$

په دیفرنخیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$y'=c(x)\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+c'(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$\underbrace{c(x)\cdot\frac{-x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}_{-c(x)\cdot x\sqrt{1-x^2}}+c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+ +xc(x)\cdot\sqrt{1-x^2}=1$$

$$c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2}=1$$

$$c'(x)=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه۱ حالت ۱ کی وشمیرل شو

$$c(x)=\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+k$$

دا اوبی دیفرنخیالمساوات د 1 = | x | هم پوره کوي

$$y=c(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$=x+k\cdot\sqrt{1-x^2}\quad \text{für } |x|\leq 1$$

2. Fall: $y=c(x)\cdot\sqrt{x^2-1};\quad |x|>1$

په دیفرنخیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$y'=c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}+c(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}+c(x)\frac{x(1-x^2)}{\sqrt{x^2-1}}+ +x\cdot c(x)\cdot\sqrt{x^2-1}=1$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}=1$$

$$c'(x)=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

$$=-\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

دا اینتیگرال همدا اوس برخه ۱
۲ . حالت کی اوبی شو

دا اوبی دیفرنځیالمساوات
د $|x| = 1$ هم پوره کوي
په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت
کارونی له لارې و يوه اوبی ته
رايوځاي شي.

14. $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

دپوښتنی څخه $x \neq 0$ ورکوي،
دا په دې مانا چی $x \neq n \cdot \pi$
د $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ سره

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

سبستیچیوشن (بدلون)

$z = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dz}{-\sin x}$

$$c(x) = -\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + k$$

$$y = c(x) \cdot \sqrt{x^2-1}$$

$$= x + k \cdot \sqrt{x^2-1} \quad \text{für } |x| \geq 1$$

$$y = x + k \cdot \sqrt{|1-x^2|} \quad \text{für alle } x$$

۱ - د برنولي متود له لارې اوبی

$$y' - \sin x \cdot y = \sin x(1 - \cos x)$$

$$uv' + vu' - uv \cdot \sin x = \sin x \cdot (1 - \cos x)$$

$$u\underbrace{(v' - v \cdot \sin x)}_{=0} + vu' = \sin x(1 - \cos x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \sin x \, dx$$

$$\ln|v| = -\cos x + c_1$$

$$v = e^{-\cos x}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\cos x} \cdot u' = \sin x(1 - \cos x) \quad \| \cdot e^{\cos x}$$

$$u' = \sin x(1 - \cos x) e^{\cos x}$$

$$u = \int \sin x(1 - \cos x) e^{\cos x} dx$$

$$= -\int (1-z) e^z dz$$

$$= -\int e^z dz + \int z \cdot e^z dz$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = -e^z + \int z \cdot e^z \, dz$$

پارشل یا ټوټه اینټیګریشن

$$= -e^z + z \cdot e^z - \int e^z \, dz$$

$$= -e^z + z \cdot e^z - e^z + c$$

$$= e^z (z-2) + c$$

$$= e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \cos x - 2 + c \cdot e^{-\cos x}$$

۲ – د لاګرانج متود له لارې اوبې

$$\frac{y'}{\sin x} - y = 0 \quad \| \cdot \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin x \, dx$$

$$\ln |y| = -\cos x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\cos x + c_1} = e^{-\cos x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\cos x} \Rightarrow y = c(x) \cdot e^{-\cos x}$$

په دیفرنشیالمساوات کې ځاې په ځاې کړې.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\cos x} + c(x) \cdot \sin x \cdot e^{-\cos x}$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} + c(x) \cdot e^{-\cos x} - c(x) \cdot e^{-\cos x} = 1 - \cos x$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} = 1 - \cos x \quad \| \cdot \sin x \cdot e^{\cos x}$$

$$c'(x) = \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x}$$

دا اینټیګرال همدا اوس برخه ۱ کې اوبې شو

$$c(x) = \int \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x} \cdot dx$$

$$= e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = c(x) \cdot e^{-\cos x}$

$= \cos x - 2 + k \cdot e^{-\cos x}$

15. $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبیونه

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$uv' + vu' + uv \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

$\underbrace{u(v' + v \cdot \cos x)}_{=0} + vu' = \frac{1}{2} \sin 2x$

$\frac{dv}{dx} = -v \cdot \cos x$

$\int \frac{dv}{v} = -\int \cos x \, dx$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$\ln |v| = -\sin x + c_1$

$v = e^{-\sin x}$

$\sin 2x = 2 \cos x \cdot \sin x$

$u \cdot 0 + e^{-\sin x} \cdot u' = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \| \cdot e^{\sin x}$

$u' = \frac{1}{2} \sin 2x \, e^{\sin x}$

Substitution: بدلون

$\sin x = z \Rightarrow dx = \frac{dz}{\cos x}$

پارشل یا ټوټه ایتیګریشن

$u = \int \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} dx$

$= \int z \cdot e^z \cdot dz$

$= z \cdot e^z - \int e^z dz$

$u = z \cdot e^z - e^z + c$

$= e^z(z-1) + c$

$= e^{\sin x}(\sin x - 1) + c$

$y = u \cdot v$

$= \sin x - 1 + c \cdot e^{-\sin x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – د لاګرانژ د متود له لارې اوبې

$y'+y\cdot\cos x=0$

$$\frac{dy}{dx}=-y\cdot\cos x$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\cos x\,dx$$

$$\ln|y|=-\sin x+c_1$$

$$y=c\cdot e^{-\sin x}\Rightarrow y=\underline{\underline{c(x)\cdot e^{-\sin x}}}$$

$y'=c'(x)\cdot e^{-\sin x}-\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}$

$c'(x)\cdot e^{-\sin x}-\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}+$

$$+\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$c'(x)\cdot e^{-\sin x}=\frac{1}{2}\sin 2x \quad \| \cdot e^{\sin x}$

$$c'(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cdot e^{\sin x}$$

$$c(x)=\int\cos x\cdot\sin x\cdot e^{\sin x}\,dx$$

$$=\underline{\underline{e^{\sin x}(\sin x-1)+k}}$$

$y=c(x)\cdot e^{-\sin x}$

$=\underline{\underline{\sin x-1+k\cdot e^{-\sin x}}}$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبې

$$y'-yx=x^2-1$$

$u\cdot\frac{dv}{dx}+v\,\frac{du}{dx}-u\cdot v\cdot x=x^2-1$

$u\cdot\left[\frac{dv}{dx}-v\cdot x\right]+v\,\frac{du}{dx}=x^2-1$

$$\frac{dv}{dx}-v\cdot x=0$$

$c=e^{c_1}$

پہ دیفرنځیالمساوات کې ځای
پہ ځای کړی.

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱
کې اوبې شو

16. $y'-yx=x^2-1$

$y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$

$y'=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\,\frac{du}{dx}$

$$\left[\frac{dv}{dx}-v\cdot x\right]=0$$

$v=v(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dv}{v} = \int x\,dx$$

$$\ln v = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln v} = e^{\frac{x^2}{2}+c_1} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c_1};\ c_1 = 0$$

$$v = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$v \cdot \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2-1}{v}$$

$$du = \frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,dx$$

$$\int du = \int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$u = u(x) = \underline{-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2}$$

$$y = \quad u(x) \quad \cdot v(x)$$

$$y = (-x e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \ -x \quad + c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x, -c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - x \rangle}}$$

۲ - د لاگرانژ د متود له لارې اوبي

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$$c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} - c_1(x) e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = x^2 - 1$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{dc_1(x)}{dx} = \frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$v(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$u \cdot \left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] = 0.$$

د راپاتی مساواتو به $u = u(x)$ د اینتیگریشن له لارې وټاکل شي.

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$= \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot x\,dx - \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx -$$

$$- \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + c_2$$

دا لاسته راغلی ارزښتونه $u(x)$ او $v(x)$ به په برابرون $y = u(x).v(x)$ کی کینبول شي.

دا لاسته راوړنه د ورکړشوي دفرنشیالمساوات تولیزه اوبیونه ده

$$F(x) = 0$$

$$\Rightarrow y' - y \cdot x = 0;\ x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - y \cdot x = 0$$

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + \ln c_1(x)$$

$$\underline{y = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\underline{y' = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dc_1(x) = \frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,dx = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$\int c_1(x)\,dx = \int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$\underline{c_1(x) = -x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2}$$

$$y = c_1(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$= (-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = -x + c_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto c_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}} - x\rangle}}$$

دا د مساوات $y' - yx = 0$ د اوبیونی
سره لاس ته راغلی اینتیګریشنثابته
د x فنکشن دی
$c_1(x)$ د y لپاره برخاوبی کی اینبول کیږي.
لاس ته راوړنه همغه تولیزه اوبیونه ده،
لکه څنګه چی د برونولی متود له لاري
لاس ته راغلی

۱ - د برنولي متود له لاري اوبی

17. $y'\cdot x^2 + y = x$

$y = u\cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x)\cdot v(x)$

$$(uv' + vu')x^2 + uv = x$$

$$u\underbrace{(x^2v' + v)}_{=0} + x^2vu' = x$$

$$x^2v' = -v$$

نیونه: $x \mid= 0$ د x^2 سره ویشنه

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|v| = \frac{1}{x} + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$$\underline{v = e^{\frac{1}{x}}}$$

$$u\cdot 0 + x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot u' = x \quad \|: x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$u' = \frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$u = \int \frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\,dx$$

دا اینټیګرال کیدی شي یواځي
د لړیودیزې له لاري اوبی شي

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$z = -\frac{1}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^{-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}-\frac{1}{3!x^3}+\frac{1}{4!x^4}-+\dots$$

$$\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2!x^3}-\frac{1}{3!x^4}+\frac{1}{4!x^5}-+\dots$$

$$u=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c\right)$$

د $x\neq 0$ لپاره

۲ - د لاگرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y'\cdot x^2+y=0$$

نیونه: $x\neq 0$ د x^2 سره ویشنه

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|y|=\frac{1}{x}+c_1$$

$c=e^{c_1}$

$$y=c\cdot e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

په دیفرنځیالمساوات کې کېږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-\frac{c(x)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}+c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x\quad\|:x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$c'(x)=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

دا اینتیگرال

همدا اوس برخه ۱کې اوبې شو

$$c(x)=\int\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = c(x) \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2!2x^2} + \frac{1}{3!3x^3} - \frac{1}{4!4x^4} + - \ldots + k\right)$$

für $x \neq 0$

18. $y' + \frac{1}{1+x}\, y + x^2 = 0$

١ - د برنولي متود له لارې اوبيونه

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$uv' + vu' + \frac{uv}{1+x} + x^2 = 0$$

د پوښتني کولو څخه همدااوس

$x \mid = -1$ ورکوي

$$u\underbrace{\left(v' + \frac{v}{1+x}\right)}_{=0} + vu' + x^2 = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{1+x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{1+x}$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$-\ln|1+x| = \ln|1+x|^{-1}$

$$\ln|v| = -\ln|1+x| + c_1$$

$$v = \frac{1}{1+x}$$

$$u \cdot 0 + \frac{u'}{1+x} + x^2 = 0 \quad \| \cdot (1+x)$$

$$u' = -x^2(1+x)$$

$$u = -\int (x^2 + x^3)\, dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c_2$$

$$y = u \cdot v$$

$c = 12c_2$

$$= \frac{c - 4x^3 - 3x^4}{12(1+x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ - د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y'+\frac{1}{1+x}y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{1+x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{1+x}$$

$$\ln|y|=-\ln|1+x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|1+x|+c_1}=e^{\ln\left|\frac{1}{1+x}\right|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot\frac{1}{1+x}\Rightarrow y=\frac{c(x)}{1+x}$$

$$y'=c'(x)\cdot\frac{1}{1+x}-c(x)\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$$

په دیفرنخیالمساوات کی کیږدی

$$\frac{c'(x)}{1+x}-\frac{c(x)}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}\cdot\frac{c(x)}{1+x}+x^2=0$$

$$\frac{c'(x)}{1+x}+x^2=0$$

$$c'(x)=-x^2(1+x)$$

$$c(x)=-\int(x^2+x^3)\,dx$$

$$=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+c_2$$

$$y=\frac{c(x)}{1+x}$$

$$=\frac{k-4x^3-3x^4}{12(1+x)}$$

$k=12c_2$

19. $y'+y\cdot\cos x=e^{-\sin x}$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ - د برنولي متود له لارې اوبیونه

$$uv'+vu'+uv\cdot\cos x=e^{-\sin x}$$

$$u\underbrace{(v'+v\cdot\cos x)}_{=0}+vu'=e^{-\sin x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dv}{v} = -v \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \cos x \, dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln |v| = -\sin x + c_1$$

$$\underline{v = e^{-\sin x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\sin x} \cdot u' = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$u' = 1$$

$$\underline{u = x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{(x+c) e^{-\sin x}}}$$

۲ - د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y' + y \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\sin x + c_1} = e^{-\sin x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\sin x}}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

په دیفرنخیالمساوات کی کېږدی

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} +$$

$$+ c(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = 1$$

$$c(x) = \underline{\underline{x + k}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

20. $y'+y\cdot\tan x=\sin(2x)$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

د پوښتني کولو څخه همدااوس

ورکوي $\cos x \neq 0$

$$-\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکئ:

$y=c(x)\cdot e^{-\sin x}$

$=\underline{\underline{(x+k)e^{-\sin x}}}$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبیونه

$uv'+vu'+uv\cdot\tan x=\sin(2x)$

$\underbrace{u(v'+v\cdot\tan x)}_{=0}+vu'=\sin(2x)$

$\frac{dv}{dx}=-v\cdot\tan x$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\tan x\,dx$$

$$=-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$\ln|v|=\ln|\cos x|+c_1$

$v=\underline{\cos x}$

$u\cdot 0+\cos x\cdot u'=\sin(2x)$

$=2\sin x\cdot\cos x \quad \| :\cos x$

$u'=2\sin x$

$u=2\int\sin x$

$=\underline{-2\cos x+c}$

$y=u\cdot v$

$=\underline{\underline{\cos x\cdot(c-2\cos x)}}$

– د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$y'+y\cdot\tan x=0$

$\frac{dy}{dx}=-y\cdot\tan x$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\tan x\cdot dx$$

$$=-\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + c_1$$

$$y = \cos x \cdot c \Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot \cos x}$$

$$y' = c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \underbrace{\cos x \cdot \tan x}_{\sin x} = \sin(2x)$$

$$c'(x) \cdot \cos x = \sin(2x)$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x \quad \| : \cos x$$

$$c'(x) = 2 \sin x$$

$$c(x) = 2 \int \sin x \cdot dz$$

$$= \underline{\underline{-2 \cos x + k}}$$

$$y = c(x) \cdot \cos x$$

$$= \underline{\underline{(k - 2 \cos x) \cdot \cos x}}$$

١ – د برنولي متود له لاري اوبيونه

$$y' - 2 \cdot y = -x + 3$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} - 2 \cdot u \cdot v = -x + 3$$

$$v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] + u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$\frac{du}{dx} - 2u = 0$$

$$\int \frac{du}{u} = \int 2\,dx$$

$$\ln u = 2x + c_1 \Rightarrow \underline{u = e^{2x} \cdot e^{c_1}}$$

$$c_1 = 0 \Rightarrow u = e^{2x}$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-x+3}{u} \blacktriangleright u = e^{2x}$$

$$c = e^{c_1}$$

په ديفرنخيالمساوات کی کينبوول

21. $y' - 2y = -x + 3$

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$

$$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

له $\left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] = 0$

$u = u(x)$ لاس ته راځي

د $u = e^{2x}$

سره حل لرو $v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2u\right] = 0.$

د لاندې پاتی برابرون ځخه د ايتيګرال له لاري

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

v= v(x) تاکل کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dv = e^{-2x}(3-x)\,dx$$

$$v = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$v = e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

$$\int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$= 3\int e^{-2x}\,dx - \int x\cdot e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-2x} - \left[x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}e^{-2x}\right] + c_2$$

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$y = e^{2x}\cdot\left[e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2\right]$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + e^{2x}\cdot c_2$$

$$f = \left\langle x, -\frac{1}{2}x + e^{2x}\cdot c_2 - \frac{5}{4}\right\rangle$$

د u(x) او v(x) لاس ته راوري ارزښتونه د y=u(x).v(x) په مساوات کی کیښول کیږي. لاس ته راوړنی د ورکړ شوي دفرنځیالبرابراون تولیز اوبې دي

۲ - د لاگرانژ موتود له لاري اوبیونه

$$y' - 2y = -x + 3$$

$$y' - 2y = 0$$

$$y = c_3(x)\cdot e^{2x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x}$$

ړدو $-x + 3 = 0$ نولرو

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\cdot 2$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int 2\,dx$$

$$\ln y = 2x + c_1$$

$$y = e^{2x+c_1} = e^{2x}\cdot e^{c_1}$$

$$= c_3(x)\cdot e^{2x}$$

د اینتیگریشنثابتی $e^{c_1} = c_3(x)$ د x فنکشن دی

د y او 'y لپاره دواړه برخاویبونی په پیلمساوات y' - 2y = -x + 3 کی کیښول کیږي

$$c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x} - 2\cdot c_3(x)\cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$\Rightarrow c_3'(x)\cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$c_3'(x) = (-x+3)\cdot e^{-2x}$$

$$\int c_3'(x) = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

د اینتگریشن له لارې لویه $c_3(x)$ پیداکیږي

$$c_3(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c_3(۲) په برابرون کی کینبول کیږی $y=c_3(x)\cdot e^{2x}$	$y=\left[e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)+c_2\right]\cdot e^{2x}$
لاسته راوړنه همغه ټولیزه اوبیونه	$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}+e^{2x}\cdot c_2$
ده، لکه د مخه د برنول د متود له لارې راپیدا شوه	$f=\left\langle x\cdot -\frac{1}{2}x+e^{2x}\cdot c_2-\frac{5}{4}\right\rangle$

۱ . ۳ د دوم نظم درفنخیالمساوات

1. $y''=\frac{1}{x}$	$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{x}$
د پوښتنیورکړې څخه لاسته0=| x راځي	$\int dy'=\int\frac{dx}{x}$
	$y'=\ln\|x\|+c_1$
وریسی اوبیونی ته دې حالتونه 0<x او 0>x توپیر شي	$=\begin{cases}\ln x+c_1 & \text{für } x>0\\ \ln(-x)+c_1 & \text{für } x<0\end{cases}$
	1. Fall: $y'=\ln x+c_1;\quad x>0$
	$\int dy=\int(\ln x+c_1)\,dx$
پارشل یا ټوټه ایتیګریشن	$y=\int\underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{dx}_{dv}+c_1\int dx$
	$=x\cdot\ln x-\int dx+c_1\cdot x$
	$=x(\ln x+c_1-1)+c_2$
$c_3=c_1-1$	$=x(\ln x+c_3)+c_2;\quad x>0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Fall: $y' = \ln(-x) + c_1; \quad x < 0$

$$\int dy = \int [\ln(-x) + c_1]\, dx$$

$$y = \int \underbrace{\ln(-x)}_{u} \cdot \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int x \cdot \frac{-1}{-x}\, dx + c_1 \cdot x$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int dx + c_1 \cdot x$$

$$= x[\ln(-x) - 1 + c_1] + c_2$$

$$= x[\ln(-x) + c_3] + c_2; \quad x < 0$$

پارځیل یا پارشل اینتیګرال

$c_3 = -1 + c_1$

$$y = x(\ln|x| + c_1) + c_2$$

د ارزښتکرښو کارونی له لاري کیدی شي دواړه اوبیونی رایوځاي شي. نومبدلون یا ـاړونه: $c_3 \hat{=} c_1$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = f(x)$$

$$\int dy' = \int f(x)\, dx$$

$$y' = \int f(x)\, dx + c_1$$

$$y = \int \left[\int f(x) \cdot dx + c_1\right] dx + c_2$$

3. $y'' - x^3 = 0$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x^3$$

$$\int dy' = \int x^3\, dx$$

$$y' = \frac{x^4}{4} + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^4}{4} + c_1\right) dx$$

$$y = \frac{x^5}{20} + c_1 \cdot x + c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $y'' = x + \sin x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x + \sin x$$

$$\int dy' = \int (x + \sin x)\, dx$$

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1 - \cos x\right) dx$$

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x - \sin x + c_2$$

5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2+x^2}| + c$$

دلته ارزښتکربني ضرور نه دي

خکه چی $x+\sqrt{1+x^2}>0$ د ټولو

x لپاره باور لري

پاشل اینتیګریشن

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int dy' = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1$$

$$\int dy = \int \underbrace{\ln (x + \sqrt{1+x^2})}_{u} \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$y = x \cdot \ln (x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x + \sqrt{1+x^2}}\, dx + c_1 x$$

$$= x [\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

$$= x [\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \sqrt{1+x^2} + c_2$$

6. $y'' = \tan x$

ددې انتیګرالبرابرون اوبیوني

کی په لړیودینه تریدنه ناشونی ده

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \tan x$$

$$\int dy' = \int \tan x\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = c_1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{2x^6}{6\cdot 15} + \frac{17x^8}{8\cdot 315} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1\cdot x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^7}{315} + \frac{17x^9}{22680} + \dots$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

7. $y'' = \sinh x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \sinh x$$

$$\int dy' = \int \sinh x\,dx$$

$$y' = \cosh x + c_1$$

$$\int dy = \int (\cosh x + c_1)\,dx$$

$$y = \sinh x + c_1\cdot x + c_2$$

8. $y'' = e^{x^2}$

د دې انتيګرالبرابرون اوبيونی يواځی لړيودينی سره شونی ده.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$z = x^2$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = e^{x^2}$$

$$\int dy' = \int e^{x^2}\,dx$$

$$y' = c_1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1\cdot x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{30\cdot 2!} + \frac{x^8}{56\cdot 3!} +$$

$$+ \frac{x^{10}}{90\cdot 4!} + \dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9. $y^{(4)}=\cos x$

$$y^{(4)}=\frac{dy'''}{dx}=\cos x$$

$$\int dy'''=\int \cos x\,dx$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}$$

$$y'''=\sin x+c_1^*$$

$$\int dy''=\int(\sin x+c_1^*)\,dx$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}$$

$$y''=-\cos x+c_1^*\cdot x+c_2^*$$

$$\int dy'=\int(-\cos x+c_1^*\cdot x+c_2^*)\,dx$$

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

$$y'=-\sin x+c_1^*\cdot\frac{x^2}{2}+c_2^*\cdot x+c_3$$

$$\int dy=\int\left(-\sin x+\frac{c_1^*}{2}\cdot x^2+c_2^*\cdot x+c_3\right)dx$$

$$y=\cos x+\frac{c_1^*}{6}x^3+\frac{c_2^*}{2}x^2+c_3x+c_4$$

$$c_1=\frac{1}{6}c_1^*;\quad c_2=\frac{1}{2}c_2^*$$

$$y=\cos x+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$$

10. $y'''=e^x$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=e^x$$

$$\int dy''=\int e^x\,dx$$

$$y''=e^x+c_1^*$$

$$\int dy'=\int(e^x+c_1^*)\,dx$$

$$y'=e^x+c_1^*\cdot x+c_2$$

$$\int dy=\int(e^x+c_1^*\cdot x+c_2)\,dx$$

$$y=e^x+c_1^*\cdot\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3$$

$$c_1=\frac{1}{2}c_1^*$$

$$=e^x+c_1x^2+c_2x+c_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

11. $y^{(4)}=\sinh(2x) \quad \blacktriangleright y^{(4)}=\frac{dy'''}{dx} \Rightarrow dy'''=y^{(4)}\cdot dx$

$$\int dy'''=\int \sinh(2x)\,dx$$

$$y'''=\frac{1}{2}\cosh(2x)+c_1 \quad \blacktriangleright y'''=\frac{dy''}{dx} \Rightarrow dy''=y'''\cdot dx$$

$$\int dy''=\int\left(\frac{1}{2}\cosh(2x)+c_1\right)dx$$

$$y''=\frac{1}{2}\int \cosh(2x)\,dx+\int c_1\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_2+c_1x+c_3 \quad \blacktriangleright c_2+c_3=c_4$$

$$=\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_1x+c_4$$

$$y''=\frac{dy'}{dx} \Rightarrow dy'=y''\cdot dx$$

$$\int dy'=\int\left(\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_1x+c_4\right)dx$$

$$y'=\frac{1}{8}\cosh(2x)+c_5+\frac{1}{2}c_1x^2+c_6+c_4x+c_7 \quad \blacktriangleright c_5+c_6+c_7=c_8$$

$$=\frac{1}{8}\cosh(2x)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8$$

$$y'=\frac{dy}{dx} \Rightarrow dy=y'\cdot dx$$

$$\int dy=\int\left[\frac{1}{8}\cosh(2x)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8\right]dx$$

$$y=\frac{1}{16}\cosh(2x)+c_9+\frac{1}{6}c_1x^3+c_{10}+\frac{1}{2}c_4x^2+c_{11}+c_8x+c_{12}$$

$$\underline{\underline{y=\frac{1}{16}\cosh(2x)+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{2}c_4x^2+c_8x+k}}$$

12. $y^{(5)}=\cosh(ax) \quad \blacktriangleright y^{(5)}=\frac{dy^{(4)}}{dx} \Rightarrow dy^{(4)}=y^{(5)}\cdot dx$

$$\int dy^{(4)}=\int \cosh(ax)\,dx=\frac{1}{a}\sinh(ax)+c_1=y^{(4)}=\frac{dy'''}{dx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \mathrm{d}y''' = \int\left[\frac{1}{a}\sinh(ax)+c_1\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\cosh(ax)+c_2+c_1x+c_3$$

$$y''' = \frac{1}{a^2}\cosh(ax)+c_1x+c_4 = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x}$$

$$\int \mathrm{d}y'' = \int\left[\frac{1}{a^2}\cosh(ax)+c_1x+c_4\right]\mathrm{d}x$$

$$y'' = \frac{1}{a^3}\sinh(ax)+c_5+\frac{1}{2}c_1x^2+c_6+c_4x+c_7$$

$$y'' = \frac{1}{a^3}\sinh(ax)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8 = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}$$

$$\int \mathrm{d}y' = \int\left[\frac{1}{a^3}\sinh(ax)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8\right]\mathrm{d}x$$

$$y' = \frac{1}{a^4}\cosh(ax)+c_9+\frac{1}{6}c_1x^3+c_{10}+\frac{1}{2}c_4x^2+c_{11}+c_8x+c_{12}$$

$$y' = \frac{1}{a^4}\cosh(ax)+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{4}c_4x^2+c_8x+c_{13} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\int \mathrm{d}y = \int\left[\frac{1}{a^4}\cosh(ax)+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{4}c_4x^2+c_8x+c_{13}\right]\mathrm{d}x$$

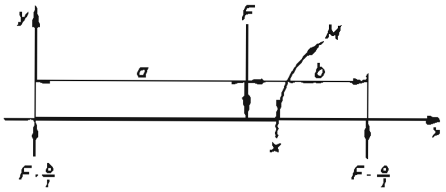
$$y = \frac{1}{a^5}\cosh(ax)+c_{14}+\frac{1}{24}c_1x^4+c_{15}+\frac{1}{12}c_4x^3+c_{16}+\frac{1}{2}c_8x^2+c_{17}+c_{13}x+c_{18}$$

$$y = \frac{1}{a^5}\cosh(ax)+\frac{1}{24}c_1x^4+\frac{1}{12}c_4x^3+\frac{1}{2}c_8x^2+c_{13}x+k$$

د مومنتو تاکلو لپاره باید ورشوګا- نی یاساحی $0\leq x\leq a$ او $a\leq x\leq a+b=l$ توپیر شي

ورشو

1. Bereich: $0 \leq x \leq a$

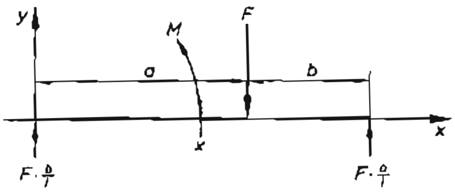


$$M - F\cdot\frac{b}{l}\cdot x = 0$$

$$M = F\cdot\frac{b}{l}\cdot x \quad \text{für } 0 \leq x \leq a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Bereich: $a \leq x \leq a+b=l$



$$M - F \cdot \frac{a}{l} \cdot (l-x) = 0$$

$$M = F \cdot \frac{a}{l}(l-x) \quad \text{für } a \leq x \leq l$$

د ورشو یا تعریفډیري a > x > 0

لپاره د کږونلاین y₁ ټاکنه

د دي دواړود هریوه ورشو یا ساحولپاره دي کږونلاین وټاکل شي، چې د x=a لپاره باید یوځاي ولوېږي.

$$y_1'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{b}{l} \cdot x}{E \cdot I}$$

$$\int dy_1' = -\frac{F \cdot b}{l \cdot E \cdot I} \int x \, dx$$

$$y_1' = -\frac{F \cdot b}{2lEI} x^2 + c_1$$

$$y_1 = \int \left(-\frac{F \cdot b}{2lEI} x^2 + c_1 \right) dx$$

$$= -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + c_1 \cdot x + c_2$$

د x = 0 لپاره کږون 0 دی.

$$y_1(0) = 0 - c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + c_1 \cdot x$$

د ورشو یا تعریفډیري l > x > 0

لپاره د کږونلاین y₂ ټاکنه:

$$y_2'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy_2'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{a}{l}(l-x)}{E \cdot I}$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$\int dy_2' = -\frac{F \cdot a}{lEI}\int (l-x)\,dx$$

$$= \frac{F \cdot a}{lEI}\int z\,dz$$

$$y_2' = \frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3$$

$$\int dy_2 = -\int\left(\frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3\right) dz$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} z^3 - c_3 \cdot z + c_4$$

ثابتی c_4 د غاړیارزښت $y_2(l) = 0$ څخه ټاکل کیږي

$$= -\frac{F \cdot a}{6lEI}(l-x)^3 - c_3(l-x) + c_4$$

$y_2(l) = c_4 \quad c_4 = 0$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI}(l-x)^3 - c_3(l-x)$$

په فنکشنونو y_1 او y_2 رامنځ ته شوي ثابتي c_1 او c_2 داسی وټاکل شي، چی دواړه فنکشنونه په $x=a$ کی یوځای پریوځي، دا په دې مانا، چی باور لري

$y_1(a) = y_2(a)$

$y_1'(a) = y_2'(a)$

$y_1(a) = y_2(a)$

$$-\frac{Fba^3}{6lEI} + c_1 \cdot a = -\frac{Fab^3}{6lEI} - c_3 \cdot b$$

$y_1'(a) = y_2'(a)$

$$-\frac{Fba^2}{2lEI} + c_1 = +\frac{Fab^2}{2lEI} + c_3$$

دا ثابتي c_1 او c_2 په y_1 او y_1 کی کینول کیږي

$$c_1 = \frac{Fab(a+2b)}{6lEI}$$

$$c_3 = \frac{-Fab(2a+b)}{6lEI}$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + \frac{Fab(a+2b)}{6lEI} x$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI}(l-x)^3 + \frac{Fab(b+2a)}{6lEI}(l-x)$$

$$y=\begin{cases}\dfrac{Fbx}{6lEI}\,[a(a+2b)-x^2] & \text{für } 0\le x\le a\\[2ex] \dfrac{Fa(l-x)}{6lEI}\,[b(b+2a)-(l-x)^2] & \text{für } a\le x\le l\end{cases}$$

رایوخایون :

$$y_1'=\frac{Fb}{6lEI}\,[a(a+2b)-3x^2]$$

$$y_1'=0$$

$$x_m^2=\frac{a}{3}\,(a+2b)$$

$$x_{m_{1,2}}=\pm\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}$$

$$x_m=\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}$$

ماکسیمالکېږونه کیدیشي د y_1 یا y_2 ورشو کی داسی پرته وي، چی دفرنخیالیدی شي.

د $b<a$ له امله لاسته راځی

$$\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}<\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2a)}=a,$$

$$\left(x_m=-\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}<0 \text{ ist hier sinnlos.}\right)$$ دلته بې معنی

دا په دې ماناچی $x_m<a$ په x_mکی ماکسیمالکېږون د y_1 ورشوکی پروت دی، چی نورy_2 کی څیړنی ته باید اړ نه دی

ماکسیمال کېږون y_{max}

$$y_{max}=y_1(x_m)$$

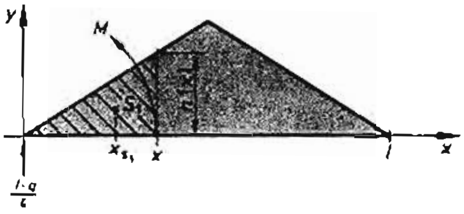
$$=\frac{Fb\sqrt{a(a+2b)}}{6\sqrt{3}\,lEI}\left[a(a+2b)-\frac{a}{3}\,(a+2b)\right]$$

$$=\frac{Fab(a+2b)\sqrt{a(a+2b)}}{9\sqrt{3}\,lEI}$$

1. Bereich: $0\le x\le \frac{l}{2}$ ورشو

۱۴ – ټول بار $F=(½)\,l.q$ دی داسی چی پروتزور په A او B هریو کی $(¼)l.q$ دی

دا کربنی شوې هواره دا بار $(½)h(x).x$ دی.



$$h(x)=\frac{2q}{l}\,x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دروندتکی پروتمحور x_{S1} کیدی شي بنستهندسیز و $x_{S1} = (2/3)x$ ته وشمیرل شي.

$$0 = M + (x - x_{s1}) \cdot \frac{1}{2} h(x) \cdot x - x \cdot \frac{l \cdot q}{4}$$

$$M = \frac{l \cdot q}{4} x - \left(x - \frac{2}{3} x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{l} x \cdot x$$

$$= \frac{l \cdot q}{4} x - \frac{q}{3l} x^3 \quad \text{für } 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

د کږونلاین y_1 ټاکنه د لاندي ورشو لپاره

$0 \le x \le \frac{l}{2}$:

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right)$$

$$\int dy_1' = -\frac{q}{EI} \int \left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right) dx$$

د سیومتري دلائلو له امله c_1 له لاندي څخه لاس ته راځي

$x_m = \frac{l}{2}$ mit $y_1'\left(\frac{l}{2}\right) = y_2'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

$$y_1' = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{1}{12l} x^4 + c_1\right)$$

$$0 = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{8} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{1}{12l} \cdot \frac{l^4}{16} + c_1\right)$$

$$c_1 = -\frac{l^3}{32} + \frac{l^3}{192}$$

$$= -\frac{5l^3}{192}$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{x^4}{12l} - \frac{5l^3}{192}\right)$$

$$\int dy_1 = \frac{q}{EI} \int \left(\frac{x^4}{12l} - \frac{lx^2}{8} + \frac{5l^3}{192}\right) dx$$

$y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$

$$y_1 = \frac{q}{EI} \left(\frac{x^5}{60l} - \frac{lx^3}{24} + \frac{5l^3 \cdot x}{192}\right) + c_2$$

$$y_1(0) = \frac{q}{EI} \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیومتریکی بارونی یا زور له امله کږونلاین و x = l /2 ته سیومتري دی.د y_2 لپاره په ورشو l/2≤x≤l کی په y_1 کی فقط x د l - x سره بدل کړي.

$$y_1=\frac{qx}{12EI}\left(\frac{x^4}{5l}-\frac{lx^2}{2}+\frac{5l^3}{16}\right)$$

$$\text{für } 0\le x\le\frac{l}{2}$$

$$y=\begin{cases}\dfrac{qx}{12EI}\left(\dfrac{x^4}{5l}-\dfrac{lx^2}{2}+\dfrac{5l^3}{16}\right) & \text{für } 0\le x\le\dfrac{l}{2}\\[2ex] \dfrac{q(l-x)}{12EI}\left[\dfrac{(l-x)^4}{5l}-\dfrac{l(l-x)^2}{2}+\dfrac{5l^3}{16}\right] & \text{für } \dfrac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$$

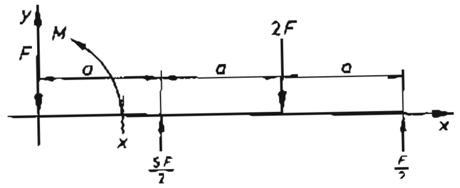
د $x_m = l/2$ لپاره ماکسیمالکږون له y_1 څخه شمیرل کیدی شي.

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{ql}{24EI}\left(\frac{l^3}{80}-\frac{l^3}{8}+\frac{5l^3}{16}\right)$$

$$y_{max}=\frac{ql^4}{120EI}$$

۱۵ – دې ټوبنتنی سره د x لپاره درې ورزوګانی باید توپیر شي

1. Bereich: $0\le x\le a$: ورشو



$$0=M+F\cdot x\Rightarrow M=-F\cdot x$$

د $0\le x\le a$ لپاره کږونلاین: y_1

$$y_1''=-\frac{M}{EI}$$

$$=\frac{F}{EI}x$$

$$y_1'=\frac{F}{2EI}x^2+c_1$$

$$y_1=\frac{F}{6EI}x^3+c_1x+c_2$$

ژی ارزښت : $y_1(a)=0\Rightarrow c_2$

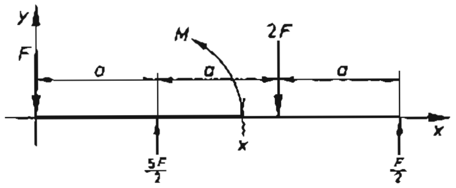
$$0=\frac{Fa^3}{6EI}+c_1a+c_2$$

$$c_2=-\frac{Fa^3}{6EI}-c_1a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_1 = \frac{F}{6EI}(x^3 - a^3) + c_1(x-a)$$

2. Bereich: $a \le x \le 2a$: وردیتو



$$0 = M - \frac{5F}{2}\cdot(x-a) + F\cdot x$$

$$M = \frac{5F}{2}(x-a) - F\cdot x$$

$$= \frac{3F}{2}x - \frac{5aF}{2}$$

$$= \frac{F}{2}(3x - 5a)$$

د $a \le x \le 2a$ لپاره کږوالی: y_2

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3x - 5a)$$

$$y_2' = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3}{2}x^2 - 5ax + c_3\right)$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2}x^2 + c_3x + c_4\right)$$

ژی ارزښت : $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{5a^3}{2} + c_3a + c_4\right)$$

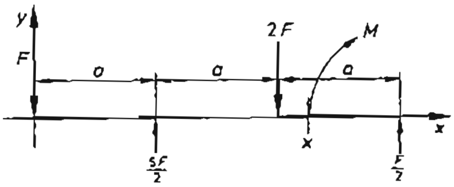
$$c_4 = \frac{5a^3}{2} - \frac{a^3}{2} - c_3a$$

$$= \frac{4a^3}{2} - c_3a$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2}x^2 + c_3(x-a) + 2a^3\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3. Bereich: $2a \le x \le 3a$ وریستو



$$0 = M - \frac{F}{2}(3a - x) \Rightarrow M = \frac{F}{2}(3a - x)$$

د $2a \le x \le 3a$ لپاره کږونلاین : y_3

$$y_3'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3a - x)$$

$$y_3' = -\frac{F}{2EI}\left(3ax - \frac{x^2}{2} + c_5\right)$$

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5 x + c_6\right)$$

ژی ارزښت : $y_3(3a) = 0 \Rightarrow c_6$

$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{6} + 3ac_5 + c_6\right)$$

$$c_6 = -27a^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - 3ac_5$$

$$= -9a^3 - 3ac_3$$

دا په فنکشنونو y_1 , y_2 , y_3 کی لا دننه ثابتی c_1 , c_3 , c_5 بایدد دي دري فنکشنونو رایوځایونی له لارې وټاکل شي

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5(x - 3a) - 9a^3\right]$$

د c_3 او c_5 ټاکه:

شرتونه: $y_2(2a) = y_3(2a)$

$$y_2'(2a) = y_3'(2a)$$

$$y_2(2a) = -\frac{F}{2EI}[4a^3 - 10a^3 + ac_3 + 2a^3]$$

$$= -\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3]$$

$$y_3(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[6a^3 - \frac{4}{3}a^3 - ac_5 - 9a^3\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$y_2(2a) = y_3(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3] = -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$c_3 - 4a^2 = -\frac{13a^2}{3} - c_5$$

مساوات یا برابرون I

$$\text{I:} \quad c_3 + c_5 = -\frac{1}{3}a^2$$

$$y_2'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 10a^2 + c_3)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2)$$

$$y_3'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 2a^2 + c_5)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$y_2'(2a) = y_3'(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2) = -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$c_3 - 4a^2 = 4a^2 + c_5$$

مساوات یا برابرون II

$$\text{II:} \quad c_3 - c_5 = 8a^2$$

د مساواتو I او II خخه c_3 او c_3 ساده راپیدا کیږي

$$\text{I+II:} \quad 2c_3 = -\frac{1}{3}a^2 + 8a^2 \Rightarrow c_3 = \frac{23}{6}a^2$$

$$\text{I-II:} \quad 2c_5 = -\frac{1}{3}a^2 - 8a^2 \Rightarrow c_5 = -\frac{25}{6}a$$

د c_1 ټاکنه

ثابته c_1 د $y_1'(a) = y_2'(a)$ اړیکو خخه شمیرل کیږي

$$y_1'(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y_2'(a) = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a^2}{2} - 5a^2 + \frac{23a^2}{6}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_2'(a) = -\frac{Fa^2}{6EI}$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{Fa^2}{6EI} \Rightarrow c_1 = -\frac{2Fa^2}{3EI}$$

په بنده بڼه کی د ټولو درې ورشوګانو یا ساحو انځورونه:

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}(x^3 - 4a^2x + 3a^3) & \text{für } 0 \le x \le a \\ \frac{-F}{12EI}(3x^3 - 15ax^2 + 23a^2x - 11a^3) & \text{für } a \le x \le 2a \\ \frac{F}{12EI}(x^3 - 9ax^2 + 25a^2x - 21a^3) & \text{für } 2a \le x \le 3a \end{cases}$$

د ماکسیمال راکږونی ټاکلو لپاره باید y'_1 ، y'_2 او y'_3 جوړ شي.

$$y_1' = \frac{F}{6EI}(3x^2 - 4a^2)$$

$$y_1' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \pm a\sqrt{\frac{4}{3}}$$

هم x_1 او هم x_2 د ورشو $0 \le x \le a$ څخه دباندې پراته دي، چی له دې امله د ماکسیمالراګرون لپاره په پوښتنه کی نه راځي په ورشو $0 \le x \le a$ کی کیدی شي ماکسیمالکږون یواځې په ژی ارزښت $x_{m1}=0$ کي رامنځ ته شي.

$$y_1(0) = y_1(x_{m_1}) = y_{max_1}$$

$$y_{max_1} = \frac{Fa^3}{2EI}$$

$$y_2' = -\frac{F}{12EI}(9x^2 - 30ax + 23a^2)$$

$$y_2' = 0 \Rightarrow 9x^2 - 30ax + 23a^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + \frac{23}{9}a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{5}{3}a \pm \sqrt{\frac{25}{9}a^2 - \frac{23}{9}a^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1;2}=\frac{5}{3}a\pm\frac{\sqrt{2}}{3}a$$

$$x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a$$

دلته پامور نه دی ◀ $x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a$

دا پورته ارزښت نور د y_1 باوروړشو $a\leq x\leq 2a$ کی نه دی پروت، چی له دې امله یواځ د x_2 لپاره ماکسیمال راکړون مو مخ ته پریوتی شي.

$$x_{m_2}=\frac{a}{3}(5-\sqrt{2})$$

$$y_{max_2}=y_2(x_{m_2})$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(5-\sqrt{2})^3-\frac{5a^3}{3}(5-\sqrt{2})^2+\right.$$

$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(155-77\sqrt{2})-\frac{5a^3}{3}(27-10\sqrt{2})\right.$$

$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=-\frac{Fa^3}{108EI}[155-77\sqrt{2}-405+150\sqrt{2}+$$

$$+345-69\sqrt{2}-99]$$

$$y_{max_2}=-\frac{Fa^3}{108EI}[-4+4\sqrt{2}]$$

$$=-\frac{Fa^3}{27EI}(\sqrt{2}-1)$$

پام دې وي، چی دا راکړون د y-محور په مثبت- یا زیاتونلور رامنځ ته کیږي(دا په دې مانا، چی تراوسه پاس یا پورته پروت دی)، ځکه چی په دې کواوردیناتسیستم کی زورF کمون(تفریق) نخښه لري.

$$y_3'=\frac{F}{12EI}(3x^2-18ax+25a^2)$$

$$y_3'=0\Rightarrow 3x^2-18ax+25a^2=0$$

$$x^2-6ax+\frac{25}{3}a^2=0$$

$$x_{1;2}=3a\pm\sqrt{9a^2-\frac{25}{3}a^2}$$

$$=3a\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

دلته پامور نه دی ◀ $x_1=3a+a\sqrt{\frac{2}{3}}>3$

د x_1 – ارزښت نور د y_3 باوروړشو کی نه دی پروت، نو ځکه یواځي

د x_2 لپاره ماکسیمال راکړون موجود کیدی شي

$$x_{m_3}=a\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$y_{max_3}=y_3(x_{m_3})$$

$$=\frac{F}{12EI}\left[a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3-9a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+\right.$$

$$\left.+25a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-21a^3\right]$$

$$=\frac{Fa^3}{12EI}\left[33-\frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-9\left(\frac{29}{3}-6\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\right.$$

$$\left.+25\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-21\right]$$

$$=\frac{Fa^3}{12EI}\left[33-\frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-87+54\sqrt{\frac{2}{3}}+\right.$$

$$\left.+75-25\sqrt{\frac{2}{3}}-21\right]$$

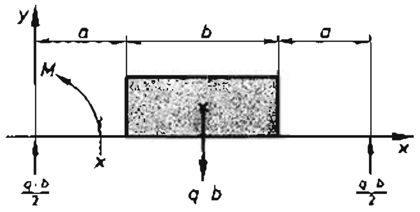
$$=\frac{Fa^3}{12EI}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{Fa^3}{9EI}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

۱۶ . د x لپاره دري ورشوګانی توپیر کیدی شي.

1. Bereich: $0\leq x\leq a$: تعین تعدوی (ورشو)

$l=2a+b$



$$0=M-\frac{q\cdot b}{2}x\Rightarrow M=\frac{q\cdot b}{2}x$$

د $0\leq x\leq a$ لپاره کږونلاین y_1:

$$y_1''=-\frac{M}{E\cdot I}$$

$$=-\frac{qb}{2EI}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_1' = -\frac{qb}{4EI}x^2 + c_1$$

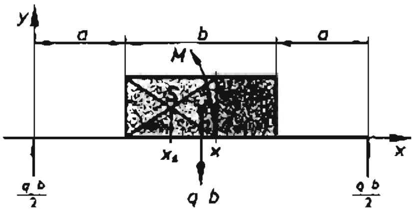
$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1 x + c_2$$

ژی ارزښت(: $y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$

$$0 = -0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1 x$$

2. Bereich: $a \le x \le a+b$ ورشو



$$0 = M + q(x-a)\cdot(x-x_s) - \frac{qb}{2}x$$

$x_s = \frac{x+a}{2}$

$$M = \frac{qb}{2}x - q(x-a)\cdot\frac{x-a}{2}$$

$$= \frac{qb}{2}x - \frac{q}{2}(x-a)^2$$

$$= \frac{q}{2}[bx - (x-a)^2]$$

$$= \frac{q}{2}[bx - x^2 + 2ax - a^2]$$

$$= \frac{q}{2}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

X_2: د $a \le x \le a+b$ لپاره کرښه لاین

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{q}{2EI}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

$$= \frac{q}{2EI}[x^2 - x(2a+b) + a^2]$$

$$y_2' = \frac{q}{2EI}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(2a+b) + a^2x + c_3\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیومتري باروېشنې له امله

$y_2'\left(a+\frac{b}{2}\right)=0,$

باور لري، له کوم سره چې c_3 ټاکله کېږي.

$$0=\frac{q}{2EI}\left[\frac{(2a+b)^3}{24}-\frac{(2a+b)^3}{8}+\frac{a^2}{2}(2a+b)+c_3\right]$$

$$c_3=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+3(2a+b)^2-(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+2(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+8a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-4a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{1}{12}(2a+b)(b^2+4ab-2a^2)$$

$$=\frac{1}{12}(2ab^2+8a^2b-4a^3+b^3+4ab^2-2a^2b)$$

$$=\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)$$

ثابتې c_1 او c_4 باید له فنکشنونو y_1 او y_2 څخه د یوشانیزشرتونو $y_1(a)=y_2(a)$ او $y_1'(a)=y_2'(a)$ له امله وټاکل شي.

$$y_2=\frac{q}{2EI}\left[\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}(2a+b)+\frac{a^2x^2}{2}+c_3x+c_4\right]$$

د c_1 ټاکنه

$$y_1'(a)=-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}(2a+b)+a^3+c_3\right]$$

$$=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-a^3-\frac{a^2b}{2}+a^3+c_3\right]$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2b}{2}+\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[4a^3-6a^2b+b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3\right]$$

$$=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$y_1'=y_2'(a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$c_1=\frac{qb}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

د c_4 ټاکنه

$$y_1(a)=-\frac{qba^3}{12EI}+\frac{qba}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

$$=\frac{qab}{24EI}(4a^2+6ab+b^2)$$

$$y_2(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^4}{12}-\frac{a^3}{6}(2a+b)+\frac{a^4}{2}+c_3a+c_4\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}[a^4-4a^4-2a^3b+6a^4+12ac_3+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[3a^4-2a^3b+ab^3+6a^2b^2+6a^3b-$$

$$-4a^4+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+12c_4]$$

$$y_1(a)=y_2(a)$$

$$ab(4a^2+6ab+b^2)=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$4a^3b+6a^2b^2+ab^3=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$0=-a^4+12c_4$$

$$c_4=\frac{a^4}{12}$$

ورشو

3. Bereich: $a+b\le x\le l$

$$y_1=\frac{qbx}{24EI}(6a^2+6ab+b^2-2x^2)$$

$$x:\blacktriangleright l-x$$

$$y_3=\frac{qb(l-x)}{24EI}[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2]$$

د دې ورشو لپاره کیدی شي کږونلاین y_3 له y_1 څخه ساده وشمیرل شي،څکه چې دا د سیومترۍ دروندوالي یا بارونی له امله و(2a+b)(½)= l /2 =x ته سیومتري دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تولو دري ورشوګان په رابندفورم کی د ګېړونلاین انځورونه

$$y=\begin{cases}\dfrac{qbx}{24EI}(6a^2+6ab+b^2-2x^2) & \text{für } 0\le x\le a\\[2ex] \dfrac{q}{24EI}[x^4-2x^3(2a+b)+6a^2x^2+x(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4] & \text{für } a\le x\le a+b\\[2ex] \dfrac{qb(l-x)}{24EI}[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2] & \text{für } a+b\le x\le l\end{cases}$$

د سیومتریکي باروېشنی له امله مېاکسیمال راکېږونه په لاندې کی پرته ده

$$x_m=\frac{l}{2}=\frac{1}{2}(2a+b).$$

$$y_{max}=y_2(x_m)=y_2\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[\frac{1}{16}(2a+b)^4-\frac{1}{4}(2a+b)^4+\frac{3}{2}a^2(2a+b)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(2a+b)(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4\right]$$

$$=\frac{q}{384EI}[(2a+b)^4-4(2a+b)^4+24(2a+b)^2a^2+$$

$$+8(2a+b)(b^3+6ab+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}[-3(16a^4+32a^3b+24a^2b^2+8ab^3+b^4)+24a^2(4a^2+4ab+b^2)+$$

$$+8(2a+b)(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}[-48a^4-96a^3b-72a^2b^2-24ab^3-3b^4+96a^4+96a^3b+24a^2b^2+$$

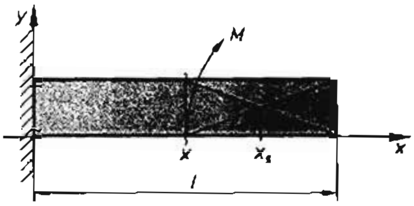
$$+16ab^3+96a^2b^2+96a^3b-64a^4+8b^4+48ab^3+48a^2b^2-32a^3b+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}[64a^3b+96a^2b^2+40ab^3+5b^4]$$

$$=\frac{qb}{384EI}(64a^3+96a^2b+40ab^2+5b^3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

17.



$$x_s=\frac{l+x}{2}$$

$$0=M+q(l-x)\cdot(x_s-x)$$

$$=M+q(l-x)\cdot\frac{l-x}{2}$$

$$=M+\frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$M=-\frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$y''==\frac{M}{EI}$$

$$=\frac{q}{2EI}(l-x)^2$$

Substitution: بدلون

$z=l-x \Rightarrow dx=-dz$

$$y'=\frac{q}{2EI}\int(l-x)^2\,dx$$

$$=-\frac{q}{2EI}\int z^2\,dz$$

$$=-\frac{q}{6EI}z^3+c_1$$

$$=-\frac{q}{6EI}(l-x)^3+c_1$$

ژی ارزبنت : $y'(0)=0 \Rightarrow c_1$

$$0=-\frac{q}{6EI}l^3+c_1;\quad c_1=\frac{ql^3}{6EI}$$

$$y'=\frac{q}{6EI}[l^3-(l-x)^3]$$

بدلون (سبستیچیوشن)

$z=l-x \Rightarrow dx=-dz$

$$y=\frac{q}{6EI}\int[l^3-(l-x)^3]\,dx$$

$$=-\frac{q}{6EI}\int(l^3-z^3)\,dz$$

$$=-\frac{q}{6EI}\left(l^3\cdot z-\frac{z^4}{4}+c_2\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = -\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 + c_2\right]$$

ژی ارزښت
Randwert: $y(0)=0 \Rightarrow c_2$

$$0 = -\frac{q}{6EI}\left[l^4 - \frac{1}{4}l^4 + c_2\right]$$

$$0 = l^4 - \frac{1}{4}l^4 + c_2; \quad c_2 = -\frac{3}{4}l^4$$

$$y = -\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 - \frac{3}{4}l^4\right]$$

$$= \frac{q}{24EI}\left[(l-x)^4 - 4l^3(l-x) + 3l^4\right]$$

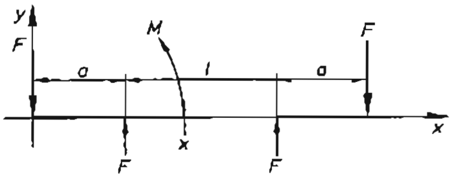
ماکسیمم اګړون په ژی ارزښت $z = l$ کی رامنځ ته کیږي.

$$y_{max} = y(l)$$

$$= \frac{ql^4}{8EI}$$

۱۸ . د x لپاره دي بیا دري ورشوګانی توپیر شي.

1. Bereich: $0 \le x \le a$ ورستو



$$0 = M + x \cdot F \Rightarrow M = -x \cdot F$$

y_1: د $0 \le x \le a$ لپاره کږونلاین

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI}x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI}x^2 + c_1$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}x^3 + c_1x + c_2$$

ژی ارزښت
Randwert: $y_1(a)=0 \Rightarrow c_2$

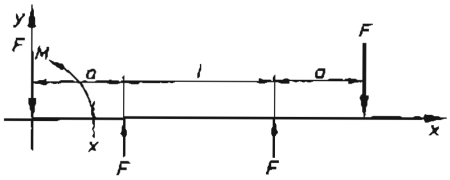
$$0 = \frac{F}{6EI}a^3 + c_1a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{F}{6EI}a^3 - c_1a$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}(x^3 - a^3) + c_1(x-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Bereich: $a \leq x \leq a+l$ ورشو



$$0 = M + x \cdot F - (x-a)F$$

$$= M + x \cdot F - x \cdot F + a \cdot F$$

$$M = -aF$$

y_2: د $0 \leq x \leq a+l$ لپاره کږونلاین

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$y_2'' = \frac{aF}{EI}$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI}\,x + c_3$$

د سیومتریکي باروېشنې له
امله باور لري:

$$y_2'\left(a+\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow c_3$$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right) + c_3$$

$$c_3 = -\frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI}\left[x - \left(a+\frac{l}{2}\right)\right]$$

$$y_2 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}(2a+l) + c_4\right]$$

څنډې ارزښت

Randwert: $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}(2a+l) + c_4\right]$$

$$0 = \frac{a^2}{2} - a^2 - \frac{al}{2} + c_4$$

$$c_4 = \frac{a^2}{2} + \frac{al}{2}$$

$$= \frac{a}{2}(a+l)$$

$$y_2 = \frac{aF}{2EI}\left[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن y_1 ثابته c_1 د هومو-گینیتي شرتونو $y'_1(a) = y'_2(a)$ له لارې پیدا کړي.

$$y'_1(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y'_2(a) = \frac{aF}{EI}\left[a - \left(a + \frac{l}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{alF}{2EI}$$

$$y'_1(a) = y'_2(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{alF}{2EI}$$

$$c_1 = -\frac{aF}{2EI}(a+l)$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)]$$

د سیومتریکی بارویشنی له امله کږونلاین y_3 و $x = a + (l/2)$ ته سیومتري دی د کږونلاین y_1 سره. له دې سره y_3 سملاسی له y_1 څخه شمیرل کیږي.

3. Bereich: $a + l \leq x \leq 2a + l$ ورشو

$$y_1 = y_1(x)$$

$$x: \blacktriangleright 2a + l - x$$

$$y_3 = \frac{F}{6EI}[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)]$$

د ټولو درې ورشوگانو لپاره په یو رابندفورم کی د اوبیونو (حلونو) انځورونه

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)] & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \frac{aF}{2EI}[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)] & \text{für } a \leq x \leq a+l \\ \frac{F}{6EI}[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)] & \text{für } a+l \leq x \leq 2a+l \end{cases}$$

دوه ماکسیمال، مختلف راکږونونه رامنځ ته کیږي

$$y_{max_1} = y(0) = y_{max_2} = y(2a+l)$$

$$y_{max_1} = y_1(0)$$

$$= \frac{F}{6EI}[-a^3 - 3a(a+l)(-a)]$$

$$= \frac{F}{6EI}[-a^3 + 3a^3 - 3a^2 l]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{max_1} = \frac{Fa^2}{6EI}(2a+3l) = y_{max_2}$$

$$y_{max_3} = y\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$= y_2\left(a+\frac{l}{2}\right) = y_2\left(\frac{2a+l}{2}\right)$$

$$= \frac{aF}{2EI}\left[\frac{1}{4}(2a+l)^2 - \frac{1}{2}(2a+l)^2 + a(a+l)\right]$$

$$= \frac{aF}{2EI}\left[-\frac{1}{4}(4a^2+4al+l^2) + a^2 + al\right]$$

$$= \frac{aF}{2EI}\left[-a^2 - al - \frac{l^2}{4} + a^2 + al\right]$$

$$= -\frac{al^2F}{8EI}$$

19. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:

$y > 0.$

$$\int z\,dz = \int y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$\frac{z^2}{2} = 2y^{\frac{1}{2}} + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = 4\sqrt{y} + 2c_1^*$$

$c_1 = 2c_1^*$

$$z = \sqrt{4\sqrt{y}+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}}$$

$$t = 4\sqrt{y} + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dt$$

$$= \frac{1}{8}(t-c_1)\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{t-c_1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(\sqrt{t} - \frac{c_1}{\sqrt{t}}\right)dt$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}t\sqrt{t} - 2c_1\sqrt{t}\right) + c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=\frac{\sqrt{t}}{12}(t-3c_1)+c_2$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}\,(4\cdot\sqrt{y}-2c_1)+c_2;\quad y>0$$

20. $y''=a\cdot e^y$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$c_1=2c_1^*$

Substitution: بدلون

$$t^2=2ae^y+c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t\,dt=2ae^y\,dy$$

$$dy=\frac{t\cdot dt}{ae^y}$$

$$=\frac{2t}{t^2-c_1}\cdot dt$$

$$\int\frac{dx}{a-x^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\text{ Artanh }\frac{x}{\sqrt{a}}+c$$

für $a>0$

$$\int\frac{dt}{c_1-t^2}=\frac{1}{\sqrt{c_1}}\text{ Artanh }\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=a\cdot e^y$$

$$\int z\cdot dz=a\int e^y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=a\cdot e^y+c_1^*\quad \|\cdot 2$$

$$z^2=2ae^y+c_1$$

$$z=\sqrt{2ae^y+c_1}$$

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{2ae^y+c_1}}$$

$$=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-c_1}\,dt$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-c_1}=-2\int\frac{dt}{c_1-t^2}$$

$$x=-2\frac{1}{\sqrt{c_1}}\text{ Artanh }\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{c_1}}\text{ Artanh }\sqrt{\frac{2a}{c_1}e^y+1}+c_2;\quad c_1>0$$

21. $y^4-y^3\cdot y''=1$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$y^4-y^3\cdot\frac{dz}{dy}\cdot z=1$$

نیونه: $y\neq 0$ په y^3 ویشنه

$$y-\frac{dz}{dy}z=y^{-3}$$

$$\int z\cdot dz=\int(y-y^{-3})\,dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{z^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{y^{-2}}{2}+c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=y^2+y^{-2}+2c_1$$

$$z=\sqrt{y^2+y^{-2}+2c_1}$$

$$=\frac{1}{y}\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}$$

$$\int dx=\int\frac{y}{\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}}\,dy$$

Substitution: بدلون

$$y^2=t \Rightarrow dy=\frac{dt}{2y}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2c_1t+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}}$$

Substitution: بدلون

$$u=t+c_1 \Rightarrow du=dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1-c_1^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$a^2 \blacktriangleright 1-c_1^2$$

$$x=\frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t+c_1+\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|y^2+c_1+\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}\right|+c_2$$

د $y\neq 0$ لپاره

$\neq$

22. $y''=\frac{1}{y}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

د پوښتنکونی خخه لاسته راځي:

$y\neq 0.$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=\frac{1}{y}$$

$$\int z\,dz=\int\frac{dy}{y}$$

$$\frac{z^2}{2}=\ln|y|+c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=2\ln|y|+2c_1^*$$

$$=\ln y^2+c_1$$

$c_1=2c_1^*$

$$z=\sqrt{\ln y^2+c_1}$$

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{\ln y^2+c_1}}$$

Substitution: بدلون

$$t^2=\ln y^2+c_1 \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow 2t\,dt = \frac{2y}{y^2}\,dy$$

$$dy = yt \cdot dt$$

د دې اینټیګریشن سره ل

لمړودیني ځخه تیریدنه ناشونی ده

$$\int dx = \int \frac{yt \cdot dt}{t}$$

$$= \int y\,dt$$

$$= \int e^{\frac{t^2-c_1}{2}}\,dt$$

$$= e^{-\frac{c_1}{2}} \int e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\blacktriangleright\; x = \frac{t^2}{2}$$

$$e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4 \cdot 2!} + \frac{t^6}{8 \cdot 3!} + \frac{t^8}{16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$\int e^{\frac{t^2}{2}}\,dt = c_2 + t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{t^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$x = e^{-\frac{c_1}{2}} \left[c_2 + \sqrt{\ln y^2 + c_1} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^3}{6} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \cdots \right]$$

د $y \neq 0$ ، لپاره

23. $y^2 = k^2 \cdot y''$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 = k^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$\int y^2\,dy = k^2 \int z\,dz$$

$$\frac{y^3}{3} = k^2 \cdot \frac{z^2}{2} + c_1^* \quad \Big\| \cdot \frac{2}{k^2}$$

$$z^2 = \left(\frac{2}{3} y^3 - 2c_1^*\right) \cdot \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{2}{3} (y^3 - 3c_1^*)$$

$c_1 = -3c_1^*$

$$z = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{y^3 + c_1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dx = k\sqrt{\frac{3}{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{y^3+c_1}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{c_1\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}}dy$$

د دې اینتیګرال شمیرنه یواځې د لړۍ وديزئينۍ له لارې شونې ده.

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}x+\binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3+-$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

د $|x|<1$ لپاره

$$\blacktriangleright \frac{y^3}{c_1}=x$$

$$\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\frac{y^3}{c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^6}{c_1^2}-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^9}{c_1^3}+-\cdots$$

د $|c_1|>|y^3|$ لپاره

$$x = k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

$$\left|\frac{y^3}{c_1}\right|<1 \Rightarrow |y^3|<|c_1|$$

د $|c_1|>|y^3|$ لپاره

24. $y''=y^2$

دا دفرنځیالمساوات هغه د مخه تیره پوښتنه ۲۳ کې شمیرلی دفرنځیالمساوات ځانګړی حالت دی د $k=1$ سره

$$x = \sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

د $|c_1|>|y^3|$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

25. $y^2 \cdot y'' = a$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = a$$

نيونه: $y \neq 0$ په y^2 ويشنه

$$\int z \cdot dz = a \int \frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{a}{y} + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$c_1 = 2c_1^*$

$$z^2 = -\frac{2a}{y} + c_1$$

$$z = \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}$$

Substitution: بدلون

$$c_1 - \frac{2a}{y} = t^2 \Rightarrow dy = \frac{ty^2}{a} dt$$

$$x = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{ty^2}{a} dt$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{4a^2}{(c_1 - t^2)^2} dt$$

$$= 4a \int \frac{dt}{[(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)]^2}$$

$$= 4a \int \frac{dt}{(\sqrt{c_1} + t)^2 \cdot (\sqrt{c_1} - t)^2}$$

ايتيگرال په توټه يا پارشلماتو ماتو توټه يا تجزيه کيږي

$$= 4a \int \left[\frac{A}{\sqrt{c_1} + t} + \frac{B}{(\sqrt{c_1} + t)^2} + \frac{C}{\sqrt{c_1} - t} + \frac{D}{(\sqrt{c_1} - t)^2} \right] dt$$

د خلوونو يا ضريبونو اټهول:

$$1 = A(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)^2 + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(\sqrt{c_1} + t)^2(\sqrt{c_1} - t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} - t) + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} + t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1\sqrt{c_1} - c_1 t - \sqrt{c_1}t^2 + t^3) + B(c_1 - 2\sqrt{c_1}t + t^2) + C(c_1\sqrt{c_1} + c_1 t - \sqrt{c_1}t^2 - t^3) +$$

$$+ D(c_1 + 2\sqrt{c_1}t + t^2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1=t^3(A-C)+t^2(-A\sqrt{c_1}+B-C\sqrt{c_1}+D)+t(-Ac_1-2B\sqrt{c_1}+Cc_1+2D\sqrt{c_1})+$$
$$+Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Cc_1\sqrt{c_1}+Dc_1$$

$$\begin{aligned}
&\text{I}: && 0=A-C && \Rightarrow A=C\\
&\text{II}: && 0=-A\sqrt{c_1}+B-C\sqrt{c_1}+D\\
&\text{III}: && 0=-Ac_1-2B\sqrt{c_1}+Cc_1+2D\sqrt{c_1}\\
&\text{IV}: && 1=Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Cc_1\sqrt{c_1}+Dc_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{II}: && 0=-2A\sqrt{c_1}+B+D\\
&\text{III}: && 0=-2B\sqrt{c_1}+2D\sqrt{c_1}\quad \|:2\sqrt{c_1} && \Rightarrow B=D\\
&\text{IV}: && 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Dc_1
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{II}: && 0=-2A\sqrt{c_1}+2B \quad \|\cdot c_1\\
&\text{IV}: && 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+2Bc_1
\end{aligned}\right\}+$$

$$1=\quad 4Bc_1 \qquad \Rightarrow B=\frac{1}{4c_1}=D$$

$$\text{IV}:\quad 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow A=\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}=C$$

له دې سره x شمیرل یږي.

$$x=4a\int\left[\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}+t}+\frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}+t)^2}+\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}-t}+\frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a}{c_1}\int\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}+t}+\frac{1}{(\sqrt{c_1}+t)^2}+\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}-t}+\frac{1}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}+t|-\frac{1}{\sqrt{c_1}+t}-\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}-t|+\frac{1}{\sqrt{c_1}-t}\right]+c_2$$

$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+t}{\sqrt{c_1}-t}\right|+\frac{2t}{c_1-t^2}\right]+c_2$$

$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{\sqrt{c_1}-\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}\right|+\frac{2\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{c_1-\left(c_1-\frac{2a}{y}\right)}\right]+c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{yc_1}+\sqrt{yc_1-2a}}{\sqrt{yc_1}-\sqrt{yc_1-2a}}\right|+\frac{1}{a}\sqrt{y(yc_1-2a)}\right]+c_2 \quad \text{für } y\neq 0$$

26. $y''=6y-4$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=6y-4$$

$$\int z\,dz=\int(6y-4)\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=3y^2-4y+c_1^* \quad \|\cdot 2$$

$$z^2=6y^2-8y+2c_1^*$$

$$z=\sqrt{6y^2-8y+2c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$c_1=-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*$$

$$z=\sqrt{6}\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}$$

$$\int dx=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{dy}{\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}}$$

Substitution: بدلون

$$t=y-\frac{2}{3}\Rightarrow dy=dt$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+c_1}}$$

$$x=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln|t+\sqrt{t^2+c_1}|+c_2$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|y-\frac{2}{3}+\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}\right|+c_2$$

27. $y''=1+y'^2$

$$y'=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=1+z^2$$

$$\int dx=\int\frac{dz}{1+z^2}$$ ▶ بنسټ اينټيګرال

$$x=\text{Arctan}\,z+c_1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\text{Arctan } z = x - c_1$

$z = \tan(x - c_1)$

$\frac{dy}{dx} = \tan(x - c_1)$

$\int dy = \int \tan(x - c_1)\,dx$

$\int \frac{-\sin(x-c_1)}{\cos(x-c_1)}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

$y = -\int \frac{-\sin(x-c_1)}{\cos(x-c_1)}\,dx$

$= -\ln|\cos(x-c_1)| + c_2$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$

$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \text{Arsinh } z$

$y'' = \sqrt{1+y'^2}$

$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2}$

$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int dx$

$\text{Arsinh } z = x + c_1$

$z = \sinh(x + c_1)$

$y = \int \sinh(x + c_1)\,dx$

$= \cosh(x + c_1) + c_2$

29. $y'' = e^{y'}$

$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$

$\frac{dz}{dx} = e^z$

$\int e^{-z}\,dz = \int dx$

$-\int e^{-z}\,dz = -\int dx$

$e^{-z} = -x + c_1$

$\ln(e^{-z}) = \ln(c_1 - x)$

$-z = \ln(c_1 - x)$

$y' = -\ln(c_1 - x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = -\int \ln(c_1 - x)\,dx$$

سبستیچیوشن

$c_1 - x = t \Rightarrow dx = -dt$

$$= \int \underbrace{\ln t}_{u}\,\underbrace{dt}_{dv}$$

پارشل - یا ټوټه اینتیګرال

$$= t \cdot \ln t - \int \frac{1}{t} \cdot t\,dt$$

$$= t \cdot \ln t - t + c_2$$

$$= t(\ln t - 1) + c_2$$

$$= (c_1 - x)[\ln(c_1 - x) - 1] + c_2$$

30. $y'' = y'^3$

ثابت : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$ زینګولاراوبیونه

$y' = z;\quad y'' = \frac{dz}{dx}$

نیونه : Voraussetzung: $y' \neq 0$

$$\frac{dz}{dx} = z^3$$

$$\int \frac{dz}{z^3} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2z^2} = x + c_1^*$$

$$z^2 = -\frac{1}{2(x + c_1^*)}$$

$c_1 = -c_1^*$

$$= \frac{1}{2(c_1 - x)}$$

$$z = \frac{1}{\pm\sqrt{2(c_1 - x)}}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2\sqrt{c_1 - x}) + c_2$$

$$y = \pm\sqrt{2(c_1 - x)} + c_2$$

$y = a = \text{const.}$ = ثابته

(c) ketabton.com: The Digital Library

31. $y' \cdot y' - 3y''^2 = 0$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$y'^2 - 3y''^2 = 0$$

$$y'^2 = 3y''^2$$

$$y' = \pm\sqrt{3}\,y''$$

پارتیکولار اوبیونه : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$

Voraussetzung: $y' = z \neq 0$ ؛ نیونه

$$z = \pm\sqrt{3}\,\frac{dz}{dx}$$

$$\pm\sqrt{3}\int \frac{dz}{z} = \int dx$$

$$\ln|z| = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,x + c_1^*$$

$$e^{\ln|z|} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x} \cdot \underbrace{e^{c_1^*}}_{c_1}$$

$$z = c_1 \cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}$$

$$y = c_1 \int e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x} \cdot dx$$

$$y = \pm\sqrt{3}\,c_1 \cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2$$

د $c_1 = 0$ سره په دي کی
پارتیکولاراوبیونه خوندي ده

32. $y''' + y''^2 = 0$

$$y'' = z \Rightarrow y''' = \frac{dz}{dx}$$

زیگولارزوبیونه : $y'' = 0 \Rightarrow y' = a$

$$y = ax + b$$

نیونه : $y'' = z \neq 0$

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -z^2$$

$$-\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{z} = x + c_1$$

$$z = \frac{1}{x + c_1} = y''$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = \int \frac{dx}{x+c_1}$$
$$= \ln|x+c_1| + c_2$$

د وریسی ایتیګریشن لپاره دي ارزښتکرښي کینښول شي

1. Fall: $x+c_1>0$

$$y' = \ln(x+c_1) + c_2$$
$$y = \underline{\underline{(x+c_1)[\ln(x+c_1)-1] + c_2x + c_3}}$$

2. Fall: $x+c_1<0$

$$y' = \ln(-x-c_1) + c_2$$
$$y = \underline{\underline{(x+c_1)[\ln(-x-c_1)-1] + c_2x + c_3}}$$

د ارزښتکرښوکارونی سره د دواړو چالتتوپیرونو لاس ته راوړنی یا نتیجی رایوځاي کیږي

$$y = (x+c_1)[\ln|x+c_1|-1] + c_2x + c_3$$
$$y = ax+b$$

33. $xy'^2 = y$

$$(y')^2 = \frac{y}{x}$$

د اوښتونو یا واریابلو بیلښت
x, dx und y, dy

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

اینتیګریشن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$2\sqrt{x} + c_1 = 2\sqrt{y} + c_2$$

$$\frac{c_1-c_2}{2} = c$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{c_1-c_2}{2}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + c$$

$$y = \underline{\underline{x + 2c\sqrt{x} + c^2}}$$

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library